Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 91–96.
Izvestiya of Altai State University. 2026. No 1 (147). P. 91–96.

Научная статья
УДК 532.135+532.5
https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-12

Аналог задачи Остроумова для водного раствора полимеров

Оксана Александровна Бурмистрова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия,
oksanabur@hydro.nsc.ru

Original article

Analog of the Ostroumov Problem for Aqueous Polymer Solution

Oksana A. Burmistrova

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia,
oksanabur@hydro.nsc.ru

Аннотация. Исследуется аналог задачи Остроумова о конвективном течении жидкости в вертикальной круглой цилиндрической трубе под действием продольного градиента температуры для водного раствора полимеров. В качестве математической модели использовалась модель Павловского. Если рассматривать случай, когда основное состояние является состоянием покоя, то при обобщении получаются те же результаты, что и для ньютоновской жидкости. Это следует из того, что для данной задачи выполняется принцип монотонности возмущений, поэтому слагаемое, отвечающее за релаксационные свойства жидкости, исчезает и уравнения для критических возмущений совпадают с уравнениями для классической задачи. В связи с этим представляет интерес построение нестационарного аналога задачи Остроумова для водного раствора полимеров. Система уравнений тепловой гравитационной конвекции сводится к уравнению для амплитуды скорости, в котором главным является бигармонический оператор. В зависимости от коэффициента затухания (возрастания) и направления градиента температуры решение представляется в виде суммы функций Бесселя или модифицированных функций Бесселя. Построенные точные решения имеют теоретико-групповую природу.

Ключевые слова: водные растворы полимеров, конвективное движение, задача Остроумова, точное решение, релаксационная вязкость

Abstract. The paper investigates an analog of the Ostroumov problem on the convective flow of liquid in a vertical circular cylindrical tube under the effect of a longitudinal temperature gradient, suitable for an aqueous solution of polymers. The work uses the Pavlovskii model as a mathematical model. The generalization yields the same results as for a Newtonian liquid when considering the ground state at rest. It stems from the fact that this problem falls into the case with monotonous perturbations. Therefore, the term responsible for the relaxation properties of the liquid disappears, and the equations for critical disturbances coincide with the equations for the classical problem. Thus, it is of interest to construct a non-stationary analog of the Ostroumov problem for an aqueous solution of polymers. The system of thermal gravitational convection equations is reduced to an equation for the velocity amplitude with the main biharmonic operator. Depending on the attenuation (increase) coefficient and the direction of the temperature gradient, the solution is a sum of Bessel functions or modified Bessel functions. The constructed exact solutions have a group-theoretical nature.

Keywords: aqueous polymer solution, convective motion, the Ostroumov problem, exact solution, relaxation viscosity

Для цитирования: Бурмистрова О.А. Аналог задачи Остроумова для водного раствора полимеров // Известия Алтайского государственного университета. 2026. № 1 (147). С. 91–96. https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-12.

Финансирование: исследование выполнено за счет средств проекта РНФ 24-21-00213.

For citation: Burmistrova O.A. Analog of the Ostroumov Problem for Aqueous Polymer Solution. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (147). P. 91–96. (In Russ.). https://doi.org/10.14258/izvasu(2026)1-12.

Funding: the study is funded by the Russian Science Foundation project 24-21-00213.

Введение

Г.А. Остроумов [1,2] рассмотрел задачу о конвективном течении жидкости в вертикальной цилиндрической трубе под действием продольного градиента температуры. Теоретическое решение этой задачи, а также экспериментальные исследования подробно изложены в его монографии [3]. В настоящей статье строятся аналоги решения Остроумова для релаксирующей жидкости.

Движение водных растворов полимеров в трубах стало активно изучаться после работы [4], где обнаружен эффект резкого снижения сопротивления при добавлении в жидкость небольшого количества полимеров. Обзор исследований на эту тему представлен в [5]. В качестве модели, описывающей движение водного расствора полимера, будем рассматривать модель Павловского [6], которая является упрощением модели [7]. Заметим, что существуют и другие модели для релаксирующей жидкости, например, модель жидкости второго порядка [8].

В работах [9, 10] для аналога задачи Рэлея — Бенара для раствора полимеров доказан принцип монотонности возмущений [11], из которого следует, что собственные числа спектральной задачи вещественны. При этом критические числа Рэлея совпадают с критическими числами Рэлея для классической задачи. В настоящей работе показано, что для аналога задачи Остроумова также выполняется принцип монотонности возмущений. Поэтому в случае, когда основное состояние является состоянием покоя, получаются те же результаты, что и для ньютоновской жидкости.

В связи с этим представляет интерес построение нестационарного аналога задачи Остроумова для водного раствора полимера в круглой цилиндрической трубе. При этом известно ([12]), что даже в случае ньютоновской жидкости обобщение задачи Остроумова на нестационарный случай связано с предположением о постоянности продольного градиента температуры, а попытка заменить его на функцию времени и координат не приводит к успеху.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение водного расствора полимера в круглой вертикальной цилиндрической трубе на основе модели Павловского [6]. Тогда уравнения тепловой гравитационной конвекции имеют вид [10]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta T\mathbf{g} + K\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}, \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = \chi\Delta T. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, T — отклонение температуры от ее среднего значения, ρ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости, K — коэффициент релаксационной вязкости, β — коэффициент объемного теплового расширения, χ — коэффициент температуропроводности жидкости, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение тяжести. Величины ρ, ν, K, β, χ, g полагаем постоянными.

Задача рассматривается в цилиндрических координатах r, φ, z. На границе $r = R$, где R — радиус трубы, ставится условие прилипания

$$\mathbf{v} = 0, \ r = R \quad (3)$$

и условие для температуры первого рода

$$T = T_s, \ r = R, \quad (4)$$

где T_s — температура твердой стенки.

2. Принцип монотонности возмущений

Система (1)–(2) допускает решение

$$\mathbf{v} = 0, \ p = -\frac{\rho g\beta Az^2}{2}, \ T = -Az,$$

где A — постоянная. Наложим на него малые возмущения

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}, \ p = -\frac{\rho g\beta Az^2}{2} + \tilde{p}, \ T = -Az + \tilde{T}$$

и линеаризуем систему (1)–(2) на указанном решении. Система уравнений для возмущений примет вид (здесь и далее в этом разделе «волны» над возмущенными решениями опущены)

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta T\mathbf{g} + K\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} - A\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma} = \chi\Delta T, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$, а граничные условия (3), (4) — вид

$$\mathbf{v} = 0, \ T = 0, \ r = R. \quad (7)$$

По аналогии с [11] докажем принцип монотонности возмущений. Решение системы (5)–(6) будем искать в виде нормальных возмущений

$$\mathbf{v} = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}(r,\varphi,z), \ T = e^{\lambda t}\psi(r,\varphi,z), \ p = e^{\lambda t}\zeta(r,\varphi,z),$$

где λ — инкремент возмущений. Получим систему

$$\lambda\boldsymbol{\xi} = -\rho^{-1}\nabla\zeta + (\nu + K\lambda)\Delta\boldsymbol{\xi} - \beta\psi\mathbf{g}, \qquad (8)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} = 0, \qquad (9)$$

$$\lambda\psi - A\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma} = \chi\Delta\psi. \qquad (10)$$

Домножим уравнение (8) на функцию $\boldsymbol{\xi}^*$, а (10) – на функцию ψ^*, являющиеся комплексно-сопряженными к функциям $\boldsymbol{\xi}$ и ψ соответственно, и проинтегрируем их по объему жидкости V. В итоге с учетом условий (7) получим соотношения

$$\lambda\int\limits_V |\boldsymbol{\xi}|^2\,dV = -(\nu + K\lambda)\int\limits_V |\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2\,dV + \\ +\beta g\int\limits_V \psi\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\gamma}dV, \qquad (11)$$

$$\lambda\int\limits_V |\psi|^2\,dV = -\chi\int\limits_V |\nabla\psi|^2\,dV + \\ +A\int\limits_V \psi^*\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma}dV. \qquad (12)$$

Вычитая из этих равенств соответственно комплексно-сопряженные, получим

$$(\lambda-\lambda^*)\int\limits_V (|\boldsymbol{\xi}|^2 + K\,|\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2)dV = \\ = \beta g\int\limits_V (\psi\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\gamma} - \psi^*\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma})dV, \qquad (13)$$

$$(\lambda-\lambda^*)\int\limits_V |\psi|^2\,dV = A\int\limits_V (\psi^*\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma} - \psi\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\gamma})dV. \qquad (14)$$

Домножим (13) на A, а (14) — на βg и сложим:

$$(\lambda-\lambda^*)\int\limits_V \left(A\left(|\boldsymbol{\xi}|^2 + K\,|\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2\right) + \beta g\,|\psi|^2\right)dV = 0.$$

Если $A > 0$ (подогрев снизу), то интеграл, входящий в последнее равенство, положителен. Отсюда следует, что $\lambda = \lambda^*$, т.е. λ вещественно, а значит, все нормальные возмущения монотонны. Тогда для нахождения критических значений числа Рэлея $Ra = g\beta AR^4/\nu\chi$ (значений Ra, при которых возникает неустойчивость) нужно в системе (8)–(10) положить $\lambda = 0$. Отсюда следует, что слагаемое в уравнении (8), отвечающее за релаксационные свойства, исчезает и уравнения для критических возмущений совпадают с уравнениями для задачи об устойчивости ньютоновской жидкости. Таким образом, критические значения числа Рэлея, критические движения и градиенты температуры полностью совпадают с полученными для классической задачи.

Пусть теперь $A < 0$ (подогрев сверху). Сложим каждое из равенств (11) и (12) соответственно с комплексно-сопряженным и получим

$$(\lambda+\lambda^*)\int\limits_V \left(|\boldsymbol{\xi}|^2 + K\,|\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2\right)dV = \\ = -2\nu\int\limits_V |\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2\,dV + \beta g\int\limits_V (\psi\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\gamma} + \psi^*\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma})dV, \qquad (15)$$

$$(\lambda+\lambda^*)\int\limits_V |\psi|^2\,dV = -2\chi\int\limits_V |\nabla\psi|^2\,dV + \\ +A\int\limits_V (\psi^*\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma} + \psi\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\gamma})\,dV. \qquad (16)$$

Затем домножим (15) на A, а (16) — на βg и вычтем первое равенство из второго. В итоге получим соотношение

$$(\lambda+\lambda^*)\int\limits_V \left(-A\left(|\boldsymbol{\xi}|^2 + K\,|\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2\right) + \beta g\,|\psi|^2\right)dV = \\ = 2\int\limits_V \left(A\nu\,|\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}|^2 - \chi\beta g\,|\nabla\psi|^2\right)dV,$$

в котором при $A < 0$ интеграл, входящий в правую часть, отрицателен, а интеграл, входящий в левую часть, положителен. Следовательно, вещественная часть инкремента $\mathrm{Re}\,\lambda = (\lambda+\lambda^*)/2$ отрицательна. Значит, все нормальные возмущения при подогреве сверху затухают, т.е. равновесное состояние устойчиво, как и в случае классической задачи.

3. Нестационарные аналоги решения Остроумова

Известно [12], что уравнения (1)–(2) при $K = 0$ (ньютоновская жидкость) допускают оператор

$$\partial_z - A(\partial_T + \rho g\beta z\partial_p),$$

где A — постоянная. При этом скорость не преобразуется, поэтому в случае водного раствора полимеров ($K \neq 0$) уравнения (1)–(2) также допускают данный оператор. Значит, можно искать инвариантные решения системы (1)–(2) в виде

$$\mathbf{v} = (u(r,\varphi,t), v(r,\varphi,t), w(r,\varphi,t)), \qquad (17)$$

$$p = -\frac{\rho g\beta Az^2}{2} + q(r,\varphi,t), \qquad (18)$$

$$T = -Az + \theta(r,\varphi,t). \qquad (19)$$

Рассмотрим частный случай, положив

$$u \equiv v \equiv q \equiv 0.$$

Тогда система (1)–(2) после подставновки в нее (17)–(19) принимает вид

$$w_t = \nu\Delta w + \beta g\theta + K\Delta w_t, \qquad (20)$$

$$\theta_t - Aw = \chi\Delta\theta. \tag{21}$$

Будем искать решение системы (20)–(21) в виде

$$w = e^{\lambda t} f(r,\varphi),\ \theta = e^{\lambda t} h(r,\varphi),$$

где λ — коэффициент затухания (возрастания) решения. Тогда получим систему уравнений на функции f и h:

$$\lambda f = (\nu + \lambda K)\Delta f + \beta g h, \tag{22}$$

$$\lambda h - Af = \chi\Delta h. \tag{23}$$

Выразим h из уравнения (22):

$$h = \frac{\lambda f - (\nu + \lambda K)\Delta f}{\beta g} \tag{24}$$

и подставим в (23). Получим уравнение на функцию f:

$$\Delta\Delta f - \frac{\lambda(\nu+\chi+\lambda K)}{\chi(\nu+\lambda K)}\Delta f + \frac{\lambda^2 - A\beta g}{\chi(\nu+\lambda K)} f = 0. \tag{25}$$

В этом уравнении главным является бигармонический оператор. Будем его решать методом, описанным в [3]. Пусть величины k_1 и k_2 удовлетворяют системе уравнений

$$k_1^2 + k_2^2 = -\frac{\lambda(\nu+\chi+\lambda K)}{\chi(\nu+\lambda K)}, \tag{26}$$

$$k_1^2 k_2^2 = \frac{\lambda^2 - A\beta g}{\chi(\nu+\lambda K)}. \tag{27}$$

Тогда уравнение (25) можно представить в виде

$$\Delta\Delta f + (k_1^2 + k_2^2)\Delta f + k_1^2 k_2^2 f = 0$$

или

$$(\Delta + k_1^2)(\Delta + k_2^2) f = 0. \tag{28}$$

Будем искать решение уравнения (25) в виде

$$f(r,\varphi) = F(r)\cos n\varphi. \tag{29}$$

Тогда из (28) следует, что

$$F(r) = F_1(r) + F_2(r),$$

где функции F_i, $i = 1, 2$ удовлетворяют уравнению

$$F_i'' + \frac{F_i'}{r} + (k_i^2 - \frac{n^2}{r^2})F_i = 0. \tag{30}$$

Здесь штрих означает производную по переменной r. Ищутся вещественные решения уравнения (25). Поэтому величины k_i^2 должны быть вещественными, при этом сами k_i могут быть чисто мнимыми. Система (26)–(27) сводится к квадратному уравнению

$$s^2 - as + b = 0 \tag{31}$$

относительно $s = k_i^2$, где

$$a = -\frac{\lambda(\nu+\chi+\lambda K)}{\chi(\nu+\lambda K)},\ b = \frac{\lambda^2 - A\beta g}{\chi(\nu+\lambda K)}. \tag{32}$$

Для того чтобы s были вещественными, должно выполняться условие неотрицательности дискриминанта (31):

$$\left(\frac{\lambda(\nu+\chi+\lambda K)}{\chi(\nu+\lambda K)}\right)^2 - 4\frac{\lambda^2 - A\beta g}{\chi(\nu+\lambda K)} > 0$$

или после упрощения

$$\left(\lambda^2 K + (\nu - \chi)\lambda\right)^2 + 4\chi A\beta g(\nu + \lambda K) > 0. \tag{33}$$

Неравенство (33) относительно λ разрешимо в радикалах, но его решение имеет очень громоздкий вид. Поэтому, чтобы показать, что нестационарные аналоги решения Остроумова существуют и получить их представления, будем рассматривать такие λ и A, что

$$A(\nu + \lambda K) > 0. \tag{34}$$

Тогда условие (33) выполняется.

Корни уравнения (31) имеют вид

$$s = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \tag{35}$$

откуда с учетом (32) и (34) следует, что в случае подогрева снизу ($A > 0$) существуют решения, для которых $k_1^2 > 0$, $k_2^2 > 0$ при

$$-\frac{\nu}{K} < \lambda < -\sqrt{A\beta g}, \tag{36}$$

$k_1^2 > 0$, $k_2^2 < 0$ при

$$\max\left(-\frac{\nu}{K}, -\sqrt{A\beta g}\right) < \lambda < 0 \tag{37}$$

и

$$0 < \lambda < \sqrt{A\beta g}, \tag{38}$$

$k_1^2 < 0$, $k_2^2 < 0$ при

$$\sqrt{A\beta g} < \lambda. \tag{39}$$

В случае подогрева сверху ($A < 0$) существуют решения, для которых $k_1^2 > 0$, $k_2^2 < 0$ при

$$\lambda < -\frac{\nu}{K}. \tag{40}$$

Решениями уравнения (30) при $k_1^2 > 0$, $k_2^2 > 0$ являются функции Бесселя J_n. Отсюда следует, что при значениях λ, удовлетворяющих (36),

$$F(r) = c_1 J_n(k_1 r) + c_2 J_n(k_2 r),$$

где c_1, c_2 — постоянные. С учетом граничного условия (3) получаем

$$F(r) = c\left(\frac{J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \frac{J_n(k_2 r)}{J_n(k_2 R)}\right),$$

где c — постоянная. Отсюда и из (29) следует, что

$$f = c\left(\frac{J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \frac{J_n(k_2 r)}{J_n(k_2 R)}\right)\cos n\varphi.$$

Из (24) получаем, что

$$h = \frac{c}{\beta g}\left(\frac{(\lambda + k_1^2(\nu + \lambda K))J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\lambda + k_2^2(\nu + \lambda K))J_n(k_2 r)}{J_n(k_2 R)}\right)\cos n\varphi.$$

Постоянная c определяется из краевого условия для температуры (4).

В случае когда $k_1^2 > 0$, $k_2^2 < 0$ (т.е. для (37), (38) и (40)) из (28) и (30) $F(r)$ будет иметь вид суммы функции Бесселя и модифицированной функции Бесселя I_n. С учетом (3) получим

$$F(r) = c\left(\frac{J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \frac{I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right),$$

и с учетом (29) и (24)

$$f = c\left(\frac{J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \frac{I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right)\cos n\varphi, \qquad (41)$$

$$h = \frac{c}{\beta g}\left(\frac{(\lambda + k_1^2(\nu + \lambda K))J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\lambda + k_2^2(\nu + \lambda K))I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right)\cos n\varphi.$$

Для случая $k_1^2 < 0$, $k_2^2 < 0$, т.е. при (39), $F(r)$ будет иметь вид суммы модифицированных функций Бесселя. Функции f и h примут вид

$$f = c\left(\frac{I_n(|k_1|\, r)}{I_n(|k_1|\, R)} - \frac{I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right)\cos n\varphi,$$

$$h = \frac{c}{\beta g}\left(\frac{(\lambda + k_1^2(\nu + \lambda K))I_n(|k_1|\, r)}{I_n(|k_1|\, R)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\lambda + k_2^2(\nu + \lambda K))I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right)\cos n\varphi.$$

Заметим, что если положить в системе (22) (23) $\lambda = 0$, получим стационарное решение задачи Остроумова. При этом дискриминант (33) положителен тогда и только тогда, когда $A > 0$. Из (32), (35) следует, что $k_1^2 > 0$, $k_2^2 < 0$ и скорость w имеет вид (41), а температура вид

$$h = \frac{c}{\beta g}\left(\frac{\nu k_1^2 J_n(k_1 r)}{J_n(k_1 R)} - \frac{\nu k_2^2 I_n(|k_2|\, r)}{I_n(|k_2|\, R)}\right)\cos n\varphi.$$

Это решение совпадает с решением для ньютоновской жидкости.

Заключение

Рассмотрен аналог задачи Остроумова о течении жидкости в вертикальной цилиндрической трубе под действием продольного градиента температуры. В качестве модели, описывающей движение водного раствора полимера, использовалась модель Павловского. В случае когда основное состояние является состоянием покоя, доказан принцип монотонности возмущений. Из него следует, что уравнения для критических возмущений совпадают с уравнениями для классической задачи. Построено точное нестационарное решение задачи, имеющее теоретико-групповую природу. В зависимости от коэффициента затухания (возрастания) и направления градиента температуры решение представляется в виде суммы функций Бесселя или модифицированных функций Бесселя.

Автор выражает благодарность В.В. Пухначеву за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Остроумов Г.А. Естественная конвективная теплопередача в замкнутых вертикальных трубах // Известия Естественно-научного института при Пермском университете. 1947. Т. 12. № 4. С. 113.

2. Остроумов Г.А. Математическая теория конвективного теплообмена в замкнутых вертикальных скважинах // Известия Естественно-научного института при Пермском университете. 1949. Т. 12. № 9. С. 385.

3. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М. ; Л.: Гостехиздат, 1952. 256 с.

4. Toms B.A. Some Observations on the Flow of Linear Polymer Solutions Through Straight Tubes at Large Reynolds Numbers // Proceedings of the First International Congress on Rheology (the Netherlands, Amsterdam). 1948. Vol. 2. P. 135–141.

5. Han W.J., Dong Y.Z., Choi H.J. Applications of Water-Soluble Polymers in Turbulent Drag Reduction // Processes. 2017. Vol. 5. No 2. P. 24. https://doi.org/10.3390/pr5020024

6. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Доклады АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809–812.

7. Войткунский Я.И., Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Тр. Ленингр. кораблестроительного ин-та. 1970. Т. 69. С. 19–26.

8. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1955. Vol. 4. P. 323–425. https://doi.org/ 10.1512/iumj.1955.4.54011

9. Straughan B. Energy Stability in the Benard Problem for a Fluid of Second Grade // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1983. Vol. 34. No 4. P. 502–509. https://doi.org/10.1007/BF00944711

10. Пухначев В.В.,Фроловская О.А. Задача Рэлея — Бенара для раствора полимеров // Известия Алтайского государственного университета. 2023. № 4 (132). С. 78–83. https://doi.org/10.14258/izvasu(2023)4-12

11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

12. Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского государственного университета. 2011. № 69 (1/2). С. 62–69.

References

1. Ostroumov G.A. Natural Convective Heat Transfer in Closed Vertical Tubes. *Izvestiya Estestvenno-Nauchnogo Instituta pri Permskom Universitete*. 1947. Vol. 12. No 4. P. 113. (In Russ.).

2. Ostroumov G.A. Mathematical Theory of Convective Heat Transfer in Closed Vertical Slots. *Izvestiya Estestvenno-Nauchnogo Instituta pri Permskom Universitete.* 1949. Vol. 12. No 9. P. 385. (In Russ.).

3. Ostroumov G.A. *Free Convection Under the Conditions of Internal Problem*. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1952. 256 p. (In Russ.).

4. Toms B.A. Some Observations on the Flow of Linear Polymer Solutions Through Straight Tubes at Large Reynolds Numbers. *Proceedings of the First International Congress on Rheology (the Netherlands, Amsterdam).* 1948. Vol. 2. P. 135–141.

5. Han W.J., Dong Y.Z., Choi H.J. Applications of Water-Soluble Polymers in Turbulent Drag Reduction. *Processes*. 2017. Vol. 5. No 2. P. 24. https://doi.org/10.3390/pr5020024

6. Pavlovskii V.A. Theoretical Description of Weak Aqueous Polymer Solutions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1971. Vol. 200. No. 4. P. 809–812. (In Russ.).

7. Voitkunskii Y.I., Amfilokhiev V.B., Pavlovskii V.A. Equations of Motion of a Fluid, with Its Relaxation Properties Taken into Account. *Trudy Leningradskogo Korablestroitelnogo Instituta*. 1970. Vol. 69. P. 19–26. (In Russ.).

8. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*. 1955. Vol. 4. P. 323–425. https://doi.org/10.1512/iumj.1955.4.54011

9. Straughan B. Energy Stability in the Benard Problem for a Fluid of Second Grade. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 1983. Vol. 34. No 4. P. 502–509. https://doi.org/10.1007/BF00944711

10. Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Rayleigh — Benard problem for Polymer Solution. *Izvestiya of Altai State University*. 2023. No. 4 (132). P. 78–83. (In Russ.).

11. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. *Convective Instability of an Incompressible Fluid*. M.: Nauka, 1972. 392 p. (In Russ.).

12. Pukhnachev V.V. Non-stationary Analogues of the Birikh Solution. *Izvestiya of Altai State University*. 2011. No. 69 (1/2). P. 62–69. (In Russ.).

Информация об авторе

О.А. Бурмистрова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории прикладной и вычислительной гидродинамики, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия.

Information about the author

O.A. Burmistrova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Researcher at the Laboratory of Applied and Computational Hydrodynamics, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia.