

Научная статья

УДК 532.546

[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-18](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-18)

Математическая модель фильтрации воды и воздуха в тающем снеге и поверхностном слое грунта

Антон Николаевич Сибин¹, Татьяна Андреевна Пекарская²

¹Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия, sibin_anton@mail.ru

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, pekarskayat@yandex.ru

Original article

Mathematical Model of Water and Air Filtration in Melting Snow and Surface Soil Layers

Anton N. Sibin¹, Tatyana A. Pekarskaya²

¹Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia, sibin_anton@mail.ru

²Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Altai State University, Barnaul, Russia, pekarskayat@yandex.ru

Аннотация. В данной работе на основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача движения воды и воздуха в тающем снеге и верхнем слое грунта. Для этого используются уравнения сохранения массы, двухфазной фильтрации и теплового баланса. Предложенная математическая модель учитывает фазовый переход в протяженной области, изменяющиеся фильтрационные свойства поверхностного слоя грунта, капиллярные эффекты. Численные эксперименты показали выполнение физического принципа максимума для пористости грунта и водонасыщенности, влияние снежного покрова на формирование в грунте слоя с меньшей проницаемостью, который влияет на впитывающую способность грунта и распределение поверхностного и грунтового стока в период интенсивного снеготаяния. Предложенная математическая модель может использоваться для оценки объемов поверхностного и подземного стока в период интенсивного снеготаяния.

Ключевые слова: термодинамика грунта, неоднородная среда, фазовые переходы, многофазная фильтрация, пористая среда, тающий снег

Abstract. The paper considers the problem of water and air movement in melting snow and surface soil layers, based on the equations of non-isothermal two-phase filtration. The study uses the equations of mass conservation, two-phase filtration, and heat balance. The proposed mathematical model incorporates the phase transition in the extended region, the evolving filtration properties of the surface soil layer, and the capillarity effects. Numerical experiments demonstrate that soil porosity and water saturation fully comply with the physical maximum principle. It is found that snow cover influences the formation of a layer with reduced permeability in the soil. It affects the soil absorption capacity and the distribution of surface and ground runoff during periods of intensive snowmelt. The proposed mathematical model can be used to estimate the volume of surface and subsurface runoff during intensive snowmelt.

Keywords: ground thermodynamics, inhomogeneous medium, phase transitions, multiphase filtration, porous medium, melting snow

Для цитирования: Сибин А.Н., Пекарская Т.А. Математическая модель фильтрации воды и воздуха в тающем снеге и поверхностном слое грунта // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 125–130. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-18](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-18).

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-71-00058), <https://rscf.ru/project/24-71-00058/>.

For citation: Sibir A.N., Pekarskaya T.A. Mathematical Model of Water and Air Filtration in Melting Snow and Surface Soil Layers. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 125–130. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-18](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-18).

Funding: this work is financially supported by the Russian Science Foundation (project code 24-71-00058), <https://rscf.ru/project/24-71-00058/>.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель фильтрации воды и воздуха в тающем снеге и поверхностном слое грунта, соприкасающимся с нижней кромкой снега. Промерзающий/протаивающий грунт и снег на его поверхности рассматриваются как сплошная среда, состоящая из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$), льда ($i = 3$) и грунта ($i = 4$). Частицы грунта и лед, находящийся в порах, образуют твердый пористый каркас в замерзшем грунте. Снег представляет собой пористую среду, каркас которой состоит из частиц льда. При промерзании/протаивании в снеге и грунте происходит движение воды и воздуха. Фильтрация воды и воздуха в пористом каркасе описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением сохранения энергии для пористой среды (процессы сублимации и испарения не учитываются).

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_4 \vec{u}_4) = 0; \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (2)$$

$$\phi s_i \vec{u}_i = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2; \quad (3)$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I. \quad (4)$$

Здесь $\vec{V} = \sum_{i=1}^4 \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i$, \vec{u}_i — скорость i -й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} — интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени ($I_{ji} = -I_{ij}$, $\sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0$); ϕ — пористость; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха; s_3, s_4 — объемные доли льда и грунта в пористом скелете ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = (1 - \phi) s_3$, $\alpha_4 = (1 - \phi) s_4$, $s_1 + s_2 = 1$,

$s_3 + s_4 = 1$); $K_0(\phi)$ — коэффициент проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} — фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i — динамические вязкости; p_i — давления фаз; p_c — капиллярное давление; \vec{g} — вектор ускорения силы тяжести; c_i — удельная теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; ν — удельная теплота плавления льда; λ_c — теплопроводность грунта/снега.

Для замыкания система (1)–(4) дополняется гипотезами $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, \dots, 4$. Интенсивность фазового перехода «вода — лед» есть заданная функция, зависящая от температуры, пористости и водонасыщенности $I_{13} = I(\phi, \theta, s_1)$. Испарением и сублимацией пренебрегаем $I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$. Частицы льда и грунта неподвижны $\vec{u}_3 = 0$, $\vec{u}_4 = 0$, структура льда и грунта как сплошных сред не уточняется [1]. Предполагается, что температуры во всех четырех фазах совпадают, т.е. $\theta_i = \theta$ ($i = 1, \dots, 4$).

Актуальность исследования фильтрации воды и воздуха в промерзающем/протаивающем снеге и грунте обусловлена необходимостью оценивать величины поверхностного и подземного стока, особенно в период весеннего половодья. Важность данной темы обусловлена необходимостью создания математических моделей, которые учитывают сложные взаимодействия между снегом и грунтом. Математическая модель (1)–(4) описывает фильтрацию воды и воздуха в тающем снеге и поверхностном слое грунта с учетом переменной пористости снежного покрова и грунта, фазовых переходов и температурного режима грунта. При таком подходе в ходе решения задачи фильтрации определяется изменяющийся во времени коэффициент проницаемости поверхностного слоя грунта, который зависит от содержания льда в пористом скелете грунта.

В работах [2–4] была изложена основа теории движения воды и воздуха в снежном покрове, однако они не учитывали важные аспекты, такие как переменная пористость снега. В работах [5–7] моделирование совместного движения воды и воздуха в тающем снеге происходит с учетом фазовых переходов и с учетом изменяющейся пористости в снеге, но взаимодействие снега и поверхностного слоя грунта не рассматривалось.

В работах [8, 9] исследована классическая задача Стефана для модели промерзания/протаивания грунта, не охватывающей процессы фильтрации в талых и мерзлых зонах. Важным аспектом является влияние капиллярных сил на движение воды и воздуха в грунте, но в моделях из работ [10, 11] не учитываются изменяющиеся фильтрационные свойства грунта при замерзании воды и уменьшении пористости. В работе [12] представлена модель, учитывающая изменяющиеся фильтрационные свойства грунта, но снег на его поверхности не рассматривался.

Зависимость для интенсивности фазового перехода «лед — вода», используемая в данной работе, была верифицирована для модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге в работе [6] и в промерзающем грунте в работе [12].

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \exp(\beta(\theta^- - \theta))(s - s_{cr})^\gamma, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2(\phi_g - \phi) \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $s \equiv s_1$ — водонасыщенность ($1 - s = s_2$); θ^+ — температура плавления льда; θ^- — температура замерзания воды; $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ — размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]=1/K, [\lambda_1]=кг/(м^3 \cdot c \cdot K), [\lambda_2]=кг/(м^3 \cdot c)$). Предполагается, что пористость талого грунта $\phi_g = const$, а в части расчетной области со снегом $\phi_g = 1$.

2. Численные эксперименты

Многочисленные наблюдения (см., например, [13]) показали, что при наличии снежного покрова, но не глубоком зимнем промерзании верхнего слоя грунта и быстром его оттаивании весной, состояние верхнего слоя грунта в совокупности с режимом температуры воздуха способно изменить процесс формирования максимумов и объемов весеннего стока. Впитывающая способность грунта зависит от типа грунта и доли льда в порах грунта. Математические модели, рассматривающие промерзающий/протаивающий грунт в период интенсивного снеготаяния без учета влияния снежного покрова, не могут адекватно оценить изменения впитывающей способности грунта, а следовательно, и объемы поверхностного и грунтового стока.

Рассмотрим задачу в одномерной постановке: ось y направлена вниз. Для моделирования снега и грунта использовались свойства, приведенные в работах [6, 12]. Расчетная область состоит из слоя снега 40 см и поверхностного слоя песчаного грунта 60 см. В начальный момент времени влажность снега и грунта равна 0.03, пористость 0.3. На верхней границе рассматриваемой области поддерживалась постоянная положительная температура 5 °C. Было проведено два численных эксперимента для изучения фильтрационных

свойств грунта и снега. В первом эксперименте на нижней границе поддерживалась постоянная отрицательная температура -5 °C, а во втором положительная 0.1 °C.

В численных расчетах использовался следующий набор модельных параметров: истинная плотность ρ_i^0 (в кг/м³), динамическая вязкость μ_i (в кг/(м · c)), удельная теплота плавления льда ν (в Дж/г), удельная теплоемкость фазы при постоянном объеме c_i (в Дж/(г · K)),

$$\rho_1^0 = 10^3, \quad \rho_2^0 = 1.292, \quad \rho_3^0 = 916.2, \quad \rho_4^0 = 1750,$$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}, \quad \mu_2 = 2 \cdot 10^{-5}, \quad \nu = 333.8,$$

$$c_1 = 4.18, \quad c_2 = 1.005, \quad c_3 = 2.06, \quad c_4 = 0.835.$$

На рисунках 1–4 приведено распределение водонасыщенности, пористости, доли льда в пористом скелете и температуры по глубине для двух численных экспериментов соответственно.

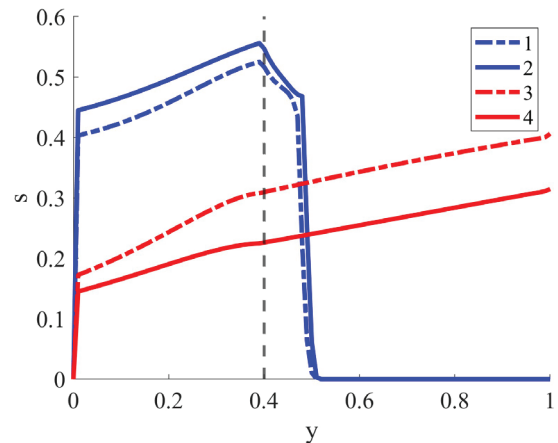


Рис. 1. Результаты численного моделирования распределения влажности по глубине: для слоя снега и промерзающего грунта в момент времени: 1 — 12 ч, 2 — 24 ч; для слоя снега и непромерзающего грунта в момент времени: 3 — 12 ч, 4 — 24 ч

На рисунке 1 результаты моделирования показывают, что с течением времени образуется слой воды в тающем снеге на поверхности мерзлого грунта. В талом грунте, наоборот, образовавшаяся в результате таяния снега вода фильтруется в нижние слои грунта, и влажность снега уменьшается. Образовавшийся слой толщиной 10 см с меньшей пористостью (см. рис. 2 и 3) в грунте для первого эксперимента затрудняет фильтрацию талых вод из снежного покрова в нижние слои грунта и способствует увеличению поверхностного стока в период интенсивного снеготаяния. На рисунке 2 для промерзающего грунта распределение пористости в момент времени 18 суток демонстрирует выполнение физического принципа максимума для пористости. Снег на поверхности грунта практически растаял, и пористость снега стремится

к единице. Рисунок 4 иллюстрирует распределение температуры в слоях снега и грунта.

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать вывод, что в условиях первого численного эксперимента практически весь объем талых вод попадет в реки и озера через поверхностный сток достаточно быстро и можно ожидать резкого поднятия уровня воды. В условиях второго численного эксперимента практически весь объем талых вод попадет в реки через подземный сток, и резкого поднятия уровня в реках не будет. Величина снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя грунта и, следовательно, на его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова в период снеготаяния имеет важное значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья. Особенно актуально использование математических моделей для сибирских регионов с небольшим количеством гидрологических постов и отсутствием полных рядов наблюдений на них.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверялись путем вычислительных экспериментов, применяя известное правило Рунге [14, с. 75]: достаточно провести три расчета на сетках с шагами по пространству $h_1 = h, h_2 = h/2, h_3 = h/4$ и шагом по времени $\tau_i = \lambda h_i, i = 1, 2, 3, h = 0.01, \lambda = 100$. Наблюдение ведется за водонасыщенностью s , пористостью, температурой, давлением. Экспериментальный порядок сходимости $R \approx 1$ и приближенно определяемая относительная погрешность $\varepsilon \approx 0.1\%$ для рассматриваемой задачи, что вполне приемлемо для практических расчетов.

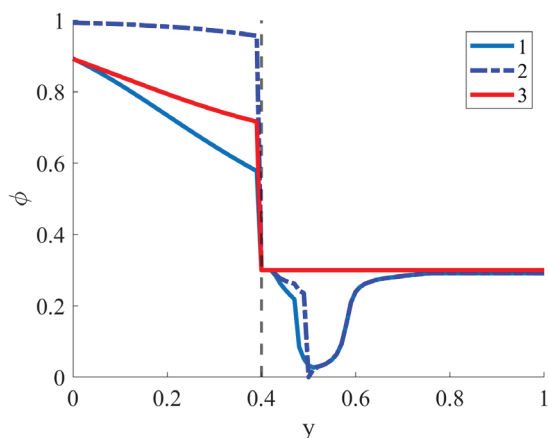


Рис. 2. Результаты численного моделирования распределения пористости по глубине: 1 — промерзший грунт; 2 — промерзший грунт через 18 суток; 3 — непромерзший грунт

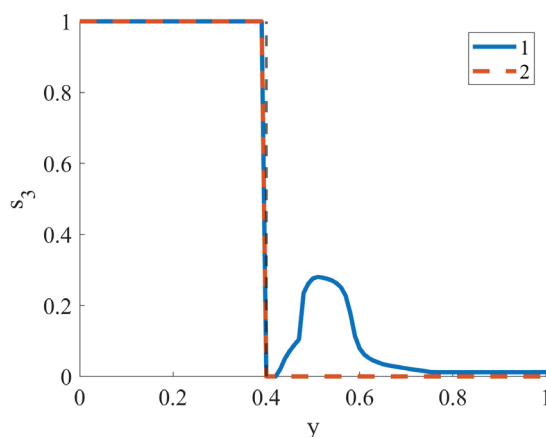


Рис. 3. Результаты численного моделирования распределения доли льда в пористом скелете: 1 — промерзший грунт; 2 — непромерзший грунт

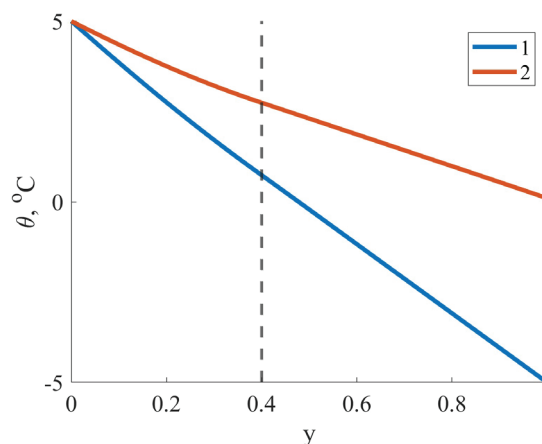


Рис. 4. Результаты численного моделирования распределения температуры по глубине: 1 — промерзший грунт; 2 — непромерзший грунт

Выводы

Предложена математическая модель фильтрации воды и воздуха в промерзающем/протаивающем грунте и снеге на поверхности грунта. Разработан автономный расчетный модуль на языке C++ для моделирования движения воды и воздуха в тающем снежном покрове в случаях промерзшего и непромерзшего поверхностного слоя грунта, соприкасающегося с нижней кромкой снега. Проведены численные эксперименты для одномерной задачи фильтрации в тающем снеге и поверхностном слое грунта. Сделана оценка поверхностного и грунтового стока талых вод при интенсивном снеготаянии. Численно проверен физический принцип максимума для пористости и водонасыщенности грунта и снега при полном протаивании верхнего слоя снега. Проведена проверка сходимости численно-

го решения на последовательности измельченных сеток.

Предложенная математическая модель позволяет учитывать изменяющиеся фильтрационные свойства грунта и моделировать интенсивность снеготаяния в зависимости от температуры возду-

ха и поверхностного слоя грунта. Показано существенное влияние температурного режима в грунте и снежного покрова на его поверхности на изменение пористости в верхнем слое грунта и его впитывающую способность.

Библиографический список

1. Колесников А.Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Доклады Академии наук СССР. 1952. Т. 82. № 6. С. 889-891.
2. Colbeck S.C. A Theory of Water Percolation in Snow // *Journal Glaciol.* 1972. Vol. 11. No 63. P. 369-385. <https://doi.org/10.3189/S0022143000022346>
3. Gray J.M.N.T. Water Movement in Wet Snow // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 1996. Vol. 354. No 1707. P. 465-500. <https://doi.org/10.1098/rsta.1996.0017>
4. Sellers S. Theory of Water Transport in Melting Snow with a Moving Surface // *Cold Regions Science and Technology.* 2000. Vol. 31. No 1. P. 47-57. [https://doi.org/10.1016/S0165-232X\(00\)00006-9](https://doi.org/10.1016/S0165-232X(00)00006-9)
5. Alekseeva S.V., Sazhenkov S.A. Numerical Analysis of a One-dimensional Model of a Melting-freezing Snowpack // *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2021. Vol. 8. No 4. P. 17-27. <https://doi.org/10.14529/jcem210403>
6. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // *Прикладная механика и техническая физика.* 2021. Т. 62. № 1. С. 109-118.
7. Сибин А.Н., Папин А.А. Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге // *Прикладная механика и техническая физика.* 2024. Т. 65. № 1. С. 58-69.
8. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука. 1997. 214 с.
9. Васильев В.И., Попов В.В. Численное решение задачи промерзания грунта // *Математическое моделирование.* 2008. Т. 20. № 7. С. 119-128.
10. Цыпкин Г.Г. Математическая модель промерзания ненасыщенного грунта при наличии капиллярных сил // *Математические заметки СВФУ.* 2017. Т. 24. № 2. С. 96-107.
11. Tsypkin G.G. Water — Ice Phase Transition in Unsaturated Soil in the Presence of Capillary Pressure // *Fluid Dynamics.* 2019. Vol. 5. No 4. P. 681-690.
12. Сибин А.Н., Пекарская Т.А. Исследование фазового перехода в промерзающем грунте // *Известия Алтайского государственного университета.* 2025. Т. 141. № 1. С. 135-140. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2025\)1-19](https://doi.org/10.14258/izvasu(2025)1-19)
13. Дмитриева В.А. Гидрологическая роль промерзания почвы в формировании стока весеннего снегового половодья в бассейне Верхнего Дона // *Вопросы степеведения.* 2023. № 1. С. 16-24.
14. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

References

1. Kolesnikov A.G. On Changing the Mathematical Formulation of the Problem of Soil Freezing. *Doklady Akademii Nauk SSSR.* 1952. Vol. 82. No 6. P. 889-891. (In Russ.)
2. Colbeck S.C. A Theory of Water Percolation in Snow. *Journal Glaciol.* 1972. Vol. 11. No 63. P. 369-385. <https://doi.org/10.3189/S0022143000022346>
3. Gray J.M.N.T. Water Movement in Wet Snow. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 1996. Vol. 354. No 1707. P. 465-500. <https://doi.org/10.1098/rsta.1996.0017>
4. Sellers S. Theory of Water Transport in Melting Snow with a Moving Surface. *Cold Regions Science and Technology.* 2000. Vol. 31. No 1. P. 47-57. [https://doi.org/10.1016/S0165-232X\(00\)00006-9](https://doi.org/10.1016/S0165-232X(00)00006-9)
5. Alekseeva S.V., Sazhenkov S.A. Numerical Analysis of a One-dimensional Model of a Melting-freezing Snowpack. *Journal of Computational and Engineering Mathematics.* 2021. Vol. 8. No 4. P. 17-27. <https://doi.org/10.14529/jcem210403>
6. Sibin A.N., Papin A.A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2021. Vol. 62. No 1. P. 109-118. (In Russ.)
7. Sibin A.N., Papin A.A. Modeling the Movement of a Soluble Impurity in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2024. Vol. 65. No 1. P. 58-69. (In Russ.)
8. Vasiliev V.I., Maksimov A.M., Petrov E.E., Tsypkin G.G. *Heat and Mass Transfer in Freezing and Thawing Soils.* Moscow: Nauka. 1997. 214 p. (In Russ.)
9. Vasiliev V.I., Popov V.V. Numerical Solution of a Problem of Freezing Ground. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2008. Vol. 20. No 7. P. 119-128. (In Russ.)
10. Tsypkin G.G. A Mathematical Model of Freezing of Unsaturated Soils in the Presence of Capillary Pressure. *Mathematical Notes of NEFU.* 2017. Vol. 24. No 2. P. 96-107. (In Russ.)
11. Tsypkin G.G. Water - Ice Phase Transition in Unsaturated Soil in the Presence of Capillary Pressure. *Fluid Dynamics.* 2019. Vol. 5. No 4. P. 681-690.

12. Sibin A.N., Pekarskaya T.A. Study of Phase Transition in Freezing Ground. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. Vol. 141. No 1. P. 135-140. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2025\)1-19](https://doi.org/10.14258/izvasu(2025)1-19)

13. Dmitrieva V.A. The Hydrological Role of Soil Freezing in the Formation of Spring Snow Flood Runoff in the Upper Don Basin. *Steppe Science*. 2023. No.1. P. 16-24. (In Russ.).

14. Kalitkin N.N. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka. 1978. 512 p. (In Russ.).

Информация об авторах

А.Н. Сибин, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;

Т.А. Пекарская, инженер, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

A.N. Sibin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Researcher, Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;

T.A. Pekarskaya, Engineer, Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia.