Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 103–107.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 1 (147). P. 103–107.

Научная статья
УДК 514.765
https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-14

О потоке Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью

Данила Сергеевич Григорьев[1], *Дмитрий Николаевич Оскорбин*[2], *Евгений Дмитриевич Родионов*[3]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, danila.grigoryev.2019@mail.ru
[2]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия, oskorbin@yandex.ru
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru

Original article

On the Ricci Flow on Three-Dimensional Unimodular Lie Groups with Semisymmetric Equiaffine Connection

Danila S. Grigoryev[1], *Dmitry N. Oskorbin*[2], *Evgeny D. Rodionov*[3]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, danila.grigoryev.2019@mail.ru
[2]Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia, oskorbin@yandex.ru
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru

Аннотация. Потоки Риччи играют важную роль в исследованиях по геометрии и топологии многообразий и впервые исследовались для связности Леви-Чивиты Р. Гамильтоном и другими математиками. Естественным обобщением связности Леви-Чивиты является класс метрических связностей с векторным кручением, или класс полусимметрических связностей, впервые открытых Э. Картаном. Тензор Риччи таких связностей, вообще говоря, не является симметричным. Поэтому при исследовании потоков Риччи для полусимметрических связностей необходимо рассматривать полусимметрические эквиаффинные связности, или такие полусимметрические связности, для которых тензор Риччи симметричен. В случае групп Ли это равносильно выполнению некоторой системы алгебраических уравнений.

В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Уравнение потока в системе координат Дж. Милнора приводится к смешанной системе, состоящей из алгебраических и дифференциальных уравнений. Решая подсистему из алгебраических уравнений и подставляя полученные решения в подсистему дифференциальных

Abstract. Ricci flows play an important role in studies of geometry and topology of manifolds and were first studied for the Levi-Civita connection by R. Hamilton and other mathematicians. A natural generalization of the Levi-Civita connection is the class of metric connections with vector torsion, or the class of semisymmetric connections, first discovered by E. Cartan. The Ricci tensor of such connections is, generally speaking, not symmetric. Therefore, when studying Ricci flows for semisymmetric connections, it is necessary to consider semisymmetric equiaffine connections, or such semisymmetric connections for which the Ricci tensor is symmetric. In the case of Lie groups, this is equivalent to the fulfillment of a certain system of algebraic equations.

In this paper, we study the Ricci flow on three-dimensional unimodular Lie groups with a semisymmetric equiaffine connection. The flow equation in the coordinate system of J. Milnor is reduced to a mixed system consisting of algebraic and differential equations. By solving a subsystem of algebraic equations and substituting the obtained solutions into a subsystem of differential equations, we find the Ricci flow on a three-dimensional unimodular Lie group with the Milnor metric with respect to a semisymmetric equiaffine connection.

уравнений, мы находим поток Риччи на трехмерной унимодулярной группе Ли с метрикой Дж. Милнора относительно полусимметрической эквиаффинной связности.

Ключевые слова: тензор Риччи, полусимметрические эквиаффинные связности, трехмерные группы Ли

Для цитирования: Григорьев Д.С., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О потоке Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 103–107. https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-14.

Keywords: Ricci tensor, semisymmetric equiaffine connections, three-dimensional Lie groups

For citation: Grigoryev D.S., Oskorbin D.N., Rodionov E.D., On the Ricci Flow on Three-Dimensional Unimodular Lie Groups with Semisymmetric Equiaffine Connection. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 103–107. (In Russ.). https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1–14.

Введение

В данной статье применяются идеи и методы работ [1–10].

Рассмотрим риманово многообразие M размерности n и зададим на M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где ∇^g — связность Леви-Чивиты метрики $g(X,Y)$, X и Y — произвольные векторные поля, а V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле. Полусимметрическая связность ∇ является метрической и была открыта Э. Картаном в [1].

Определим тензоры кривизны и Риччи связности ∇ обычным образом:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$Ric(X,Y) = tr(Z \to R(X,Z)Y).$$

Запишем уравнение потока Риччи на M для однопараметрического семейства римановых метрик $g(t)$ в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Ric(g(t)). \qquad (1)$$

В случае связности Леви-Чивиты уравнение потока Риччи исследовалось Р. Гамильтоном в [2]. Рассмотрим далее случай, когда полусимметрическая связность является эквиаффинной, т.е. тензор Риччи симметричен. Согласно [8] в случае групп Ли это равносильно условию:

$$V^i g_{ij} c^j_{kt} = 0. \qquad (2)$$

Где $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\{E_1, \dots, E_n\}$ некоторый фиксированный базис в алгебре Ли, $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ — компоненты метрического тензора, V_i — координаты вектора, $[E_k, E_t] = c^j_{kt} E_j, c_{ijs} = c^k_{ij} g_{ks}$ — структурные константы алгебры Ли.

Рассмотрим далее на G полусимметрическую связность ∇, задаваемую некоторым инвариантным векторным полем V. Тогда тензор кривизны R, тензор Риччи Ric и символы Кристоффеля связности ∇ в базисе $\{E_1, \dots, E_n\}$ определяются формулами:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk}\right) g_{ps},$$

$$Ric_{ik} = R_{ijks} g^{js},$$

$$\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij}V^k - g_{sj}V^s\delta^k_i,$$

где $(\Gamma^g)^s_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивита ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$, δ^k_i — символ Кронекера.

Предположим далее, что G — трехмерная унимодулярная группа Ли. В этом случае в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$ Дж. Милнора, удобный для вычисления [3, 4].

Пусть $g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2$, где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}, A, B, C > 0$, семейство левоинвариантных римановых метрик Дж. Милнора на G, которое ранее изучалось в [4]. Справедливы следующие утверждения:

Лемма. Для полусимметрических эквиаффинных связностей на трехмерных унимодулярных группах Ли справедливы следующие утверждения:

1. Если $G = SU(2)$, то единственной эквиаффинной связностью является связность Леви-Чивиты, т.е. $V = (0,0,0)$

2. Если $G = SL(2)$, то единственной эквиаффинной связностью является связность Леви-Чивиты, т.е. $V = (0,0,0)$

3. Если $G = E(2)$, то эквиаффинной связностью является связность, задаваемая вектором $V = (0, v_2, 0), v_2 \in \mathbb{R}$

4. Если $G = E(1,1)$, то эквиаффинной связностью является связность, задаваемая вектором $V = (0, v_2, 0), v_2 \in \mathbb{R}$

5. Если $G = H_3$, то эквиаффинной связностью является связность, задаваемая вектором $V = (v_1, v_2, 0), v_1, v_2 \in \mathbb{R}$
6. Если $G = \mathbb{R}^3$, то любая полусимметрическая связность является эквиаффинной.

Доказательство. Используя условие эквиаффинности, имеем:

1. Если $G = SU(2)$, то условие эквиаффинности в инвариантной форме примет вид:
$$g(V, E_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\},$$
Отсюда $V = (0, 0, 0)$. Данный случай рассмотрен в [5]
2. Если $G = SL(2)$, то условие эквиаффинности в инвариантной форме примет вид:
$$\begin{aligned} &g(V, E_1) = 0,\\ &g(V, -E_2) = 0,\\ &g(V, E_3) = 0 \end{aligned}$$
Отсюда $V = (0, 0, 0)$. Данный случай рассмотрен в [5]
3. Если $G = E(2)$, то условие эквиаффинности имеет вид:
$$\begin{cases} A(t)v_1 = 0\\ C(t)v_3 = 0 \end{cases}$$
Отсюда $V = (0, v_2, 0)$, где $v_2 \in \mathbb{R}$.
4. Если $G = E(1, 1)$, то условие эквиаффинности имеет вид:
$$\begin{cases} A(t)v_1 = 0\\ C(t)v_3 = 0 \end{cases}$$
Отсюда $V = (0, v_2, 0)$, где $v_2 \in \mathbb{R}$.
5. Если $G = H_3$, то условие эквиаффинной имеет вид: $C(t)v_3 = 0$. Отсюда $V = (v_1, v_2, 0), v_1, v_2 \in \mathbb{R}$
6. Если $G = \mathbb{R}^3$, то любая полусимметрическая связность является эквиаффинной.

Теорема. Для трехмерных унимодулярных групп Ли с нетривиальной полусимметрической эквиаффинной связностью имеют место только два случая:

1. Если $G = E(2)$, тогда решение потока Риччи имеет вид: $A(t) = A_0 e^{-B_0 v_2^2 t}, B(t) = B_0, C(t) = A(t)$.
2. $G = \mathbb{R}^3$, то справедливы следующие утверждения:
   (a) Пусть $V = (v_1, 0, 0)$, тогда решение потока Риччи имеет вид: $A(t) = A_0, B(t) = B_0 e^{-A_0 v_1^2 t}, C(t) = C_0 e^{-A_0 v_1^2 t}$
   (b) Пусть $V = (0, v_2, 0)$ решение потока Риччи имеет вид: $A(t) = A_0 e^{-B_0 v_2^2 t}, B(t) = B_0, C(t) = C_0 e^{-B_0 v_2^2 t}$
   (c) Пусть $V = (0, 0, v_3)$ решение потока Риччи имеет вид: $A(t) = A_0 e^{-C_0 v_3^2 t}, B(t) = B_0 e^{-C_0 v_3^2 t}, C(t) = C_0$

Доказательство.

1. Пусть $G = E(2)$. Уравнение потока имеет вид:
$$\begin{cases} v_2\Big(A(t) - C(t)\Big) = 0\\ \dfrac{dA}{dt} = \frac{A(t)^2 - 2A(t)B(t)^2C(t)v_2^2 - C(t)^2}{2B(t)C(t)}\\ \dfrac{dB}{dt} = \frac{A(t)^2 - 2A(t)C(t) + C(t)^2}{2A(t)C(t)}\\ \dfrac{dC}{dt} = \frac{A(t)^2 - 2A(t)B(t)^2C(t)v_2^2 - C(t)^2}{2A(t)B(t)} \end{cases}$$
С учетом алгебраического уравнения, решением которого является $C = A$, получим систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2\\ \dfrac{dB}{dt} = 0 \end{cases}$$
Отсюда с учетом начальных условий $A(0) = A_0, B(0) = B_0$ компоненты метрического тензора являются:
$$\begin{cases} A(t) = A_0 e^{-B_0 v_2^2 t}\\ B(t) = B_0\\ C(t) = A(t) \end{cases}$$
2. Пусть $G = E(1, 1)$. Уравнение потока имеет вид:
$$\begin{cases} v_2\Big(A(t) + C(t)\Big) = 0\\ \dfrac{dA}{dt} = \frac{A(t)^2 - 2A(t)B(t)^2C(t)v_2^2 - C(t)^2}{2B(t)C(t)}\\ \dfrac{dB}{dt} = -\frac{A(t)^2 + 2A(t)C(t) + C(t)^2}{2A(t)C(t)}\\ \dfrac{dC}{dt} = -\frac{A(t)^2 + 2A(t)B(t)^2C(t)v_2^2 - C(t)^2}{2A(t)B(t)} \end{cases}$$
Решением алгебраических уравнений является $V = (0, 0, 0)$. Данный случай был рассмотрен в [5].

3. Пусть $G = H_3$. Уравнение потока имеет вид:

$$\begin{cases} A(t)B(t)v_1v_2 = 0 \\ C(t)v_1 = 0 \\ C(t)v_2 = 0 \\ \dfrac{dA}{dt} = -\frac{2A(t)B(t)^2v_2^2+C(t)}{2B(t)} \\ \dfrac{dB}{dt} = -\frac{2A(t)^2B(t)C(t)+C(t)}{2A(t)} \\ \dfrac{dC}{dt} = -\frac{2A(t)^2B(t)C(t)v_1^2+2A(t)B(t)^2C(t)v_2^2-C(t)^2}{2A(t)B(t)} \end{cases}$$

Решением алгебраических уравнений является $V = (0,0,0)$. Данный случай был рассмотрен в [5].

4. Пусть $G = R^3$. Уравнение потока имеет вид:

$$\begin{cases} A(t)B(t)v_1v_2 = 0 \\ A(t)C(t)v_1v_3 = 0 \\ B(t)C(t)v_2v_3 = 0 \\ \dfrac{dA}{dt} = -A(t)\Big(B(t)v_2^2 + C(t)v_3^2\Big) \\ \dfrac{dB}{dt} = -B(t)\Big(A(t)v_1^2 + C(t)v_3^2\Big) \\ \dfrac{dC}{dt} = -C(t)\Big(A(t)v_1^2 + B(t)v_2^2\Big) \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть слудующие подслучаи:

(a) Пусть $V = (v_1, 0, 0)$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = 0 \\ \dfrac{dB}{dt} = -A(t)B(t)v_1^2 \\ \dfrac{dC}{dt} = -A(t)C(t)v_1^2 \end{cases}$$

Решением с учетом начальных условий является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \\ B(t) = B_0e^{-A_0v_1^2t} \\ C(t) = C_0e^{-A_0v_1^2t} \end{cases}$$

(b) Пусть $V = (0, v_2, 0)$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 \\ \dfrac{dB}{dt} = 0 \\ \dfrac{dC}{dt} = -B(t)C(t)v_2^2 \end{cases}$$

Решением с учетом начальных условий является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0e^{-B_0v_2^2t} \\ B(t) = B_0 \\ C(t) = C_0e^{-B_0v_2^2t} \end{cases}$$

(c) Пусть $V = (0, 0, v_3)$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -A(t)C(t)v_3^2 \\ \dfrac{dB}{dt} = -B(t)C(t)v_3^2 \\ \dfrac{dC}{dt} = 0 \end{cases}$$

Решением с учетом начальных условий является:

$$\begin{cases} A(t) = A_0e^{-C_0v_3^2t} \\ B(t) = B_0e^{-C_0v_3^2t} \\ C(t) = C_0, \end{cases}$$

где $A(0) = A_0$, $B(0) = B_0$, $C(0) = C_0$ — начальные условия.

Заключение

В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Уравнение потока в системе координат Дж. Милнора приводится к системе алгебраических и дифференциальных уравнений, находится решение потока в классе метрик Дж. Милнора.

Данная тематика также исследовалась в работе [8].

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée (Deuxième Partie) // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1925. Vol. 42. P. 17–88.

2. Hamilton R.S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature // Journal of Differential Geometry. 1982. Vol. 17. No 2. P. 255–306.

3. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

4. Onda K. Ricci Flow on 3-Dimensional Lie Groups and 4-Dimensional Ricci-Flat Manifolds // arXiv:0906.1035. 2010. P. 1–25.

5. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // Communications in Analysis and Geometry. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.

6. Besse A.L. Einstein Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 524 p.

7. Павлова А.А., Хромова О.П. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли // Материалы Международной конференции «Лобачевские чтения». Казань: Изд-во КФУ, 2022. С. 96–97.

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ РАН, 2023. С. 19–29. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

9. Cao H.-D. Recent progress on Ricci Solitons // Advances in Mathematics. 2010. Vol. 228. P. 2891–2919

10. Григорьев Д.С., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О потоке Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025. Т. 2. С. 30–41.

References

1. Cartan E. Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée (Deuxième Partie). *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supe'rieure.* 1925. Vol. 42. P. 17–88.

2. Hamilton R.S. Three-manifolds With Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*. 1982. Vol. 17. No. 2. P. 255–306.

3. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups. *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

4. Onda K. Ricci Flow On 3-Dimensional Lie Groups And 4-Dimensional Ricci-flat Manifolds. *arXiv:0906.1035.* 2010. P. 1–25.

5. Knopf D., McLeod K. Quasi-convergence Of Model Geometries Under the Ricci Flow. *Communications in Analysis and Geometry*. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.

6. Besse A.L. *Einstein Manifolds.* Berlin: Springer-Verlag, 2008. 524 p.

7. Pavlova A.A., Khromova O.P. On Symmetric Ricci Flows Of Semisymmetric Connections On Three-Dimensional Metric Lie Groups. *Proceedings of the International Conference "Lobachevsky Readings".* Kazan: KFU Publishing House. 2022. Vol. 62. P. 96–97. (In Russ.).

8. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Metric Lie Groups With Semisymmetric Connection. *Proceedings of the International Conference «Classical and Modern Geometry» dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Levon Sergeyevich Atanasyan (July 15, 1921—July 5, 1998). Moscow, November 1–4, 2021. Part 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.* Moscow: VINITI RAS, 2023. Vol. 222. P. 19–29. (In Russ.). https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-19-29.

9. Cao H.-D. Recent progress on Ricci Solitons. *Advances in Mathematics*. 2010. Vol. 228. P. 2891–2919.

10. Grigoryev D.S., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Flow on Three-Dimensional Non-Unimodular Lie Groups with Semisymmetric Equiaffine Connection. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Informatics*. 2025. Vol. 2. P. 30–41. (In Russ.).

Информация об авторах

Д.С. Григорьев, аспирант Института цифровых технологий, электроники и физики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.Н. Оскорбин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия;

Е.Д. Родионов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

D.S. Grigoriev, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.N. Oskorbin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;

E.D. Rodionov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.