

Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 4 (150). С. 69–72.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 4 (150). P. 69–72.

Научная статья

УДК 514.765

[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-08](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-08)

О системе дифференциальных уравнений для определения потока Риччи на трехмерных метрических группах Ли

Виталий Владимирович Балащенко¹,

Александр Владимирович Гринкевич², Евгений Дмитриевич Родионов³

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
vitaly.balashchenko@gmail.com

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
i@grinkevich-pro.ru

³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru

Original article

On the System of Differential Equations for Determining the Ricci Flow on Three-Dimensional Metric Lie Groups

Vitaly V. Balashchenko¹, Alexandr V. Grinkevich², Evgeny D. Rodionov³

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus, vitaly.balashchenko@gmail.com

²Altai State University, Barnaul, Russia, i@grinkevich-pro.ru

³Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru

Аннотация. Исследованию потоков Риччи на (псевдо)римановых многообразиях посвящены работы многих математиков. При этом одним из тестовых примеров являются группы Ли с левоинвариантной римановой или лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты. Ранее потоки Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты изучались в работах Д. Кнопфа, К. Маклеода, в работах авторов данная задача решалась на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой в классе полусимметрических эквиаффинных связностей. В рамках данного исследования рассматривается поведение потока Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты.

В координатах Дж. Милнора исходное уравнение потока Риччи преобразуется в систему дифференциальных уравнений, содержащих структурные константы алгебр Ли. Исследованы решения для каждого из возможных типов псевдоортобазиса в алгебрах Ли.

Abstract. The study of Ricci flows on (pseudo-) Riemannian manifolds has been the subject of work by many mathematicians. Among the key test cases are Lie groups equipped with a left-invariant Riemannian or Lorentzian metric and the Levi-Civita connection.

Previously, Ricci flows on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant Riemannian metric and the Levi-Civita connection were investigated in the works of D. Knopf and K. McLeod. In the authors' papers, this problem was addressed on three-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric within the class of semisymmetric equiaffine connections.

This study examines the behavior of the Ricci flow on three-dimensional unimodular Lie groups endowed with a left-invariant Lorentzian metric and the Levi-Civita connection.

In J. Milnor's coordinates, the original Ricci flow equation transforms into a system of differential equations involving the structure constants of Lie algebras. Solutions have been investigated for each of the possible types of pseudo-orthogonal bases in Lie algebras.

Ключевые слова: поток Риччи, трехмерные группы Ли, связность Леви-Чивиты, лоренцева метрика

Keywords: Ricci tensor, three-dimensional Lie groups, Levi-Civita connection, Lorentzian metric

Для цитирования: Балащенко В.В., Гринкевич А.В., Родионов Е.Д. О системе дифференциальных уравнений для определения потока Риччи на трехмерных метрических группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 4 (150). С. 69–72. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-08](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-08).

For citation: Balashchenko V.V., Grinkevich A.V., Rodionov E.D. On the System of Differential Equations for Determining the Ricci Flow on Three-Dimensional Metric Lie Groups. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 4 (150). P. 69–72. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)4-08](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)4-08).

Введение

В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты.

Пусть M — (псевдо)риманово многообразие размерности n с метрическим тензором $g(X, Y)$ и связностью Леви-Чивиты ∇^g . Рассмотрим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\text{Ric}(g(t)). \quad (1)$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном в римановом случае для связности Леви-Чивиты [1]. Известно, что тензор Риччи в (псевдо)римановом случае, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\text{Sym}(\text{Ric}(g(t))). \quad (2)$$

Рассмотрим далее случай, когда G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и связностью Леви-Чивиты. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдоортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Дж. Милнора [2], в котором удобно проводить вычисления. Всего возможны четыре типа подобных базисов: $A_1 - A_4$. Более подробно:

Теорема. Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда если G унимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

1-й случай A_1 :

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \alpha_3 E_3, \\ [E_1, E_3] &= -\alpha_2 E_2, \\ [E_2, E_3] &= \alpha_1 E_1 \end{aligned}$$

с времениподобным E_1 ;

2-й случай A_2 :

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= (1 - \alpha_2) E_3 - E_2, \\ [E_1, E_3] &= E_3 - (1 + \alpha_2) E_2, \\ [E_2, E_3] &= \alpha_1 E_1 \end{aligned}$$

с времениподобным E_3 ;

3-й случай A_3 :

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= E_1 - \alpha_1 E_3, \\ [E_1, E_3] &= -\alpha_1 E_2 - E_1, \\ [E_2, E_3] &= \alpha_1 E_1 + E_2 + E_3 \end{aligned}$$

с времениподобным E_3 ;

4-й случай A_4 :

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \alpha_3 E_2, \\ [E_1, E_3] &= -\alpha_2 E_1 - \alpha_1 E_2, \\ [E_2, E_3] &= -\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 \end{aligned}$$

с времениподобным E_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных лоренцевых метрик Дж. Милнора

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$, метрика невырождена.

Рассмотрим далее случаи $A_1 - A_4$ последовательно в классе метрик Дж. Милнора. Случай A_1 рассмотрен ранее. Для наглядности рассмотрим случай A_2 . Случаи A_3 и A_4 рассматриваются аналогично.

Случай A_2

Для компактности записи компонент тензора Риччи в случае A_2 предлагается ввести дополнительные обозначения $K = A\alpha_1 - (B + C)\alpha_2 - (B - C)$:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{11} &= \frac{A^2 \alpha_1^2 - (B - C)^2 (\alpha_2^2 + 1) - 2\alpha_2 (B^2 - C^2)}{2BC}, \\ \text{Ric}_{22} &= \frac{K(A\alpha_1 + B\alpha_2 + B - C\alpha_2 + C)}{2AC}, \\ \text{Ric}_{33} &= -\frac{K(A\alpha_1 - B\alpha_2 - B + C\alpha_2 - C)}{2AB}, \\ \text{Ric}_{23} = \text{Ric}_{32} &= \frac{A\alpha_1 - B\alpha_2 - B - C\alpha_2 + C}{A}. \end{aligned}$$

Для диагональных компонент метрики $g_{11} = A$, $g_{22} = B$, $g_{33} = C$ получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\text{Ric}_{11}, \\ \frac{dB}{dt} = -\text{Ric}_{22}, \\ \frac{dC}{dt} = -\text{Ric}_{33}. \end{cases}$$

Кроме того, недиагональная компонента Ric_{23} должна быть равна нулю. Это дает алгебраическое условие:

$$A\alpha_1 - B(\alpha_2 + 1) - C(\alpha_2 - 1) = 0. \quad (3)$$

При выполнении условия (3) компоненты тензора Риччи упрощаются. Подставляя (3) в выражения для Ric_{ii} , получаем:

$$\text{Ric}_{11} = 2\alpha_2^2, \quad \text{Ric}_{22} = 0, \quad \text{Ric}_{33} = 0.$$

Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -2\alpha_2^2, \\ \frac{dB}{dt} = 0, \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Решения этих уравнений с начальными условиями $A(0) = A_0$, $B(0) = B_0$, $C(0) = C_0$:

$$B(t) = B_0, \quad C(t) = C_0, \quad A(t) = A_0 - 2\alpha_2^2 t.$$

Подставляя в условие (3), получаем соотношение между параметрами:

$$\alpha_1(A_0 - 2\alpha_2^2 t) = B_0(\alpha_2 + 1) + C_0(\alpha_2 - 1).$$

Поскольку левая часть зависит от t , а правая постоянна, необходимо рассмотреть отдельные случаи.

1. Если $\alpha_2 = 0$, то $A(t) = A_0$ и условие (3) превращается в:

$$\alpha_1 A_0 = B_0 - C_0.$$

2. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то условие (3) дает:

$$0 = B_0(\alpha_2 + 1) + C_0(\alpha_2 - 1),$$

$$\text{а } A(t) = A_0 - 2\alpha_2^2 t.$$

3. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, то $A(t) = A_0$ и условие (3) дает $B_0 = C_0$.

4. Если $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то условие (3) не может выполняться для всех t , так как левая часть линейно зависит от t , а правая постоянна. Следовательно, решений с диагональной метрикой не существует.

Заключение

В данной работе в системе координат Дж. Милнора исследовано поведение потока Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой. Для каждого из четырех типов псевдоортобазиса получены системы дифференциальных уравнений, определяющих поток. Данная тематика также изучалась в работах [3–9]. Подробно рассмотрен случай A_2 , найдены условия на параметры, при которых существуют решения, сохраняющие диагональность метрики. Случай A_1 подробно был рассмотрен ранее в [10]. Случаи A_3 и A_4 могут быть исследованы аналогичным образом. В дальнейшем предполагается изучить неунимодулярный случай.

Библиографический список

1. Hamilton R.S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature // Journal Differential Geometry. 1982. Vol. 17. No 2. P. 255–306.
2. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
3. Onda K. Ricci Flow on 3-Dimensional Lie Groups and 4-Dimensional Ricci-Flat Manifolds // arXiv:0906.1035. 2010. P. 1–25.
4. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // Communications in Analysis and Geometry. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.
5. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Einstein's Equation on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Vector Torsion // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 276. No 6. P. 733–745. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06796-1>
6. Павлова А.А., Хромова О.П. О симметрических потоках Риччи полусимметричных связок числа в трехмерных метрических группах Ли // Материалы международных конференций «Лобачевские чтения». Казань: Изд-во КФУ, 2022 С. 96–97.
7. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметричной связностью // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНТИ РАН, 2023. С. 19–29. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-19-29>

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20. № 1. С. 48–61. <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.005>

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметричной

метрической связностью // Известия вузов. Математика. 2022. № 5. С. 80–85. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-5-80-85>

10. Григорьев Д.С., Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О потоке Риччи на трехмерных группах Ли с лоренцевой метрикой (случай A1) // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2025. № 1. С. 43–47.

References

1. Hamilton R.S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal Differential Geometry*. 1982. Vol. 17. No 2. P. 255–306.

2. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups. *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

3. Onda K. Ricci Flow on 3-Dimensional Lie Groups and 4-Dimensional Ricci-Flat Manifolds. *arXiv:0906.1035*. 2010. P. 1–25.

4. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries under the Ricci Flow. *Communications in Analysis and Geometry*. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.

5. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Einstein's Equation on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Vector Torsion. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 276. No 6. P. 733–745. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06796-1>

6. Pavlova A.A., Khromova O.P. On Symmetric Ricci Flows of Semisymmetric Connections on Three-Dimensional Metric Lie Groups. *Proceedings of the International Conference «Lobachevsky Readings»*. Kazan: KFU Publishing House. 2022. Vol. 62. P. 96–97. (In Russ.).

7. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Metric Lie Groups with Semisymmetric

Connection. *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, M.: VINITI RAS, 2023, P. 19–29. (In Russ.). <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-19-29>

8. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Three-Dimensional Non-Unimodular Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric and Semi-Symmetric Connection. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2023. Vol. 20. No 1. P. 48–61. (In Russ.). <https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.005>

9. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Three-Dimensional Nonunimodular Lie Groups with a Riemannian Metric of an Invariant Ricci Soliton and a Semisymmetric Metric Connection. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. No 5. P. 65–69. <https://doi.org/10.3103/S1066369X2205005X>

10. Grigoryev D.S., Grinkevich A.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. On the Ricci Flow on Three-Dimensional Lie Groups with Lorentzian Metric (Case A1) *Proceedings of The Seminar on Geometry and Mathematical Modeling*. 2025. No 1. P. 43–47. (In Russ.)

Информация об авторах

В.В. Балащенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь;

А.В. Гринкевич, аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Е.Д. Родионов, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

V.V. Balashchenko, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Geometry, Topology, and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus;

A.V. Grinkevich, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

E.D. Rodionov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.