Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 108–113.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 1 (147). P. 108–113.

Научная статья
УДК 94(47):514.763
https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-15

Однородные эрмитовы пространства и субтвисторные структуры

Евгений Сергеевич Корнев

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, q148@mail.ru

Original article

Homogeneous Hermitian Spaces and Subtwistor Structures

Evgeniy S. Kornev

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, q148@mail.ru

Аннотация. В данной работе приведены ключевые результаты, которые позволяют получать однородные эрмитовы и кэлеровы пространства с помощью субтвисторных структур. Субтвисторная структура связана с вырожденной кососимметричной 2-формой и римановой метрикой на многообразии. Такая структура является обобщением классических конструкций: твисторной структуры, симплектической структуры и кэлеровой структуры для многообразий произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Доказано, что субтвисторные структуры с нулевым тензором кручения на группах Ли задают инвариантную кэлерову или эрмитову структуру на однородном пространстве, которое порождается этой субтвисторной структурой. Описана важная конструкция, позволяющая получить из левоинвариантной кососимметричной вырожденной 2-формы, радикал которой есть идеал в алгебре Ли, на полупростой компактной группе Ли произвольной размерности инвариантную эрмитову структуру на однородном пространстве, полученном как фактор группы Ли по подгруппе радикала.

Ключевые слова: субтвисторная структура, кэлерово многообразие, эрмитово многообразие, радикал внешней 2-формы, вырожденная 2-форма

Abstract. This paper presents the main results that allow obtaining Hermitian and Kahler homogeneous spaces using subtwistor structures. A subtwistor structure is related to degenerate skew-symmetric 2-form and Riemannian metrics on a manifold. Such a structure is a generalized classic construction of a twistor structure, a symplectic structure, and a Kahler structure for manifolds of arbitrary dimensions with a degenerate skew-symmetric 2-form. It is proved that a subtwistor structure with a vanishing torsion tensor on a Lie group produces the invariant Hermitian structure or Kahler structure on homogeneous space, which is generated by this subtwistor structure. There is a description of an important construction that allows obtaining an invariant Hermitian structure on a homogeneous space of a Lie group of arbitrary dimensions from a left-invariant skew-symmetric degenerate 2-form being a radical that is ideal in a Lie algebra. The mentioned homogeneous space is obtained as a quotient of this Lie group over the radical subgroup.

Keywords: Subtwistor structure, Kahler submanifold, Hermitian structure, Skew-symmetric 2-form radical, Degenerate 2-form

Для цитирования: Корнев Е.С. Однородные эрмитовы пространства и субтвисторные структуры // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 108–113. https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-15.

For citation: Kornev E.S. Homogeneous Hermitian Spaces and Subtwistor Structures. *Izvestiya of Altai State University.* 2026. No 1 (147). P. 108–113. (In Russ.). https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-15.

Введение

В теории симплектических и комплексных многообразий обычно используются невырожденные кососимметричные 2-формы, а в теории контактных многообразий 1-форма с максимально неголономным ядром. В первом случае размерность многообразия должна быть только четной, а во втором только нечетной. В [1] было введено понятие субкомплексной и субкэлеровой структуры, которые обобщают классические комплексные, твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Для субкомплексной и субкэлеровой структуры четность размерности многообразия не играет роли. Также в [1] было дано обобщение класической твисторной структуры на многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Такое обобщение называется субтвисторной структурой. В [2] было введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, что субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения всегда индуцирует кэлерову структуру на некотором интегральном подмногообразии. Такая структура называется субкэлеровой структурой. В [3] изучен вопрос, когда левоинвариантная вырожденная замкнутая кососимметричная 2-форма Ω на группе Ли G задает инвариантную симплектическую структуру на однородном пространстве G/H, где H подгруппа, порожденная радикалом 2-формы Ω. В данной работе эти идеи обобщены и сведены вместе, что позволяет описать способ получения с помощью субтвисторных структур на группах Ли инвариантные эрмитовы и кэлеровы однородные пространства. Ключевым результатом здесь является способ получения однородных эрмитовых и кэлеровых пространств из групп Ли, допускающих левоинвариантную субтвисторную структуру. В частности, левоинвариантная субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым кручением порождает однородное кэлерово пространство (следствие 10), а биинвариантная кососимметричная 2-форма Ω на вещественной группе Ли G такая, что ее радикал есть нетривиальная подалгебра в алгебре Ли группы G, порождает эрмитово, но не кэлерово, однородное пространство (теорема 13). Главным итогом этой работы является описание хорошего метода, который позволяет получать эрмитовы и кэлеровы однородные пространства с помощью субтвисторных структур на группах Ли произвольной размерности.

1. Инвариантные субтвисторные структуры

Пусть G — вещественная группа Ли размерности ≥ 3, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и Ω — левоинвариантная билинейная форма на G. Внутренним произведением билинейной формы Ω и векторного поля X называется 1-форма $\mathrm{I}_X\Omega$ такая, что для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{g}$ $\mathrm{I}_X\Omega(Y) = \Omega(X, Y)$.

Определение 1. *Радикалом левоинвариантной билинейной формы Ω на группе Ли G называется подпространство*

$$\operatorname{rad}\Omega = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{I}_X\Omega = 0\}.$$

Сразу из определения следует, что левоинвариантная билинейная форма Ω не вырождена тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$, а радикал нулевой левоинвариантной билинейной формы есть вся алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Используя результаты, доказанные в [1] для радикала кососимметричной регулярной 2-формы для многообразий, для групп Ли получаем:

Теорема 2. *Пусть G — вещественная группа Ли размерности $n \geq 3$ и Ω — левоинвариантная ненулевая кососимметричная 2-форма с радикалом размерности r на G. Тогда:*

1) *если n четно, то и r четно, и $0 \leq r \leq n-2$;*
2) *если n нечетно, то и r нечетно, и $1 \leq r \leq n-2$;*
3) *если $d\Omega = 0$, то $\operatorname{rad}\Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.*

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что для любого дополнительного к $\operatorname{rad}\Omega$ подпространства на G его размерность всегда равна $n-r$, т.е. всегда четна, вне зависимости от четности числа n. Кроме того, любая ненулевая левоинвариантная 2-форма на группе Ли размерности 2 всегда невырождена, т.е. имеет нулевой радикал.

Пусть Ω — ненулевая кососимметричная левоинвариантная 2-форма на группе Ли G. Рабочим расслоением для Ω называется дополнительное к $\operatorname{rad}\Omega$ подпространство. Как было показано выше, рабочее расслоение всегда имеет четную размерность на группе Ли любой размерности, а значит, слои рабочего расслоения всегда имеют комплексную структуру, симплектическую и кэлерову структуру, как векторные пространства четной размерности. Поскольку любая группа Ли допускает левоинвариантную риманову метрику β, то рабочее расслоение можно однозначно определить как ортогональное относительно метрики β дополнение к подпространству $\operatorname{rad}\Omega$.

Определение 3. *Пусть Ω — левоинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли G с рабочим расслоением D и β — левоинвариантная риманова метрика на G. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется эндоморфизм Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что*

$$\Omega(X, Y) = \beta(\Phi X, Y), X, Y \in \mathfrak{g},$$
$$\beta(\Phi X, \Phi Y) = \beta(X, Y), X, Y \in D.$$

В [1] получены следующие свойства аффинора:

Предложение 4. *Пусть Ω — вырожденная левоинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли G размерности ≥ 3 с рабочим расслоением D, и Φ — ассоциированный с 2-формой Ω аффинор. Тогда:*

1) $\ker\Phi = \operatorname{rad}\Omega$*;*

2) $\Phi^2\big|_D = -\operatorname{id}$, *где* id *— тождественный оператор в* $\mathfrak{g}$*;*

3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$*;*

4) для любого $X \in \mathfrak{g}$ $\Omega(X, \Phi X) \geq 0$.

Отсюда видно, что аффинор, ассоциированный с кососимметричной 2-формой, есть обобщение понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической структурой на четномерных многообразиях. В частности, когда $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$, аффинор есть классическая почти комплексная структура, сохраняющая невырожденную 2-форму Ω. В [1] доказано, что любой эндоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которого выполняются все свойства из предложения 4, удовлетворяет определению 3, т.е. является аффинором. Теперь мы можем определить понятие субтвисторной структуры.

Определение 5. *Пусть* S *— группа автоморфизмов алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *вещественной группы Ли* G *размерности* ≥ 3. S*-инвариантной субтвисторной структурой на группе Ли* G *называется набор объектов* (Ω, D, Φ, β)*, где* Ω *— ненулевая кососимметричная 2-форма на* G*,* D *— рабочее расслоение для 2-формы* Ω*,* Φ *— аффинор, ассоциированный с 2-формой* Ω*,* β *— риманова метрика на* G*, и для любого автоморфизма* $A \in \mathrm{S}$ $\Omega \circ A = \Omega$*,* $\beta \circ A = \beta$*, подпространство* D *есть* A*-инвариантное подпространство в* $\mathfrak{g}$*,* $\Phi \circ A = A \circ \Phi$*.*

Субтвисторная структура называется левоинвариантной (правоинвариантной), если $A = dL_g$ $(A = dR_g)$*, где* dL_g *— дифференциал левого сдвига группы* G *на элемент* $g \in G$*,* dR_g *— дифференциал правого сдвига на элемент* $g \in G$*. Субтвисторная структура называется* Ad_H*-инвариантной, если* $A = \mathrm{Ad}_h = dA_h$*, где* H *— подгруппа в* G*,* dA_h *— дифференциал внутреннего автоморфизма* A_h*, порожденного элементом* $h \in H$*.* Ad_G*-инвариантная субтвисторная структура называется биинвариантной.*

2-форма Ω *называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры, а подпространство* D *называется рабочим расслоением субтвисторной структуры.*

Если $\operatorname{rad}\Omega$ есть подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, то $R = \exp(\operatorname{rad}\Omega)$ есть замкнутая подгруппа в G. Эта подгруппа называется подгруппой радикала. Группа Ли G действует на левоинвариантную 2-форму Ω следующим образом:

$$g(\Omega) = \mathrm{Ad}_g^*\,\Omega,\ g \in G.$$

Обозначим через $H(\Omega)$ максимальную связную подгруппу стабилизатора 2-формы Ω относительно этого действия группы G. Тогда орбита действия группы G на Ω диффеоморфна однородному пространству $G/H(\Omega)$, которое состоит из правых классов смежности элементов группы G по подгруппе $H(\Omega)$. Если $R \subseteq H(\Omega)$ и субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) G-левоинвариантна и $H(\Omega)$-правоинвариантна, в частности $\mathrm{Ad}_{H(\Omega)}$-инвариантна, то эта субтвисторная структура переносится с группы ли G на однородное пространство $M = G/R$, где она задает G-инвариантную твисторную структуру (Ω', Φ', β'). Подробное описание переноса билинейных форм с группы Ли на однородное пространство можно найти в [4]. Если $R \subseteq H(\Omega)$ и Φ' — комплексная структура на M, то (Φ', β') есть G-инвариантная эрмитова структура на M. Если $R \subseteq H(\Omega), d\Omega' = 0$ и Φ' — комплексная структура на M, то (Ω', Φ', β') есть G-инвариантная кэлерова структура на M. Далее изучим, когда эти условия выполняются.

2. Случай замкнутой фундаментальной 2-формы

Теорема 6. *Пусть* (Ω, D, Φ, β) *— левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли* G *размерности* ≥ 3 *с замкнутой фундаментальной 2-формой и нетривиальной подгруппой радикала* R*. Тогда* $R \subseteq H(\Omega)$*.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы $H(\Omega)$ $Z \in \mathfrak{h}$, и H_t — однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом Z. Мы будем использовать известное равенство, доказательство которого можно найти в [4, 5, 6]: для любого $Y \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{H_t} Y = [Z, Y],$$

где $[Z, Y]$ обозначает скобку Ли векторных полей Z, Y. Из условия $\mathrm{Ad}_{H_t}^*\,\Omega = \Omega$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{H_t}^*\,\Omega(X, Y) = \\ = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \Omega(\mathrm{Ad}_{H_t} X, \mathrm{Ad}_{H_t} Y) = \\ = \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]) = 0.\end{gathered}$$

Используя определение 1 и инвариантное определение внешнего дифференциала 2-формы [5], для любых $Z \in \operatorname{rad}\Omega, X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$\begin{gathered}0 = d\Omega(X, Y, Z) = \Omega([X, Y], Z) - \\ -\Omega([X, Z], Y) + \Omega([Y, Z], X) = \\ = \Omega([X, Y], Z) + \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]) = \\ = \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]).\end{gathered}$$

Это означает, что порожденная Z однопараметрическая подгруппа $R_t \subset H(\Omega)$. Поскольку для любого элемента $r \in R$ существует однопараметрическая подгруппа $R_t : R_1 = r$, получаем, что для любого $r \in R$ существует $Z \in \operatorname{rad}\Omega$ такой, что порожденная Z однопараметрическая подгруппа $R_t \subset H(\Omega)$ и $R_1 = r$. Отсюда $R \subseteq H(\Omega)$.

Замечание 7. В [7] доказано, что для субтвисторной структуры с точной фундаментальной 2-формой Ω подгруппа радикала совпадает с подгруппой $H(\Omega)$. Также эти подгруппы совпадают для субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой на полупростой группе Ли. Однако в общем случае можно построить примеры субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой, для которых подгруппа радикала не совпадает с подгруппой $H(\Omega)$. Подробнее см. [3].

Определение 8. *Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется тензорное поле N типа $(2, 1)$, заданное на паре векторных полей X, Y следующим образом:*

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где $[X, Y]$ обозначает скобку Ли векторных полей X, Y.

В [2] доказано, что если ограничение тензора кручения на сечения рабочего расслоения D равно нулю, то ограничение аффинора Φ на любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D\big|_D$ есть комплексная структура на Q. Отсюда получаем:

Теорема 9. *Пусть (Ω, D, Φ, β) : $d\Omega = 0$ — левоинвариантная субтвисторная структура с нетривиальной подгруппой радикала R и тензором кручения N на группе Ли G размерности ≥ 3. Если ограничение тензора N на сечения рабочего расслоения D равно нулю, то эта субтвисторная структура порождает G-инвариантную кэлерову структуру на однородном пространстве G/R.*

Следствие 10. *Левоинвариантная субтвисторная структура $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ с нетривиальной подгруппой радикала R и нулевым кручением на группе Ли G порождает кэлерово однородное пространство G/R.*

В [8] введено понятие нормальной субтвисторной структуры и доказано, что любая нормальная субтвисторная структура имеет нулевой тензор кручения. Левоинвариантная субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на группе Ли G называется нормальной, если D есть идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ $[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y]$. Теперь из следствия 10 получаем:

Следствие 11. *Если группа Ли G размерности ≥ 3 допускает левоинвариантную нормальную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и нетривиальной подгруппой радикала R, то однородное пространство G/R допускает G-инвариантную кэлерову структуру, а группа Ли G локально изометрична полупрямому произведению подгрупп $Q = \exp D$ и R.*

3. Случай произвольной фундаментальной 2-формы

Пусть Ω — левоинвариантная билинейная форма на группе Ли G и H — связная компактная подгруппа в G. Усреднением формы Ω по подгруппе H называется билинейная форма

$$\Omega_0(X,Y) = \int_H (\mathrm{Ad}_h^* \,\Omega(X,Y))\mu_h,$$

где μ_h — биинвариантная мера Хаара на подгруппе H.

Теорема 12. *Пусть Ω — левоинвариантная ненулевая кососимметричная 2-форма на компактной группе Ли G размерности ≥ 3. Если $\operatorname{rad}\Omega$ есть идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то 2-форма Ω порождает однородное эрмитово пространство G/R, где $R = \exp(\operatorname{rad}\Omega)$, которое диффеоморфно группе Ли, и группа G полупроста.*

Доказательство. Поскольку подпространство $\operatorname{rad}\Omega$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, оно Ad_G-инвариантно. При усреднении 2-формы Ω по всей группе G радикал не меняется, поскольку $\mathrm{Ad}_G(\operatorname{rad}\Omega) = \operatorname{rad}\Omega$. После усреднения 2-формы Ω по группе G мы получим биинвариантную 2-форму Ω_0 [4, 9] такую, что $\operatorname{rad}\Omega_0 = \operatorname{rad}\Omega$. Поскольку $\operatorname{rad}\Omega$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, $\operatorname{rad}\Omega_0$ порождает нормальную подгруппу $R = \exp(\operatorname{rad}\Omega_0$, и G/R диффеоморфно группе Ли. На группе G существует левоинвариантная риманова метрика β, ее всегда можно задать через симметричную положительно определенную матрицу в фиксированном базисе алгебры Ли. Усреднение билинейной формы β по всей группе G дает биинвариантную риманову метрику β_0 на G [9]. Обозначим через D ортогональное дополнение к $\operatorname{rad}\Omega_0$ относительно метрики β_0. Поскольку метрика β_0 биинвариантна и подпространство $\operatorname{rad}\Omega_0$ Ad_G-инвариантно, рабочее расслоение D также Ad_G-инвариантно. Отсюда D есть идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и группа G полупроста, так как ее алгебра Ли есть прямая сумма идеалов.

Зафиксируем ортонормированный относительно метрики β_0 базис рабочего расслоения D. Обозначим через Φ линейный оператор в D, матрица которого в этом базисе совпадает с матрицей 2-формы Ω_0. Продолжим Φ на подпространство $\operatorname{rad}\Omega_0$ нулем. Нормируя при необходимости матрицу Ω_0, получаем, что $\Phi\big|_D = -\mathrm{id}$. Мы получили ассоциированный с 2-формой Ω_0 аффинор, т.е. для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\Omega_0(X,Y) = \beta_0(\Phi X, Y).$$

Используя это равенство и биинвариантность билинейных форм Ω_0, β_0 для любого $g \in G$, получаем:

$$\beta_0(\Phi \circ \mathrm{Ad}_g X, Y) = \Omega_0(\mathrm{Ad}_g X, Y) = \\ = \Omega_0(X, \mathrm{Ad}_g^{-1} Y) = \beta_0(\Phi X, \mathrm{Ad}_g^{-1} Y) = \\ = \beta_0(\mathrm{Ad}_g \circ \Phi X, Y),$$

т.е. $\Phi \circ \mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_g \circ \Phi$, и $(\Omega_0, D, \Phi, \beta_0)$ есть биинвариантная субтвисторная структура на G с подгруппой радикала R.

Пусть G_t — однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом $X \in \mathfrak{g}$. Для любого $Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$[X, \Phi Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{G_t} \circ \Phi Y = \\ = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ \mathrm{Ad}_{G_t} Y = \Phi[X, Y].$$

Мы получили нормальную субтвисторную структуру $(\Omega_0, D, \Phi, \beta_0)$. Как было отмечено выше, нормальная субтвисторная структура всегда имеет нулевой тензор кручения. Поскольку ограничение тензора кручения этой субтвисторной структуры на сечения рабочего расслоения D совпадает с тензором Нейенхейса почти комплексной структуры Φ на однородном пространстве G/R, получаем, что построенная нормальная субтвисторная структура порождает G-инвариантную эрмитову структуру на G/R, что завершает доказательство.

Из доказательства теоремы 12 вытекает более общий результат:

Теорема 13. *Пусть Ω — биинвариантная кососимметричная 2-форма с нетривиальным радикалом на вещественной группе Ли G размерности ≥ 3. Если $\mathrm{rad}\,\Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то 2-форма Ω порождает однородное эрмитово пространство G/R, где $R = \exp(\mathrm{rad}\,\Omega)$.*

Поскольку для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, из доказательства теорем 6 и 12 получаем:

Следствие 14. *Если (Ω, D, Φ, β) — биинвариантная субтвисторная структура на полупростой группе Ли, то $d\Omega \neq 0$.*

Также из доказательства теоремы 12 вытекает следующий факт:

Следствие 15. *Неполупростая, в частности разрешимая группа Ли размерности ≥ 3 не допускает биинвариантных субтвисторных структур.*

Поскольку контактные метрические структуры [10, 11] и аффинорные метрические структуры [7] порождают субтвисторные структуры с точной фундаментальной 2-формой, на группах Ли размерности $2n + 1$ не существует биинвариантных контактных метрических структур, а на группах Ли размерности $n \geq 3$ не существует биинвариантных аффинорных метрических структур.

Заключение

Мы показали, как с помощью субтвисторной структуры с нетривиальной подгруппой радикала на группе Ли можно получать однородные эрмитовы и кэлеровы пространства. Доказано, что левоинвариантная субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым кручением порождает однородное кэлерово пространство, а биинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли, радикал которой есть нетривиальная подалгебра в алгебре Ли этой группы, порождает эрмитово, но не кэлерово однородное пространство.

Библиографический список

1. Корнев Е.С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 5. С. 1062–1077.

2. Корнев Е.С. Субкэлеровы и сублагранжевы подмногообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 23–35.

3. Chu B.-Y. Symplectic Homogeneous Spaces // Trans American Mathematical Society. 1974. Vol. 197. P. 145159.

4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна ; в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 703 с.

5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии ; в 2 т. М.: Наука, 1981. 760 с.

6. Серр Ж.-П. Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1969 376 с.

7. Корнев Е.С. Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 1. С. 107–123.

8. Корнев Е.С. Нормальные субтвисторные структуры // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 69–74. https://doi.org/10.14258/izvasu(2024)4-09

9. Milnor J. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

10. Blair D. E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds Boston: Birkhauser, 2010. 358 p.

11. Diatta A. Left-invariant contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. 2008. Vol. 26. Issue 5. P. 544–552.

References

1. Kornev E.S. Subcomplex and Sub-Kahler Structures. *Siberian Mathematical Journal.* 2016. Vol. 57. № 5. P. 1062–1077. (In Russ.).

2. Kornev E.S. Sub-Kahler and Sub-Lagrangian Submanifolds. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2023. № 84. P. 23–35. (In Russ.).

3. Chu B.-Y. Symplectic Homogeneous Spaces. *Trans American Mathematical Society.* 1974. Vol. 197. P. 145–159.

4. Besse A. *Einstein Manifolds* (in 2 Vol.). Moscow: Mir, 1990. 703 p. (In Russ.).

5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Foundations of Differential Geometry*. In 2 Vol. Moscow: Nauka, 1981. 760 p. (In Russ.).

6. Serr J.-P. *Lie Groups and Lie Algebras.* Moscow: Mir, 1969. 376 p. (In Russ.).

7. Kornev E.S. Invariant Affinor Metric Structures on Lie Groups. *Siberian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 53 № 1. P. 107–123. (In Russ.).

8. Kornev E.S. Normal Subtwistor Structures. *Izvestiya of Altai State University.* 2024. № 4 (138). P. 69–74. (In Russ.). https://doi.org/10.14258/izvasu(2024)4-09

9. Milnor J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

10. Blair D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds*. Boston: Birkhauser, 2010. 358 p.

11. Diatta A. Left-invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2008. Vol. 26 Issue 5. P. 544–552.

Информация об авторе

Е.С. Корнев, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-инновационного управления, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия.

Information about the author

E.S. Kornev, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Researcher at the Scientific-Innovation Department, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.