Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 97–102.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 1 (147). P. 97–102.

Научная статья
УДК 517.95
https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-13

Разрешимость задачи неизотермической фильтрации в тонком пороупругом слое

Павел Вячеславович Гилев[1], *Александр Алексеевич Папин*[2]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, pavel.gilev.2000@mail.ru
[2]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, papin@math.asu.ru

Original article

Solvability of the Problem of Nonisothermal Filtration in a Thin Poroelastic Layer

Pavel V. Gilev[1], *Alexander A. Papin*[2]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, pavel.gilev.2000@mail.ru
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, papin@math.asu.ru

Аннотация. Задачи двухфазной фильтрации возникают в различных областях человеческой деятельности: добыча нефти и газа, моделирование таяния снега, медицина. Все эти приложения нуждаются в разработке подходов к моделированию подобных процессов, созданию моделей и их теоретическому обоснованию. Существуют различные подходы к моделированию процессов двухфазной фильтрации. В данной статье рассматривается подход, основанный на классической модели Маскета — Леверетта, дополненный уравнениями для характеристик пористой среды и температуры. Для данной модели ставится начально-краевая задача. После обезразмеривания и формального предельного перехода по малому параметру исследуемая система распадается на две подсистемы, одна из которых замкнута относительно неизвестных функций и уравнений. Структура уравнений позволяет найти классическое решение для задачи с гладкими начально-краевыми условиями. Задача осложнена многочисленными условиями согласованности. Для исследования применяются классические методы дифференциальных уравнений. Новизной данной работы является переменная пористость в задачах неизотермической двухфазной фильтрации в пороупругом тонком слое.

Ключевые слова: закон Дарси, пороупругость, неизотермическая двухфазная фильтрация, пористость

Abstract. The two-phase filtration problems arise in various fields of human activity, such as oil and gas extraction, snowmelt modeling, and medicine. All these applications require the development of approaches for modeling such processes, creating models, and theoretically substantiating them. There are various approaches to simulate two-phase filtration processes. This article discusses an approach based on the classical Masket — Leverett model, supplemented by equations for the characteristics of a porous medium and temperature. An initial boundary value problem is set for this model. The studied system splits into two subsystems after dimensionalization and formal passing to a limit with a small parameter. One of the subsystems is closed under its unknown functions and equations. The structure of equations allows finding the classic solution for a problem with smooth initial boundary conditions. The problem is complicated by numerous inconsistencies. The study uses various classical methods of differential equations. The novelty of this study is the use of the variable porosity in the problems of nonisothermal two-phase filtration in a thin poroelastic layer.

Keywords: Darcy's law, poroelasticity, nonisothermal two-phase filtration, porosity

Для цитирования: Гилев П.В., Папин А.А. Разрешимость задачи неизотермической фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 97–102. https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-13.

For citation: Gilev P.V., Papin A.A. Solvability of the Problem of Nonisothermal Filtration in a Thin Poroelastic Layer. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 97–102. (In Russ.). https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-13.

Финансирование: работа поддержана в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003).

Funding: the work was supported within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Project “Modern Models of Hydrodynamics for Problems of Environmental Management, Industrial Systems and Polar Mechanics” (Project No FZMW-2024-0003).

Введение

В работе рассматривается следующая квазилинейная система дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\frac{\partial(s_i\phi\rho_i^0)}{\partial t}+\nabla\cdot(s_i\phi\vec{u}_i\rho_i^0)=0, \qquad (1)$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i-\vec{u}_3)=-K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i(\theta)}(\nabla p_i-\rho_i^0\vec{g}), i=1,2, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t}+\nabla\cdot((1-\phi)\vec{u}_3\rho_3^0)=0, \qquad (3)$$

$$p_2-p_1=p_c(s,\theta,\vec{x}), s=\frac{s-s_1^0}{1-s_1^0-s_2^0} \qquad (4)$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_3=-\frac{1}{\xi(\phi,\theta)}p_e-\beta_t(\phi,\theta)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{u}_3\cdot\nabla p_e), \qquad (5)$$

$$\nabla p_{tot}+\rho_{tot}\vec{g}= =\nabla\cdot\left(\frac{\eta}{2}(1-\phi)\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial\vec{x}}+\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right), \qquad (6)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0c_i\alpha_i\right)\frac{\partial\theta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0c_i\alpha_i\vec{u}_i\cdot\nabla\theta= =div(\lambda_c\nabla\theta). \qquad (7)$$

Данная система описывает неизотермическое движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Здесь $\rho_i^0,\vec{u}_i,s_i$ и p_i — соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i-ой фазы ($i=1$ — смачивающая фаза, $i=2$ — несмачивающая фаза, $s_1+s_2=1$, $i=3$ — твердый деформируемый скелет), ϕ — пористость (доля объема пор среды), $p_e\equiv p_{tot}-p_f$ — эффективное давление, $p_{tot}\equiv\phi p_f+(1-\phi)p_3$ — общее давление, $p_f\equiv p_1s_1+p_2s_2$ — давление жидкой фазы, $\rho_{tot}\equiv\phi(s_1\rho_1^0+s_2\rho_2^0)+(1-\phi)\rho_3^0$ — общая плотность; $\eta(\theta),\xi(\phi,\theta)$ и $\beta_t(\phi,\theta)$ — соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и объемной сжимаемости среды, $\vec{g}$ — плотность массовых сил; кроме того, $K_0(\phi)$ — тензор проницаемости, μ_i — динамическая вязкость i-ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ — относительная фазовая проницаемость, $p_c(s,\theta,\vec{x})$ — капиллярное давление есть заданные функции, θ - температура, λ — коэффициент теплопроводности, c_i — теплоемкость i-той фазы, $\alpha_i=s_i\phi\rho_i^0$ если $i=1,2$, $\alpha_3=(1-\phi)\rho_3^0$.

Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x}=(x,y,z)$ и t, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ — оператор градиента, t — время. Истинные плотности принимаются постоянными, неизвестными функциями являются 15 скалярных величин: $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,p_1,p_2,p_3,s_1,\phi,\theta$. Для их определения служат также 15 скалярных уравнений: три уравнения неразрывности (1), (3), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (4), реологическое соотношение типа Максвела (5), три уравнения баланса сил системы в целом (6) и уравнение для температуры (7) [2, 3].

Уравнения (1), (2) и (4) относительно неизвестных функций $\vec{u}_i,s_i,p_i$ образуют классическую модель Маскета — Леверетта, исследованную в монографии [3]. В классической модели функция ϕ считается заданной, а $\vec{u}_3=p_e=0$. Для описания процесса фильтрации в пороупругом подвижном скелете была предложены модификация модели Маскета — Леверетта, описанная в [1]. В качестве уравнений для отыскания пяти характеристик пористой среды (ϕ, $\vec{u}_3$, p_e) были предложены уравнения (3), (5) и (6).

Уравнения (1) – (6) образуют систему, описывающую изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде. Для данной модели была поставлена и разрешена задача в приближении тонкого слоя [4]. В данной работе ставится и исследуется задача о неизотермическом движении в приближении тонкого слоя.

Общей особенностью для задач двухфазной фильтрации, включающие в себя основные уравнения модели Маскета — Леветта, является возможное вырождение коэффициентов на решении (в силу условия $k_{01}(0)=k_{02}(1)=0$). Также необходимо устанавливать справедливость неравенства $0\leq s\leq 1$.

Особенностью данной модификации классической модели является возможное вырождение уравнений системы на решении ϕ (так как $\beta_t(0,\theta) = K_0(0) = 0$). Также необходимо доказывать, что $0 \le \phi \le 1$. Для неизотермического случая требуется получить оценку $\theta > 0$.

Неизотермическая двухфазная фильтрация для модели Маскета — Леверетта была рассмотрена в [5, 6]. Для модели однофазной фильтрации в переменной пороупругой среде рассматривались в работах [7]. Новизной данной работы является одновременный учет двух неизвестных величин: подвижного пористого скелета и влияние температуры на процесс фильтрации. Актуальность данного исследования заключается в том, что аналогичные уравнения используются в моделировании снежно-ледового покрова [8].

Стоит отметить, что существуют и другие подходы к моделированию двухфазной фильтрации в пороупругой среде, в которых модель строится с использованием других уравнений [9–12].

1. Постановка задачи

Данная работа является продолжением исследований, проведенных в [4]. Поэтому, как и в указанной работе, дополним основную систему следующими гипотезами 1) – 4):

1) Движение рассматривается в области $\Omega = \{(x,z)| -H \le x \le H; -L \le z \le L\}$ при фиксированных всюду значениях y.

2) $\vec{u}_i = (0, u_i(x,z,t)), i = 1,2$, $\vec{u}_3 = (0, u_3(x,t)), \vec{g} = (0,-g)$.

3) $K_0(\phi) = \widetilde{K}_0(\phi)\delta_{ij}$.

4) $s = s_1$.

Дополнительно предполагается:

5) $p_c = p_c(\theta, s, x, z) = p_c(s)$, $\lambda = \lambda(\theta)$.

6) $\eta = \eta(\theta)$, $\mu = \mu(\theta)$.

Считается, что $\delta = \frac{H}{L} \ll 1$ — малый параметр.

В (1)–(6) осуществим обезразмеривания по правилу:

$$x = H\bar{x}, \quad z = H\bar{z}, \quad t = T\bar{t}, \quad u_i = \tfrac{L}{T}\bar{u}_i,$$

$$p_i = P\bar{p}_i, \quad p_e = P\bar{p}_e, \quad p_{tot} = P\bar{p}_{tot},$$

$$p_f = P\bar{p}_f, \quad \eta = PT\bar{\eta}, \quad \widetilde{K}_0 = L^2\bar{K}_0, \quad \mu_i = PT\bar{\mu}_i,$$

$$\theta = K\bar{\theta}, \quad c_i = \bar{c}_i\tfrac{\Lambda T}{\rho HL},$$

где $K, T, L, H, P, \Lambda, \rho$ — характерные время, расстояния, давление, теплопроводность и плотность. После обезразмеривания Ω становится единичным квадратом, область изменения $\bar{t}$ — единичным отрезком [0,1], а система уравнений (1) — (7) принимает следующий вид (штрихи над безразмерными величинами опускаются):

$$\frac{\partial s_i\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(s_i\phi u_i) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

$$s_i\phi(u_i - u_3) = = -K_0(\phi)\frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i(\theta)}\left(\frac{\partial p_i}{\partial z} - g\rho_i^0\right), \quad i = 1,2, \tag{9}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s), \tag{10}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)u_3) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\xi(\phi,\theta)}p_e + \beta_t(\phi,\theta)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3\frac{\partial p_e}{\partial z}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta(\theta)\frac{\partial u_3}{\partial x}(1-\phi)\right) = 0, \tag{13}$$

$$\delta^2\frac{\partial p_{tot}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(\theta)(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = \delta^2\rho_{tot}^0 g, \tag{14}$$

$$\delta^2\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha_i c_i\rho_0^i\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i c_i u_i)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = = \delta^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right). \tag{15}$$

После формального предельного перехода при $\delta \to 0$ в системе уравнений (8)–(15) можно выделить подсистему, замкнутую относительно входящих в нее неизвестных функций ϕ, p_e, u_3, θ:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)u_3) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\xi(\phi,\theta)}p_e + \beta_t(\phi,\theta)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3\frac{\partial p_e}{\partial z}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(\theta)(1-\phi)\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\theta(x,t))\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = 0. \tag{19}$$

Следует отметить, что с учетом $\frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$ система, вообще говоря, переопределена. Поэтому вводятся условия для $\phi(x,z,0) = \phi_0(x)$. В статье [4] показано, что при указанных условиях $\phi(z,x,t) = \phi_0(x)$. Если значения θ и $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ при $x = -1$ не зависят от z и из того что в уравнении для θ не участвует производная по z, следует, что $\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$. Как следствие, $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0$. Найдем необходимое условие, при котором это равенство выполняется. Так как $\frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$, то $\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = 0$. В силу свойств функции p_c, $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$. Таким образом, из условия $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0$ следует, что $\frac{\partial p_e}{\partial x} = 0$. Достаточное условие для выполнения этого равенства будет получено в процессе доказательства основного результата этой работы.

Определение: Функции ϕ, u_3, p_e, θ являются решением, если

1) $0 < \phi < 1, \quad \theta > 0, \quad p_e \neq 0$.
2) $\phi(x,z,0) = \phi_0(x), \quad p_e(x,z,0) = p_{e0}(x,z)$.
3) $u_3(-1,t) = u_3^-(t), \quad u_3(1,t) = u_3^+(t)$, $\theta(-1,t) = \theta^-(t), \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(-1,t) = \bar{\theta}(t)$.
4) $(u_3,\theta) \in C^{2,0}(\Omega_t), \quad (\phi, p_e) \in C^{1,1}(\Omega_t)$.

Теорема:

Если

1) u_3^+,u_3^-,θ^-,$\bar{\theta} \in C([0;T])$, ϕ_0, $p_{e0} \in C^1(\Omega)$,
2) $0 + \kappa < (\bar{\theta}, \theta^-) < M$,
3) $0 + \kappa < \phi_0 < 1 - \kappa$,
4) $\lambda > 0$, если $\theta > 0$, $\beta(\phi,\theta) \neq 0$,
5) $\eta(\xi) \in C^1(0;\infty)$,

$\lambda(\theta) \in C^1([0;\theta) \times [-1;1])$, где κ — достаточно малое положительное число, то классическое решение существует.

2. Доказательство

Доказательство теоремы осуществляется в 4 этапа:

1. Доказывается, что $\phi \equiv \phi_0(x)$.
2. Доказывается, что существует решение θ в смысле определения 1.
3. Строится представление для u_3.
4. Строится представление для p_e.

Доказательство утверждения из пункта 1 было проведено в [1].

Для того чтобы получить решение θ в смысле определения 1, надо доказать следующую лемму:

Лемма: В условиях теоремы 1 $M > \theta > min_\Omega(\theta^-) > 0$, где M — постоянная величина.

Доказательство: Проинтегрируем уравнение для θ. Тогда

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\lambda(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial x}(-1,t)\lambda(\theta^-(t)). \qquad (20)$$

Так как $\lambda(\theta) > 0 \quad \forall\theta$, то θ возрастает $\forall t \in [0;T]$. Таким образом, $\theta > min_\Omega > 0$.

Теперь можно разделить обе части представления (20) на $\lambda(\theta)$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\lambda(\theta^-(t))}{\lambda(\theta)}\bar{\theta}(t) <$$
$$< \frac{\max_{t\in[0;T]}\{\lambda(\theta^-(t))\bar{\theta}(t)\}}{min\{\lambda(\theta)\}} < \frac{M}{2} - \frac{max\{\theta^-(t)\}}{2}.$$

Интегрируя последнюю оценку, мы и получим искомое неравенство.

Для того чтобы найти $\theta(x,t)$, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство задач (t — параметр):

$$\frac{d\theta}{dx} = \bar{\theta}(t)\frac{\lambda(\theta^-(t))}{\lambda(\theta(t,x),x)}, \quad \theta(t,-1) = \theta^-(t).$$

По теореме существования и единственности локальное решение существует и единственно. По теореме о продолжении решения его можно продлить на всю область определения, и по теореме о непрерывной зависимости решения от параметра (в данном случае t) — решение непрерывно по t. Из гладкости правой части сформулированного уравнения (20) следует и требуемая гладкость искомой функции по переменной x.

Как было доказано в статье [4], $\phi = \phi_0(x)$. С учетом найденных θ и ϕ находится u_3, причем

$$u_3 = \frac{(u_3^+(t) - u_3^-(t))}{I(1,t)}I(x,t) + u_3^-(t),$$

где

$$I(x,t) = \int_{-1}^{x} \frac{d\xi}{\eta(\theta(\xi,t))(1-\phi^0(\xi))}.$$

Требуемая гладкость следует непосредственно из представления. Теперь, зная ϕ и θ, можно восстановить p_e. Задача для искомой функции выглядит следующим образом:

$$p_e(x,z,0) = p_{e0}(x,z),$$
$$a_1(\phi)p_e + a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3\frac{\partial p_e}{\partial z}) = 0. \qquad (21)$$

Для данной задачи решение можно выписать явно

$$p_e = \exp\left(-\int_0^t \beta_t(\theta,\phi)\xi(\theta,\phi)(x,\tau)d\tau\right) \times$$
$$\times\, p_{e0}(x, z - \int_0^t u_3(x,\tau)d\tau).$$

Необходимо выполнение следующего условия согласования:

$$\frac{\partial p_e}{\partial x} = 0.$$

В частности, оно выполняется, когда $\beta_t(\theta,\phi)\xi(\theta,\phi)$ — функция времени, а p_{e0} — константа.

Далее, используя результаты [4] восстанавливаются все остальные неизвестные функции.

Заключение

В работе исследована задача неизотермической двухфазной фильтрации в пороупругом тонком слое.

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2015. № 1–2. С. 131–135. https://doi.org/10.1425izvasu(2015)1.2-24

2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driv Fluid Flow in Viscoelasticrock // Geodinamica Acta. 1998. Vol. 11. P. 55–84. https://doi.org/10.1016/S0985-3111(98)80006-5

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Изд-во «Наука». 1983. С. 315.

4. Гилев П.В., Папин А.А. Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое // Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27. № 2. С. 20–33. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2024.27.202

5. Бочаров О.Б., Монахов В.Н. Неизотермическая фильтрация несмешивающихся жидкостей с переменным остаточным насыщением // Динамика сплошной среды. 1988. Т. 88. С. 3–11.

6. Бочаров О.Б., Монахов В.Н. Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах // Динамика сплошной среды. 1988. Т. 86. С. 47–59.

7. Токарева М.А., Вирц Р.А., Ларионова В.Н. Математическая модель движения жидкости в пороупругом льду с учетом фазовых переходов и движения льда // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2021. № 7. С. 44–49. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773

8. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1. С. 109–118. https://doi.org/10.15372/PMTF20210112

9. Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1994. С. 184.

10. Jardani A., Revil A. Seismoelectric Couplings in a Poroelastic Material Containing Two Immiscible Fluid Phases // Geophysical Journal International. 2015. Vol. 202. No 2. P. 850–870. https://doi.org/10.1093/gji/ggv176

11. Shelukhin V.V. A Poroelastic Medium Saturated by a Two-Phase Capillary Fluid // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2014. Vol. 26. No 5. P. 619–638. https://doi.org/10.1007/s00161-013-0321-x

12. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A Multi-Layer SPH Method for Generic Water-Soil Dynamic Coupling Problems. Part I: Revisit, Theory and Validation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. Vol. 396. https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115106

References

1. Papin A.A., Podladchikov Y.Y. Isothermal Motion of Two Immiscible Liquids in a Poroelastic Medium. *Izvestiya of Altai State University*. 2015. No. 1–2. P. 131–135. (In Russ.). https://doi.org/10.1425izvasu(2015)1.2–24.

2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow in Viscoelastic Rock. *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. P. 55–84. https://doi.org/10.1016/S0985-3111(98)80006-5.

3. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary Value Problems of Mechanics of Inhomogeneous Fluids. Novosibirsk: Nauka Publishing House. 1983. P. 315. (In Russ.).

4. Gilev P.V., Papin A.A. Filtration of Two Immiscible Incompressible Fluids. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2024. Vol. 27. No 2. P. 20–33. (In Russ.).

5. Bocharov O.B., Monakhov V.N. Non-Isothermal Filtration of Immiscible Liquids with Variable Residual Saturation. *Dinamika Sploshnoi Sredy*. 1988. Vol. 88. P. 3–11. (In Russ.).

6. Bocharov O.B., Monakhov V.N. Boundary Value Problems of Nonisothermal Two-Phase Filtration in Porous Media. *Dinamika Sploshnoi Sredy*. 1988. Vol. 86. P. 47–59. (In Russ.).

7. Tokareva M.A., Virts R.A., Larionova V.N. Mathematical Model of Fluid FLow in Poroelastic Ice with Consideration of Phase Transitions and Ice Motion. *Proceedings of The Seminar on Geometry and Mathematical Modeling*. 2021. No 7. P. 44–49. (In Russ.). https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773

8. Sibin A.N., Papin A.A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. No 1. P. 109–118. (In Russ.). https://doi.org/10.15372/PMTF20210112

9. Blokhin A.M., Dorovskiy V.N. *Problems of Mathematical Modeling in the Theory of Multi-Speed Continuum*. Novosibirsk. 1994. 184. p. (In Russ.).

10. Jardani A., Revil A. Seismoelectric Couplings in a Poroelastic Material Containing Two Immiscible Fluid Phases. *Geophysical Journal International*. 2015. Vol. 202. No 2. P. 850–870. https://doi.org/10.1093/gji/ggv176

11. Shelukhin V.V A poroelastic Medium Saturated by a Two-Phase Capillary Fluid. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2014. Vol. 26. No 5. P. 619–638. https://doi.org/10.1007/s00161-013-0321-x

12. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A Multi-Layer SPH Method For Generic Water-Soil Dynamic Coupling Problems. Part I: Revisit, Theory, and Validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2022. Vol. 396 (2/3/4). https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115106

Информация об авторах
П.В. Гилев, аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
А.А. Папин, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors
P.V. Gilev, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;
A.A. Papin, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Differential Equations. Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia.