

Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 4 (150). С. 79–83.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 4 (150). P. 79–83.

Научная статья
УДК 514.764.227

[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-10)

Конформно киллинговы векторные поля на пространстве анти-де Ситтера

Максим Евгеньевич Гнедко¹, Данила Сергеевич Григорьев²,
Дмитрий Николаевич Оскорбин³

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, gnedko98@mail.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
danila.grigoryev.2019@mail.ru

³Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия,
oskorbin@yandex.ru

Original article

Conformal Killing Vector Fields on Anti-de Sitter Spaces

Maxim E. Gnedko¹, Danila S. Grigoryev², Dmitry N. Oskorbin³

¹Altai State University, Barnaul, Russia, gnedko98@mail.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, danila.grigoryev.2019@mail.ru

³The Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia,
oskorbin@yandex.ru

Аннотация. Пространства анти-де Ситтера хорошо известны в общей теории относительности А. Эйнштейна и представляют интерес в исследованиях физиков и математиков. Так, например, при исследовании 1-симметрических лоренцевых многообразий Кахеном и Уоллахом оказалось, что пространства анти-де Ситтера наряду с пространствами Кахена — Уоллаха являются важным примером 1-симметрических пространств и играют важную роль в исследованиях по лоренцевой геометрии. Ранее в работах Е.Д. Родионова и Д.Н. Оскорбина были изучены солитоны Риччи, а также их связь с полями Киллинга на обобщенных пространствах Кахена — Уоллаха, а также конформно киллинговы векторные поля на 1-симметрических лоренцевых многообразиях. Кроме того, были изучены конформно киллинговы векторные поля на 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга на них зависит от поведения тензора Вейля. В случае равенства нулю тензора Вейля с помощью функций Эйри построены нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем. В данной работе исследуются конформно киллинговы векторные поля на пространстве анти-де Ситтера.

Abstract. Anti-de Sitter spaces are well known in Einstein's general theory of relativity and are of interest to physicists and mathematicians. For example, in the study of 1-symmetric Lorentzian manifolds by Kahen and Wallach, it turned out that anti-de Sitter spaces, along with Kahen-Wallach spaces, are an important example of 1-symmetric spaces and play a significant role in research in Lorentzian geometry.

Previously, E.D. Rodionov and D.N. Oskorbin studied Ricci solitons and their relationship to Killing fields on generalized Kahen-Wallach spaces, as well as conformal Killing vector fields on 1-symmetric Lorentzian manifolds. Furthermore, conformal Killing vector fields on 2-symmetric indecomposable Lorentzian manifolds were studied. It was established that the conformal factor of the conformal analog of the Killing equation on these manifolds depends on the behavior of the Weyl tensor. In the case where the Weyl tensor is zero, nontrivial examples of conformal Killing vector fields with a variable conformal factor were constructed using Airy functions.

In this paper, conformal Killing vector fields on anti-de Sitter space are investigated. The equation of a conformal Killing vector field in a special coordinate system is reduced to a system of differential equations, and a general solution is found.

Уравнение конформно киллингова векторного поля в специальной системе координат приводится к системе дифференциальных уравнений, находится общее решение.

Ключевые слова: конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, пространство анти-де Ситтера

Для цитирования: Гнедко М.Е., Григорьев Д.С., Оскорбин Д.Н. Конформно киллинговы векторные поля на пространстве анти-де Ситтера // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 4 (150). С. 79–83. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-10).

Основные определения

В данном разделе приводятся основные определения и понятия, которые будут использованы при формулировке и доказательстве основных результатов данной статьи. В основном они содержатся в работах [1–14].

Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M размерности n , на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g . Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то (M, g) называется лоренцевым многообразием.

Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка k или k -симметрическим, если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R — тензор кривизны (M, g) , а ∇ — связность Леви-Чивиты.

Псевдоримановы симметрические пространства порядка k , где $k \geq 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В настоящее время они исследованы в случаях $k = 2(3)$ в работах Д.В. Алексеевского и А.С. Галаева [7, 9].

В случае $k = 1$ Кахен и Уоллах показали [6], что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $(\mathbb{R}, -dt^2)$, универсальной накрывающей k -мерного пространства де Ситтера или анти-де Ситтера $k \geq 2$, пространства Кахена — Уоллаха, т.е. пространства $CW^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$.

Гладкое полное векторное поле X на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_X g = 0$, где $L_X g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля X .

Гладкое полное векторное поле X на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно киллинговым векторным полем, если

Keywords: conformal Killing vector fields, Lorentzian manifolds, anti-de Sitter space

For citation: Gnedko M.E., Grigoriev D.S., Oskorbin D.N. Conformal Killing Vector Fields on Anti-de Sitter Spaces. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 4 (150). P. 79–83. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-10).

выполняется равенство $L_X g = f(p)g$, где $L_X g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля X , $p \in M$, а $f(p)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Решение уравнения Эйнштейна для отрицательной космологической постоянной ($\Lambda < 0$) называется метрикой анти-де Ситтера. В четырехмерной системе координат Пуанкаре пространство-время метрика приобретает конформно плоскую форму [14]

$$g = \frac{L^2}{(x^3)^2} (c^2 dt^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2),$$

где $L = \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}$ — характерный радиус кривизны, c — скорость света. Заменим ct на t , тогда

$$g = \frac{L^2}{(x^3)^2} (dt^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение конформно киллингова векторного поля для метрики анти-де Ситтера $L_X g = fg$. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \partial_i T - \partial_t X^i &= 0; \\ \partial_i X^j + \partial_j X^i &= 0; \\ 2x^3 \partial_t T - x^3 f - 2X^3 &= 0; \\ 2x^3 \partial_i X^i - x^3 f - 2X^3 &= 0, \end{aligned}$$

где T, X^1, X^2, X^3 — функции в системе координат поля X .

Вычтем из предпоследнего уравнения последнее уравнение. Получим новое уравнение связи и перепишем систему:

$$\partial_i T - \partial_t X^i = 0; \quad (2)$$

$$\partial_i X^j + \partial_j X^i = 0; \quad (3)$$

$$\partial_t T - \partial_i X^i = 0; \quad (4)$$

$$2x^3 \partial_t T - x^3 f - 2X^3 = 0. \quad (5)$$

1. Вид функции T

Из уравнения (4) следует, что $\partial_i X^i = \partial_t T$. Дифференцируя (3) по t и принимая во внимание (2), получаем, что $\partial_{ij}^2 T = 0, i \neq j$. Аналогично с (4) уравнением получим $\partial_{tt}^2 T = \partial_{ii}^2 T$, обозначим эту величину за $Q(t)$. Тогда функция T принимает вид:

$$T(t, x^i) = u_0(t) + u_1(t, x^1) + u_2(t, x^2) + u_3(t, x^3). \quad (6)$$

Вычислим вторые производные $\partial_{tt}^2 T, \partial_{ii}^2 T$ и подставим в $T(t, x^i)$, получим $T(t, x^i) = \frac{Q(t)}{2} + \sum_{i=1}^3 ((x^i)^2 + A_i(t)x^i) + C(t)$. Продифференцируем дважды полученный вид функции T по t и определим вид функций $Q(t), A_i(t), C(t)$ и подставим их обратно в T . Таким образом,

$$T(t, x^i) = \frac{q_1 t + q_2}{2} \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 + \sum_{i=1}^3 x^i (a_{2i-1} t + a_{2i}) + \frac{q_1 t^3}{6} + \frac{q_2 t^2}{2} + q_3 t + q_4, \quad (7)$$

где $q_1, q_2, q_3, q_4, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — константы.

2. Вид функций X^i

Из уравнения (2), используя (8):

$$\partial_i T = (q_1 t + q_2) x^i + a_{2i-1} t + a_{2i} = \partial_t X^i.$$

Интегрируя по t , находим

$$X^i(t, x^i) = \left(\frac{q_1}{2} t^2 + q_2 t \right) x^i + \frac{a_{2i-1}}{2} t^2 + a_{2i} t + \varphi^i(x),$$

где $\varphi^i(x) = \varphi^i(x^1, x^2, x^3)$ не зависит от t .

Из (4)

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{2} t^2 + q_2 t + q_3 + \frac{q_1}{2} \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 + \sum_{i=1}^3 a_{2i-1} x^i = \\ = \frac{q_1}{2} t^2 + q_2 t + \partial_i \varphi^i(x). \end{aligned}$$

Выразим функцию $\varphi^i(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi^i = q_3 + \frac{q_1}{2} \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 + \sum_{i=1}^3 a_{2i-1} x^i; \\ \varphi^i(x) = q_3 x^i + \frac{a_{2i-1}}{2} (x^i)^2 + \frac{q_1}{6} (x^i)^3 + \\ + x^i \sum_{i \neq j} \left(a_{2j-1} x^j + \frac{q_1}{2} (x^j)^2 \right) + F^i(x^k, x^j), \end{aligned}$$

где $i \neq j, i \neq k$.

В работах [2, 12] выведено дополнительное условие: $\partial_{ii}^2 X^i + \partial_{jj}^2 X^i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{ii}^2 X^i &= a_{2i-1} + q_1 x^i; \\ \partial_{jj}^2 X^i &= q_1 x^i + \partial_{jj}^2 F^i(x^j, x^k). \end{aligned}$$

$$a_{2i-1} + 2q_1 x^i + \partial_{jj}^2 F^i(x^j, x^k) = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 0 \text{ и } \partial_{jj}^2 F^i(x^j, x^k) = -a_{2i-1}.$$

Отсюда

$$\partial_j F^i(x^j, x^k) = -a_{2i-1} x^j + \chi_j^i(x^k).$$

С условием, что $\partial_k \partial_j F^i = 0$, получаем

$$\partial_k \partial_j F^i = \partial_k \chi_j^i(x^k) = 0 \Rightarrow \chi_j^i(x^k) = \chi_j^i = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\partial_j F^i(x^j, x^k) = -a_{2i-1} x^j + \chi_j^i.$$

$$F^i(x^j, x^k) = -\frac{a_{2i-1}}{2} (x^j)^2 + \chi_j^i x^j + C^i,$$

где C^i — константы.

$$\text{Т.к. } \partial_{jj}^2 F^i = \partial_{kk}^2 F^i = -a_{2i-1} \Rightarrow$$

$$F^i(x^j, x^k) = -\frac{a_{2i-1}}{2} ((x^j)^2 + (x^k)^2) + \chi_j^i x^j + \chi_k^i x^k + C^i.$$

Подставляем обратно

$$\begin{aligned} \varphi^i(x) &= q_3 x^i + \frac{a_{2i-1}}{2} (x^i)^2 + \\ &+ x^i \sum_{m \neq i} a_{2m-1} x^m + \frac{a_{2i-1}}{2} ((x^j)^2 + (x^k)^2) + \\ &+ \chi_j^i x^j + \chi_k^i x^k + C^i. \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \varphi^i(x) &= q_3 x^i + x^i \sum_{m=1}^3 a_{2m-1} x^m - \\ &- \frac{a_{2i-1}}{2} \sum_{m=1}^3 (x^m)^2 + \chi_j^i x^j + \chi_k^i x^k + C^i. \end{aligned}$$

С учетом уравнения (3) получаем, что $\chi_j^i + \chi_k^i = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} X^i(t, x^i) &= q_2 x^i t + \frac{a_{2i-1}}{2} t^2 + a_{2i} t + \\ &+ q_3 x^i + x^i \sum_{m=1}^3 a_{2m-1} x^m - \frac{a_{2i-1}}{2} \sum_{m=1}^3 (x^m)^2 + \\ &+ \sum_{m=1}^3 \chi_m^i x^m + C^i \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} X^i(t, x^i) &= \frac{a_{2i-1}}{2} \left(t^2 - \sum_{m=1}^3 (x^m)^2 \right) + \\ &+ (q_2 x^i + a_{2i}) t + q_3 x^i + \\ &+ x^i \sum_{m=1}^3 a_{2m-1} x^m + \sum_{m=1}^3 \chi_m^i x^m + C^i. \quad (8) \end{aligned}$$

и

$$T(t, x^i) = \frac{q_2}{2} \left(t^2 + \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right) + \sum_{i=1}^3 x^i (a_{2i-1}t + a_{2i}) + q_3t + q_4 \quad (9)$$

3. Определение вида конформного множителя

Из уравнений (5) выразим вид конформного множителя.

$$f = \frac{2}{x^3} (x^3 \partial_t T - X^3)$$

В таком случае конформный множитель имеет следующий вид:

$$f = -\frac{a_5}{x^3} \left(t^2 - \sum_{m=1}^3 (x^m)^2 \right) - \frac{2}{x^3} \left[\sum_{m=1}^3 \chi_m^3 x^m + a_6 t + C^3 \right]. \quad (10)$$

Теорема. Пусть X — конформно киллингово векторное поле с координатами $T(t, x^i)$, $X^i(t, x^i)$ (T, X^i — гладкие функции) на пространстве анти-де Ситтера с метрикой (1). Тогда общее решение уравнения конформно киллингово векторного поля имеет вид (8), (9) с конформным множителем (10).

Замечание. В случае когда космологическая постоянная положительная, решение уравнения Эйнштейна называется метрикой де Ситтера. Применяя аналогичные методы, можно получить решение конформного аналога уравнения Киллинга в классе метрик полученных деформацией из метрики де Ситтера.

Заключение

В данной работе, в случае классического пространства анти-де Ситтера, определены конформно киллинговы векторные поля для метрики анти-де Ситтера. В дальнейшем предполагается исследовать случай пространства де Ситтера.

Библиографический список

1. Cao H.-D. Recent Progress on Ricci Solitons // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. Vol. 11. P. 1–38.
2. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Риччи солитоны и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кэхена — Уоллаха // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 5. С. 911–915. <https://doi.org/10.1134/S0037446619050136>
3. Андреева Т.А., Балащенко В.В., Оскорбин Д.Н. Конформные поля Киллинга на симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2020. Т. 6. С. 19–25.
4. Hall G.S. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity // World Scientific Lecture Notes in Physics. Singapore: World Scientific, 2004. Vol. 46. 400 p. <https://doi.org/10.1142/1729>
5. Андреева Т.А., Балащенко В.В., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Конформные поля Киллинга на 2-симметрических пятимерных лоренцевых многообразиях // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1. Т. 117. С. 68–71. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2021\)1-11](https://doi.org/10.14258/izvasu(2021)1-11)
6. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. 1970. Vol. 76. No 3. P. 585–592. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1970-12448-X>
7. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-Symmetric Lorentzian Manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2011. Vol. 61. No 12. P. 2331–2340. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.07.005>
8. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of Second-Order Symmetric Lorentzian Manifold // Journal of the European Mathematical Society. 2013. Vol. 15. No 2. P. 595–634. <https://doi.org/10.4171/JEMS/368>
9. Galaev A.S., Leistner T. Holonomy Groups of Lorentzian Manifolds: Classification, Examples, and Applications // Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry. Zurich: European Mathematical Society, 2008. P. 53–96. <https://doi.org/10.4171/051>
10. Walker A.G. On Parallel Fields of Partially Null Vector Spaces // The Quarterly Journal of Mathematics. 1949. Vol. os-20. No 1. P. 135–145. <https://doi.org/10.1093/qmath/os-20.1.135>
11. Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikčević S., Vázquez-Lorenzo R. The Geometry of Walker Manifolds. San Rafael: Morgan Claypool Publishers, 2009. 179 p. <https://doi.org/10.2200/S00197ED1V01Y200906MAS005>
12. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О конформном множителе в конформном аналоге уравнения Киллинга на многообразиях Кахена — Уоллаха с нулевым тензором Вейля // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 75–79. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2024\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2024)4-10)
13. Мальцев В.К. Принцип существования пространства и метрика де Ситтера // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т. 83. № 3. С. 476–479.
14. Релятивистская физика // Учебники по физике. URL: <https://physics42.ru/tutorials/relyativistskaya-fizika/> (дата обращения: 02.02.2026).

References

1. Cao H.-D. Recent Progress on Ricci Solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*. 2010. Vol. 11. P. 1–38.
2. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons and Killing Fields on Generalized Cahen — Wallach Manifolds. *Siberian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 60. No 5, P. 911–915. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0037446619050136>
3. Andreeva T.A., Balashchenko V.V., Oskorbin D.N. Conformal Killing Fields on Symmetric Lorentzian Manifolds of Low Dimension. *Proceedings of the Seminar on Geometry and Mathematical Modeling*. 2020. Vol. 6. P. 19–25. (In Russ.)
4. Hall G.S. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. *World Scientific Lecture Notes in Physics*. Singapore: World Scientific, 2004. 400 p. <https://doi.org/10.1142/1729>
5. Andreeva T.A., Balashchenko V.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Conformally Killing Fields on 2-Symmetric Five-Dimensional Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of Altai State University*. 2021. Vol. 117. No 1. P. 68–71. (In Russ.) [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2021\)1-11](https://doi.org/10.14258/izvasu(2021)1-11)
6. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1970. Vol. 76. No 3. P. 585–592. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1970-12448-X>
7. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-Symmetric Lorentzian Manifolds. *Journal of Geometry and Physics*. 2011. Vol. 61. No 12. P. 2331–2340. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.07.005>
8. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of Second-Order Symmetric Lorentzian Manifold. *Journal of the European Mathematical Society*. 2013. Vol. 15. No 2. P. 595–634. <https://doi.org/10.4171/JEMS/368>
9. Galaev A.S., Leistner T. Holonomy Groups of Lorentzian Manifolds: Classification, Examples, and Applications. *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*. Zürich: European Mathematical Society, 2008. P. 53–96. <https://doi.org/10.4171/051>
10. Walker A.G. On Parallel Fields of Partially Null Vector Spaces. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1949. Vol. os-20. No 1. P. 135–145. <https://doi.org/10.1093/qmath/os20.1.135>
11. Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikčević S., Vázquez-Lorenzo R. *The Geometry of Walker Manifolds*. San Rafael: Morgan Claypool Publishers, 2009. 179 p. (Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics). <https://doi.org/10.2200/S00197ED1V01Y200906MAS005>
12. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. On the Conformal Factor in the Conformal Analogue of the Killing Equation on Cahen–Wallach Manifolds with Zero Weyl Tensor. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 4 (138). P. 75–79. (In Russ.) [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2024\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2024)4-10)
13. Maltsev V.K. The Principle of Existence of Space and the De Sitter Metric. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1990. Vol. 83. No 3. P. 625–628. (In Russ.) <https://doi.org/10.1007/BF01018003>
14. Relativistic Physics. *Information and Reference Portal*. URL: <https://physics42.ru/tutorials/relyativistskaya-fizika/> (accessed: 02.02.2026). (In Russ.)

Информация об авторах

М.Е. Гнедко, аспирант, ассистент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.С. Григорьев, аспирант, ассистент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.Н. Оскорбин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия.

Information about the authors

M.E. Gnedko, Postgraduate Student, Assistant of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.S. Grigoryev, Postgraduate Student, Assistant of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.N. Oskorbin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia.