

Научная статья
УДК 517.9

[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-17](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-17)

Численный анализ температурного поля в пороупругой среде в процессе фильтрации флюида

Вардан Баландурович Погосян¹, Маргарита Андреевна Токарева²,
Эвелина Ивановна Леонова³

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
vardan.pogosyn@yandex.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, tma2505@gmail.com

³Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
e.leonova1@g.nsu.ru

Original article

Numerical Analysis of the Temperature Field in a Poroelastic Medium During Fluid Filtration

Vardan B. Pogosyan¹, Margarita A. Tokareva², Evelina I. Leonova³

¹Altai State University, Barnaul, Russia, vardan.pogosyn@yandex.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, tma2505@gmail.com

³Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia,
e.leonova1@g.nsu.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается модель фильтрации сжиженного газа в земной коре. Такие процессы описываются двухфазной средой, которая состоит из флюида и пористого скелета. Управляющими уравнениями модели являются уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения сохранения фазового импульса в форме закона Дарси, уравнение сохранения импульса всей системы, реологическое уравнение для пористости и уравнение теплового баланса. В полной постановке давление сжиженного газа зависит как от температуры, так и соответствующих плотностей, а коэффициенты вязкости и сжимаемости твердой породы зависят только от температуры. В модельном случае рассматривается задача двумерной нестационарной фильтрации газа в тонком пороупругом пласте. В работе также представлены результаты численного анализа эволюции температурного поля при различных физических параметрах сжиженного газа и скелета. Дополнительно учитывается скорость движения твердой фазы, оказывающая существенное влияние на характер распределения температуры.

Ключевые слова: фильтрация, температура, тонкий слой, пороупругость, пористость, численный анализ

Abstract. This paper studies a model of liquefied gas filtration in the Earth's crust. Such processes are described by a two-phase medium, which consists of a fluid and a porous skeleton. The governing equations of the model are the equations of mass conservation for each phase, the equations of phase momentum conservation in the form of Darcy's law, the equation of momentum conservation of the entire system, the rheological equation for porosity, and the equation of thermal balance. In the full formulation, the pressure of liquefied gas depends on both temperature and the corresponding densities, and the coefficients of viscosity and compressibility of solid rock depend only on temperature. In the model case, the problem of two-dimensional unsteady gas filtration in a thin poroelastic layer is considered. The paper also presents the results of a numerical analysis of the evolution of the temperature field for various physical parameters of liquefied gas and the skeleton. Additionally, the velocity of the solid phase that has a significant effect on the nature of the temperature distribution is considered.

Keywords: filtration, temperature, thin layer, poroelasticity, porosity, numerical analysis

Для цитирования: Погосян В.Б., Токарева М.А., Леонова Э.И. Численный анализ температурного поля в пороупругой среде в процессе фильтрации флюида // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 120–124. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-17](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-17).

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>.

Введение

Задачи фильтрации жидкостей в пороупругих средах возникают во множестве прикладных отраслей, таких как нефтегазодобыча, динамика снежно-ледового покрова, захоронение углекислого газа [1–6], а также находят применение в биологии и медицине (движение физиологических жидкостей в тканях, проблемы роста клеточной ткани и т.д.) [1, 2, 7].

Течение одной фазы (жидкости), вызванное уплотнением, через другую фазу (твердую фазу) получило большое внимание в геологических науках [2]. В области динамики магмы большая часть предыдущих работ была посвящена течению через вязкую пористую матрицу, однако некоторые работы указывают на важность вязкоупругой матрицы в распространении магматических трещин.

Актуальной задачей в настоящее время является проблема эффективного хранения углекислого газа (в сжиженном состоянии) в земной коре [3, 6, 8]. Процесс захоронения углекислого газа, как правило, моделируется с помощью уравнений фильтрации газа в пористых средах. На характерных глубинах захоронения учет пороупругости в процессе фильтрации играет существенную роль.

В настоящей работе численно исследуется модель двумерной нестационарной фильтрации жидкости в тонком пороупругом пласте. Аналитически модель исследовалась в работе [9]. В ней же получено решение системы в квадратурах.

1. Исходная постановка

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая фильтрацию сжиженного газа в пористом скелете в области $\Omega = (x, z) = [0, L] \times [0, H]$ [9].

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi\rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\rho_f \vec{v}_f) = 0, \quad (2)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{k(\phi)}{\mu_f(\theta)}(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\phi\left(\alpha(\theta)p_e + \beta(\theta)\frac{dp_e}{dt}\right), \quad (4)$$

For citation: Pogosyan V.B., Tokareva M.A., Leonova E.I. Numerical Analysis of the Temperature Field in a Poroelastic Medium During Fluid Filtration. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 120–124. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-17](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-17).

Funding: the study is supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>.

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\phi)\eta(\theta)\mathbf{D} \right), \quad (6)$$

Здесь ρ_s , ρ_f , \vec{v}_s , \vec{v}_f — истинные плотности и скорости твердой и жидкой фаз соответственно, ϕ — пористость, θ — температура среды ($\theta_s = \theta_f = \theta$), p_f , $\mu_f(\theta)$ — давление и динамическая вязкость жидкой фазы, \vec{g} — вектор ускорения силы тяжести, $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$ — заданные параметры среды, p_e — эффективное давление, p_{tot} , $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ — общие давление и плотность, $\eta(\theta)$ — вязкость пористого скелета, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)$ — тензор скоростей деформации.

Уравнение сохранения энергии берется в следующем виде [10]

$$\begin{aligned} & (\rho_f c_f \phi + \rho_s c_s (1-\phi)) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \\ & + (\rho_f c_f \phi \vec{v}_f + \rho_s c_s (1-\phi) \vec{v}_s) \nabla\theta = \nabla \cdot (\lambda_{tot}(\phi) \nabla\theta), \end{aligned} \quad (7)$$

где $c_f = const > 0$, $c_s = const > 0$ — теплоемкости жидкой и твердой фаз при постоянном объеме соответственно, λ_{tot} — теплопроводность среды в целом ($\lambda_{tot} = a_{tot} + b_{tot}\rho_{tot}^2$, $a_{tot} = const > 0$, $b_{tot} = const > 0$).

2. Обезразмеривание и предельный переход

Проведем обезразмеривание системы (1)–(7). Пусть \bar{x} , \bar{z} , \bar{t} безразмерные переменные, определяемые следующим образом

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^l \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] = [m]$, $[\tau_0] = [1/c]$, а l — фиксированный параметр.

Искомые функции в безразмерном виде:

$$p_f(t, x, z) = p\bar{p}_f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$$

$$p_s(t, x, z) = p\bar{p}_s(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z})$$

$$v_f^j(t, x, z) = v^j \bar{v}_f^j(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}), \quad j = 1, 2,$$

$$v_s^j(t, x, z) = v^j \bar{v}_s^j(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}), \quad j = 1, 2,$$

$$p_{tot}(t, x, z) = p\bar{p}_{tot}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$p_e(t, x, z) = p\bar{p}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$\theta(t, x, z) = \delta \bar{\theta}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}).$$

Величины v^j , p , δ являются положительными постоянными. Далее используется предположение, что $k(\phi) = k\phi^n$, $k = const$, $\eta(\theta) = \eta = const > 0$. Положим, $v^1 = \varepsilon^l \tau_0 L$, $v^2 = \varepsilon^l \tau_0 H$, $l = -2$, $\varepsilon \rightarrow 0$ [9]. Получим следующую безразмерную систему уравнений (черточки опущены)

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\vec{v}_s) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\vec{v}_f) = 0, \quad (9)$$

$$\vec{v}_f^1 = \vec{v}_s^1, \quad (10)$$

$$\frac{\tau_0 \mu L^2}{kp} \phi (\vec{v}_f^2 - \vec{v}_s^2) = -\phi^n \frac{\partial p_f}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_s^1}{\partial x} + \frac{\partial v_s^2}{\partial z} = -\beta p \frac{d(p_{tot} - p_f)}{dt}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^1}{\partial z} \right) = 0, \quad (13)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^1}{\partial z} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s} \phi + (1-\phi) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s} \phi v_f^1 + (1-\phi) v_s^1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s} \phi v_f^2 + (1-\phi) v_s^2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{L^2 \tau_0 c_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{a}{\rho_s} + b \rho_s \left(\phi \frac{\rho_f}{\rho_s} + 1 - \phi \right)^2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Дополним данную систему уравнений следующими начально-краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s^2}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \quad v_s^2 \Big|_{z=H} = C = const, \\ v_f^1 \Big|_{z=H} &= B = const, \quad \frac{\partial v_f^1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \\ \phi \Big|_{t=0} &= \phi^0(x, z), \quad \frac{\partial p_f}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \\ p_f \Big|_{t=0} &= p_f^0(x, z), \quad p_s \Big|_{t=0} = p_s^0(x, z), \\ p_f \Big|_{z=0} &= p_0(x, t), \quad \theta \Big|_{t=0} = \theta^0(x, z), \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0, z=H} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из описанных условий получаем, что $v_f^1 = v_s^1 = B$, $v_f^2 = v_s^2 = C$, $p_f = p_0(x, t)$, $p_s = p_0(x, t) - p_f^0(x - Bt, z - Ct) + p_s^0(x - Bt, z - Ct)$, $\phi = \phi^0 = \phi^0(x - Bt, z - Ct)$, а уравнение температуры принимает следующий вид

$$\begin{aligned} R(\phi^0) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + B \frac{\partial \theta}{\partial x} + C \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) &= \frac{1}{L^2 \tau_0 c_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{a}{\rho_s} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b \rho_s \left(\phi^0 \frac{\rho_f}{\rho_s} + 1 - \phi^0 \right)^2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $R(\phi^0) = \frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s} \phi^0 + (1 - \phi^0)$.

3. Численный анализ

Исследуем численно распределение температурного поля, описываемого уравнением (17). Значения физических параметров, используемых при моделировании, выбираются следующими: $L = 5000$ м, $\rho_s = 2820$ кг/м³, $\rho_f = 800$ кг/м³, $c_s = 1000$ Дж/К, $c_f = 0.3$ Дж/К. $a = 0.9$, $b = 0.0006$, $\tau_0 = 2592000$ 1/с. Значения скоростей твердой фазы выбирались в отрезке $B, C \in [0.1, 0.5]$, чтобы проанализировать влияние на итоговое распределение температуры. Для поиска решения используется схема переменных направлений.

Предположим наличие области повышенной температуры и уплотнение почвы на глубине. Начальные распределения температуры и пористости для такого случая возьмем в следующем виде

$$\phi^0(x, z) = 0.1 + 0.2e^{-5((x-0.5)^2 + (z-1)^2)},$$

$$\theta^0(x, z) = 1 + e^{-10(x^2 + z^2)}.$$

Распределение поля температуры на последнем временном слое для описанного случая представлено на рисунке 1.

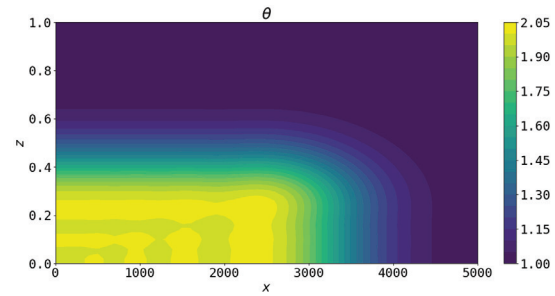


Рис. 1. Распределение поля температуры в конце моделирования

Наибольшее влияние на эволюцию температурного поля оказывают скорости смещения твердой фазы (рис. 2–3), пористость при этом вносит несущественный вклад.

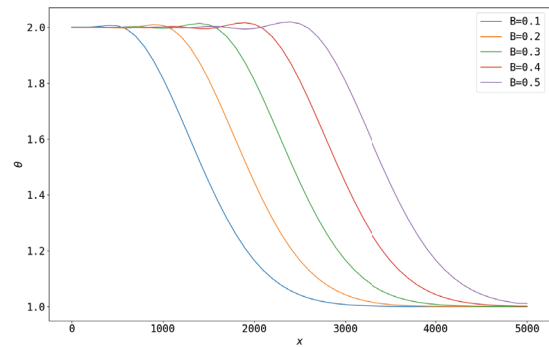


Рис. 2. Зависимость распределения температуры от скорости твердой фазы, $z = 0$

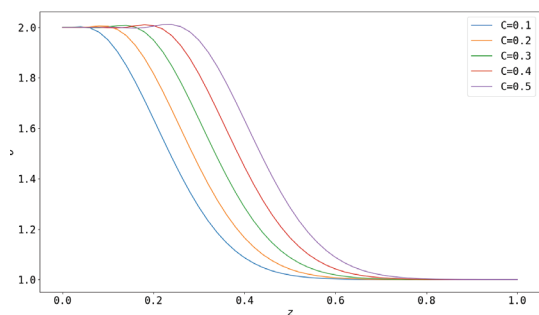


Рис. 3. Зависимость распределения температуры от скорости твердой фазы, $x = 0$

Заключение

В работе описана модель неизоэтермической фильтрации флюида в пороупругой среде в тонком слое. Дана модельная постановка начально-краевой задачи. В рамках исследования разработан численный алгоритм для моделирования описанного процесса. Проведено численное моделирование для случаев с различной скоростью смещения твердой фазы. По результатам выявлено, что пористость не оказывает существенного влияния на процесс фильтрации в описанном модельном случае.

Библиографический список

- Ivanov M.I., Kremer I.A. Laevsky Y.M. On Non-Uniqueness of Pressures in Problems of Fluid Filtration in Fractured-Porous Media // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023. Vol. 425 Art. 115052. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115052>
- Head M., Hickey J., Thompson J., Gottsmann J., Fournier N. Rheological Controls on Magma Reservoir Failure in a Thermo-Viscoelastic Crust // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2022. Vol. 127 No 7. <https://doi.org/10.1029/2021JB023439>
- Preziosi L., Farina A. On Darcy's Law for Growing Porous Media // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2001. Vol. 37. P. 485–491. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00022-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00022-1)
- Вирц Р.А. Осесимметричная задача фильтрации газа в пороупругой среде // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2024. Т. 17. № 4. С. 496–508. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.4.40>
- Vafaie A., Cama J., Soler J.M., Kivi I.R., Vilarrasa V. Chemo-Hydro-Mechanical Effects of CO₂ Injection on Reservoir and Seal Rocks: A Review on Laboratory Experiments // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2023. Vol. 178. P. 113270. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2023.113270>
- Anthony E., Vedanti N. 2D Parallel Simulation of Seismic Wave Propagation in Poroelastic Media to Monitor a CO₂ Geological Sequestration Process // *Journal of African Earth Sciences*. 2024. Vol. 212. P. 105194. <https://doi.org/10.1016/j.jafrearsci.2024.105194>
- Flemisch B., Nordbotten J.M., Fern M., et al. The FluidFlow Validation Benchmark Study for the Storage of CO₂ // *Transport in Porous Media*. 2023. P. 1–48. <https://doi.org/10.1007/s11242-023-01977-7>
- Myshakin E.M., Haeri F., Moore J. et al. Numerical Simulations of Carbon Dioxide Storage Efficiency in Heterogeneous Reservoir Models // *Geofluids*. 2023. Vol. 2023. P. 1–16. <https://doi.org/10.1155/2023/5089508>
- Tokareva M.A., Papin A.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow-ice Cover // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2021. Vol. 14. No 1. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-47-56>
- Сибин А.Н., Папин А.А. Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге // *Прикладная механика и техническая физика*. 2024. Т. 65. № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315315>

References

- Ivanov M.I., Kremer I.A. Laevsky Y.M. On Non-Uniqueness of Pressures in Problems of Fluid Filtration in Fractured-Porous Media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023. Vol. 425. Art. 115052. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.115052>
- Head M., Hickey J., Thompson J., Gottsmann J., Fournier N. Rheological Controls on Magma Reservoir Failure in a Thermo-Viscoelastic Crust. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2022. Vol. 127 No 7. <https://doi.org/10.1029/2021JB023439>
- Preziosi L., Farina A. On Darcy's Law for Growing Porous Media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2001. Vol. 37. P. 485–491. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00022-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00022-1)
- Virts R.A. An Axisymmetric Problem of Gas Filtration in a Poroelastic Medium. *Computational Continuum Mechanics*. 2024. Vol. 17. No 4. С. 496–508. (In Russ.). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.4.40>
- Vafaie A., Cama J., Soler J.M., Kivi I.R., Vilarrasa V. Chemo-Hydro-Mechanical Effects of CO₂ Injection on Reservoir and Seal Rocks: A Review on Laboratory Experiments. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2023. Vol. 178. P. 113270. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2023.113270>

6. Anthony E., Vedanti N. 2D Parallel Simulation of Seismic Wave Propagation in Poroelastic Media to Monitor a CO₂ Geological Sequestration Process. *Journal of African Earth Sciences*. 2024. Vol. 212. P. 105194. <https://doi.org/10.1016/j.jafrearsci.2024.105194>
7. Flemisch B., Nordbotten J.M., Fern M., et al. The Fluid-Flower Validation Benchmark Study for the Storage of CO₂. *Transport in Porous Media*. 2023. P. 1–48. <https://doi.org/10.1007/s11242-023-01977-7>
8. Myshakin E.M., Haeri F., Moore J., et al. Numerical Simulations of Carbon Dioxide Storage Efficiency in Heterogeneous Reservoir Models. *Geofluids*. 2023. Vol. 2023. P. 1–16. <https://doi.org/10.1155/2023/5089508>
9. Tokareva M.A., Papin A.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow-ice Cover. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2021. Vol. 14. No 1. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-47-56>
10. Sibin A.N., Papin A.A. Modeling the Movement of a Soluble Impurity in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024. Vol. 65. No 1. P. 58–69. (In Russ.). <https://doi.org/10.15372/PMTF202315315>

Информация об авторах

В.Б. Погосян, преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

М.А. Токарева, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Э.И. Леонова, аспирант кафедры теоретической механики, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; младший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.

Information about the authors

V.B. Pogosyan, Lecturer of the Department of Differential Equations, Altai State University, Barnaul, Russia;

M.A. Tokareva, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Altai State University, Barnaul, Russia;

E.I. Leonova, Postgraduate Student of the Department of Theoretical Mechanics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; Junior Researcher, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia.