

Научная статья
УДК 517.95

[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-16](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-16)

Приближения Галеркина задачи для одномерных баротропных уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред

Владимир Александрович Макаров¹, Дмитрий Алексеевич Прокудин²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, v.makarov2@g.nsu.ru

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, prokudin@hydro.nsc.ru

Original article

Galerkin Approximations of the Problem for One-Dimensional Barotropic Equations of Compressible Viscous Multicomponent Media Dynamic

Vladimir A. Makarov¹, Dmitriy A. Prokudin²

¹Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, v.makarov2@g.nsu.ru

²Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia; Altai State University, Barnaul, Russia, prokudin@hydro.nsc.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для одномерной модели баротропной динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред, описываемой системой уравнений, представляющих собой обобщение уравнений Навье — Стокса. В отличие от уравнений Навье — Стокса, где вязкость является скалярной величиной, в многокомпонентном случае вязкости образуют матрицу вязкостей, отражающую составную структуру тензоров вязких напряжений. Это приводит к присутствию в исследуемых уравнениях старших производных от скоростей всех компонент, что существенно усложняет математический анализ. Диагональные элементы матрицы вязкостей отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, тогда как недиагональные элементы отвечают за межкомпонентное вязкое взаимодействие. Такая структура исключает возможность непосредственного переноса существующих теоретических результатов, полученных для уравнений Навье — Стокса, на многокомпонентные модели. В случае диагональной матрицы вязкостей компоненты связаны лишь через младшие члены, что значительно упрощает ситуацию. Настоящее исследование посвящено обоснованию существования

Abstract. This paper considers an initial-boundary value problem for a one-dimensional model of barotropic dynamics of compressible viscous multicomponent media described by a system of equations that are a generalization of the Navier — Stokes equations. Unlike the Navier — Stokes equations, where viscosity is a scalar quantity, the viscosities of a multicomponent case form a viscosity matrix that reflects the composite structure of viscous stress tensors. This leads to the appearance of senior derivatives of the velocities of all components in the equations under study and significantly complicates the mathematical analysis. The diagonal elements of the viscosity matrix are responsible for viscous friction within each component, while the off-diagonal elements are responsible for the intercomponent viscous interaction. Such a structure excludes the possibility of directly extrapolating the existing theoretical results obtained for the Navier — Stokes equations to multicomponent models. The case of a diagonal viscosity matrix significantly simplifies the situation because the components are related only through junior terms. This study is devoted to substantiating the existence of Galerkin approximations of the initial-boundary value problem in a more general case with the non-diagonal structure of the viscosity matrix.

галеркинских аппроксимаций начально-краевой задачи в более общем случае, когда матрица вязкостей обладает недиагональной структурой.

Ключевые слова: сжимаемая вязкая среда, многокомпонентные течения, приближения Галеркина

Для цитирования: Макаров В.А., Прокудин Д.А. Приближения Галеркина задачи для одномерных баротропных уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 114–119. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-16](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-16).

Финансирование: работа поддержана в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003).

1. Постановка задачи

В замкнутой области $\bar{Q}_T = [0, T] \times [0, 1]$, $T = \text{const} > 0$ требуется определить плотность $\rho(t, x) > 0$ среды и скорости $u_i(t, x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \dots, N$, которые удовлетворяют следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad (3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$ — средневзвешенная скорость, $\alpha_j = \text{const} > 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$; $P(\rho)$ — давление в среде, которое определяется плотностью ρ , т. е. функция $P \in C^1(0, \infty)$ предполагается заданной, причем $P(\rho) > 0$, $P'(\rho) > 0$; ν_{ij} — коэффициенты вязкостей, образующие симметричную положительно определенную матрицу \mathbf{N} ; $\rho_0(x)$, $u_{0i}(x)$ — известные функции начальных данных.

Особенностью исследуемых уравнений является наличие в уравнениях (2) старших производных от скоростей всех компонент ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений [1].

Keywords: compressible viscous medium, multicomponent flows, Galerkin approximations

For citation: Makarov V.A., Prokudin D.A. Galerkin Approximations of the Problem for One-Dimensional Barotropic Equations of Compressible Viscous Multicomponent Media Dynamics. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 114–119. (In Russ.). [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2026\)1-16](https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-16).

Funding: the work is supported within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project: «Modern models of hydrodynamics for the problems of nature management, industrial systems and polar mechanics», project No: FZMW-2024-0003).

Это приводит к тому, что теоретические результаты, известные для одномерных уравнений Навье — Стокса, не переносятся непосредственно на рассматриваемые в данной работе уравнения динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред. Вопросы существования и единственности одномерных уравнений Навье — Стокса исследовались в работах [2–7]. Однозначная разрешимость и асимптотическое поведение решения рассматриваемых одномерных уравнений сжимаемых вязких многокомпонентных сред в политропном случае изучались в работах [8–10]. Аналогичным вопросам для смежных одномерных моделей многокомпонентных сред посвящены работы [11–17].

Основной результат данной работы заключается в доказательстве разрешимости задачи, полученной из задачи (1)–(4) применением метода Галеркина по пространственной переменной в уравнениях (2) и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\rho_0 \in W_2^1(0, 1)$, $\rho_0 > 0$, $u_{0i} \in W_2^1(0, 1)$, $i = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется число $\tau_0 > 0$ и функции $\rho \in L_\infty(0, \tau_0; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, \tau_0; L_2(0, 1))$, $\rho > 0$, $\sigma_{is} \in C^1[0, \tau_0]$, $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$, такие, что для всех $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$ выполнены следующие равенства:

$$\sigma_{is}(0) = \sigma_{0is} = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi s x) dx, \quad (5)$$

$$u_i = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(t) \sin(\pi k x), \quad v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (7)$$

$$\int_0^1 \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) \sin(\pi s x) dx = 0. \quad (8)$$

Доказательство теоремы проводится с использованием метода неподвижной точки [5] в следующем разделе.

2. Существование галеркинских приближений

Произвольным образом зафиксируем $\tau_0 > 0$. Определим множество

$$V = \left\{ \sigma \in (C[0, \tau_0])^{nN} : \sigma(0) = \sigma_0, \|\sigma\|_{(C[0, \tau_0])^{nN}} \leq c \right\},$$

где $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{in})$, $\sigma_0 = (\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$, $\sigma_{0i} = (\sigma_{0i1}, \dots, \sigma_{0in})$,

$$c^2 = \frac{\sup_{x \in [0,1]} \rho_0}{\inf_{x \in [0,1]} \rho_0} e \|\sigma_0\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 + 1.$$

Построим оператор $\Lambda : V \rightarrow (C[0, \tau_0])^{nN}$, $\Lambda(\sigma) = \theta$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{in})$ по следующему набору правил. Сначала найдем функцию $\rho \in L_\infty(0, \tau_0; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, \tau_0; L_2(0, 1))$, $\rho > 0$ как решение задачи (7), где v и u_j задаются по формулам (6). При этом справедливы неравенства

$$\left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) e^{-\int_0^t \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| d\tau} \leq \rho \leq \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) e^{\int_0^t \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| d\tau},$$

которые в силу включения $\sigma \in V$ дают оценки

$$\left(\inf_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) e^{-\pi n^2 c N t} \leq \rho \leq \left(\sup_{x \in [0,1]} \rho_0 \right) e^{\pi n^2 c N t}. \quad (9)$$

Затем определим θ как решение следующей задачи Коши для системы nN линейных обыкновен-

ных дифференциальных уравнений первого порядка ($i = 1, \dots, N, s = 1, \dots, n$):

$$\int_0^1 \left(\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \right) \sin(\pi s x) dx = 0, \quad (10)$$

$$\theta(0) = \sigma_0, \quad (11)$$

где $U_i = \sum_{k=1}^n \theta_{ik}(t) \sin(\pi k x)$. Так как для матрицы

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(t) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}(t) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{B}(t) = \left\{ \int_0^1 \rho \sin(\pi k x) \sin(\pi s x) dx \right\}_{k,s=1}^n$,

выполнено $\det \mathbf{A}(t) \neq 0$, то система (10) может быть разрешена относительно производных, что обосновывает существование $\theta \in (C^1[0, \tau_0])^{nN}$. Таким образом, для произвольного $\tau_0 > 0$ определен оператор $\Lambda : V \rightarrow (C[0, \tau_0])^{nN}$, $\Lambda(\sigma) = \theta$. Отметим, что если оператор Λ имеет неподвижную точку, то она вместе с соответствующей функцией ρ будет решением задачи (5)-(8).

Покажем, что при достаточно малом $\tau_0 \in (0, T]$ оператор Λ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки, а именно, что V — выпуклое замкнутое ограниченное множество (в нашем случае это очевидно), $\Lambda : V \rightarrow V$ и Λ — вполне непрерывный оператор.

Установим сначала, что $\Lambda(V) \subset V$. Умножим (10) на θ_{is} , просуммируем по i, s , получим, привлекая (7) и (9), что

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_1, \quad (12)$$

где C_1 — положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (5)-(8) (условимся через $C_k, k \in \mathbb{N}$ обозначать положительные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (5)-(8)). Из (12), в свою очередь, снова используя (9), получаем неравенство

$$\|\theta\|_{(C[0, \tau_0])^{nN}}^2 \leq \frac{\sup_{x \in [0,1]} \rho_0}{\inf_{x \in [0,1]} \rho_0} e^{\pi n^2 c N \tau_0} \|\sigma_0\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 + \frac{2C_1 e^{\pi n^2 c N \tau_0}}{\inf_{x \in [0,1]} \rho_0} \tau_0.$$

Поэтому, выбирая

$$\tau_0 = \min \left\{ T, \frac{1}{\pi n^2 c N}, \frac{\inf_{x \in [0,1]} \rho_0}{2C_1 e} \right\},$$

приходим к оценке

$$\|\theta\|_{(C[0,\tau_0])^{nN}} \leq c. \quad (13)$$

Таким образом, для достаточно малого τ_0 оператор Λ отображает множество V в себя.

Докажем теперь компактность оператора Λ .

Умножим (10) на $\frac{d\theta_{is}}{dt}$, просуммируем по i, s , получим равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx &= - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx - \\ &- \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} dx, \end{aligned}$$

откуда с учетом (9) и (13) следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_2. \quad (14)$$

Поэтому $\theta \in (W_1^1(0, \tau_0))^{nN}$. Таким образом, оператор Λ является компактным оператором.

Установим далее непрерывность оператора Λ .

Пусть $\sigma^{(1,2)} \in V$, $\theta^{(1,2)} = \Lambda(\sigma^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^{(1,2)} \sin(\pi k x)$, $U_i^{(1,2)} = \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^{(1,2)} \sin(\pi k x)$.

Пусть $\rho^{(1,2)}$ — решения задач (7), где вместо v стоят $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим

$\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$. Продифференцируем первое равенство в (7) для $\rho^{(2)}$ по x и умножим результат на $\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x}$, используя неравенство Гронуолла и второе равенство в (7) для $\rho^{(2)}$, получим оценку

$$\left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_3. \quad (15)$$

Из (7) для величин $\rho^{(1,2)}$ следуют соотношения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

Умножим первое равенство в (16) на ρ и проинтегрируем по x , получим с помощью оценок (9), (15), неравенства Гронуолла и второго равенства в (16), что

$$\int_0^1 \rho^2 dx \leq C_4 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau. \quad (17)$$

Умножим (10) для $U_i^{(1,2)}$ на θ_{is} , просуммируем по i, s , вычтем одно равенство из другого и проинтегрируем по t , получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_j}{\partial x} dx d\tau &= \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^t \int_0^1 (P(\rho^{(1)}) - P(\rho^{(2)})) \frac{\partial U_i}{\partial x} dx d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} dx d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho^{(1)} v U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \rho v^{(2)} U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau. \quad (18) \end{aligned}$$

Из соотношения (18) с учетом (9), (13), (14), (17) и теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует оценка

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_5 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 (U_i^2 + u_i^2) dx d\tau,$$

из которой, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_6 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 u_i^2 dx d\tau,$$

а отсюда — оценку

$$\begin{aligned} \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{(C[0,\tau_0])^{nN}} &\leq \\ &\leq C_7 \|\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}\|_{(C[0,\tau_0])^{nN}}, \end{aligned}$$

которая обосновывает непрерывность оператора Λ .

Поскольку выполнены все условия теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки, то в V существует неподвижная точка σ оператора Λ , которая вместе с соответствующей функцией ρ определяет решение задачи (5)–(8). Теорема доказана.

Заключение

Для системы дифференциальных уравнений баротропной динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред с недиагональной, симметричной и положительно определенной матрицей вязкостей поставлена начально-краевая задача и проведено обоснование существования галеркинских приближений данной задачи.

Библиографический список

1. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Viscous Compressible Homogeneous Multi-Fluids with Multiple Velocities: Barotropic Existence Theory // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 388–397. <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.031>
2. Злотник А.А., Нгуен Ж.Б. Свойства и асимптотическое поведение решений одной задачи одномерного движения вязкого баротропного газа // Математические заметки. 1994. Т. 55. № 5. С. 51–68.
3. Yanagi S. Global Existence for One-Dimensional Motion of Non-Isentropic Viscous Fluids // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1993. Vol. 16. No 9. P. 609–624. <https://doi.org/10.1002/mma.1670160902>.
4. Злотник А.А. Об уравнениях одномерного движения вязкого баротропного газа при наличии массовой силы // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 5. С. 62–79.
5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
6. Злотник А.А., Амосов А.А. Обобщенные решения «в целом» уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299. № 6. С. 1303–1307.
7. Шелухин В.В. Периодические течения вязкого газа // Динамика сплошной среды. 1979. Т. 42. С. 80–102.
8. Прокудин Д.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 568–585. <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.049>
9. Prokudin D.A. Global Solvability of the Initial Boundary Value Problem for a Model System of One-Dimensional Equations of Polytrropic Flows of Viscous Compressible Fluid Mixtures // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. No 012076. P. 1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012076>
10. Прокудин Д.А. О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред // Сибирские электронные математические известия. 2021. Т. 18. № 2. С. 1278–1285. <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.097>
11. Li S. On One-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations for a Reacting Mixture in Unbounded Domains // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2017. Vol. 68. No 106. P. 1–24. <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0851-3>
12. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Математические заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 170–185. <https://doi.org/10.4213/mzm10346>
13. Bresch D., Huang X., Li J. Global Weak Solutions to One-Dimensional Non-Conservative Viscous Compressible Two-Phase System // Communications in Mathematical Physics. 2012. Vol. 309. P. 737–755. <https://doi.org/10.1007/s00220-011-1379-6>.
14. Папин А.А. Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 4. С. 636–640. <https://doi.org/10.4213/mzm8461>
15. Злотник А.А. Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных // Математические заметки. 2004. Т. 75. № 2. С. 307–310. <https://doi.org/10.4213/mzm546>
16. Злотник А.А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Математические заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 307–312.
17. Петров А.Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. 1982. Т. 56. С. 105–121.

References

1. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Viscous Compressible Homogeneous Multi-Fluids with Multiple Velocities: Barotropic Existence Theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017. Vol. 14. P. 388–397. <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.031>
2. Zlotnik A.A., Nguen Z.B. Properties and Asymptotic Behavior of Solutions of Some Problems of One-Dimensional Motion of a Viscous Barotropic Gas. *Mathematical Notes*. 1994. Vol. 55. No 5. P. 471–482. (In Russ.). <https://doi.org/10.1007/BF02110374>
3. Yanagi S. Global Existence for One-Dimensional Motion of Non-Isentropic Viscous Fluids. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1993. Vol. 16. No 9. P. 609–624. <https://doi.org/10.1002/mma.1670160902>
4. Zlotnik A.A. On Equations for One-Dimensional Motion of a Viscous Barotropic Gas in the Presence of a Body Force. *Siberian Mathematical Journal*. 1992. Vol. 33. No 5. P. 798–815. (In Russ.). <https://doi.org/10.1007/BF00970988>.
5. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1990. 309 p. (In Russ.).
6. Zlotnik A.A., Amosov A.A. Generalized Solutions «in the Large» of Equations of the One-Dimensional Motion of a Viscous Barotropic Gas. *Doklady Mathematics*. 1988. Vol. 37. No 2. P. 554–558. (In Russ.).

7. Shelukhin V.V. Periodic Flows of Viscous Gas. *Dynamics of Continuous Medium (Din. Splosh. Sredy)*. 1979. Vol. 42. P. 80–102. (In Russ.).
8. Prokudin D.A. Unique Solvability of Initial-Boundary Value Problem for a Model System of Equations for the Polyropic Motion of a Mixture of Viscous Compressible Fluids. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017. Vol. 14. P. 568–585. (In Russ.). <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.049>.
9. Prokudin D.A. Global Solvability of the Initial Boundary Value Problem for a Model System of One-Dimensional Equations of Polyropic Flows of Viscous Compressible Fluid Mixtures. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 894. No 012076. P. 1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012076>
10. Prokudin D.A. On the Stabilization of Solutions to the Initial-Boundary Value Problem for the Equations of Dynamics of Viscous Compressible Multicomponent Media. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. Vol. 18. No 2. P. 1278–1285. (In Russ.). <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.097>.
11. Li S. On One-Dimensional Compressible Navier–Stokes Equations for a Reacting Mixture in Unbounded Domains. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. 2017. Vol. 68. No 106. P. 1–24. <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0851-3>.
12. Akhmerova I.G., Papin A.A. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture. *Mathematical Notes*. 2014. Vol. 96. No 2. P. 166–179. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0001434614070177>
13. Bresch D., Huang X., Li J. Global Weak Solutions to One-Dimensional Non-Conservative Viscous Compressible Two-Phase System. *Communications in Mathematical Physics*. 2012. Vol. 309. P. 737–755. <https://doi.org/10.1007/s00220-011-1379-6>
14. Papin A.A. On the Uniqueness of the Solutions of an Initial Boundary-Value Problem for the System of a Heat-Conducting Two-Phase Mixture. *Mathematical Notes*. 2010. Vol. 87. No 4. P. 594–598. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0001434610030405>
15. Zlotnik A.A. Weak Solutions to the Equations of Motion of Viscous Compressible Reacting Binary Mixtures: Uniqueness and Lipschitz-Continuous Dependence on Data. *Mathematical Notes*. 2004. Vol. 75. No 2. P. 278–283. (In Russ.). <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000015045.35518.a4>
16. Zlotnik A.A. Uniform Estimates and Stabilization of Solutions to Equations of One-Dimensional Motion of a Multicomponent Barotropic Mixture. *Mathematical Notes*. 1995. Vol. 58. No 2. P. 885–889. (In Russ.). <https://doi.org/10.1007/BF02304112>.
17. Petrov A.N. Well-Posedness of Initial-Boundary Value Problems for One-Dimensional Equations of Mutually Penetrating Flows of Ideal Gases. *Dynamics of Continuous Medium (Din. Splosh. Sredy)*. 1982. Vol. 56. P. 105–121. (In Russ.).

Информация об авторах

В.А. Макаров, студент, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;

Д.А. Прокудин, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; главный научный сотрудник, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

V.A. Makarov, Undergraduate Student, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;

D.A. Prokudin, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia; Chief Researcher, Altai State University, Barnaul, Russia.