

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 85–90.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 4 (144). P. 85–90.

Научная статья

УДК 514.76

DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-12

Симплектические однородные пространства шестимерных нильпотентных несимплектических групп Ли

Николай Константинович Смоленцев¹, Карина Владиславовна Чернова²

¹Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru

²Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, karina.chernova.2002@mail.ru

Original article

Symplectic Homogeneous Spaces of Six-Dimensional Nilpotent Non-Symplectic Lie Groups

Nikolay K. Smolentsev¹, Karina V. Chernova²

¹Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, smolennk@mail.ru

²Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, karina.chernova.2002@mail.ru

Аннотация. Из 34 классов попарно неизоморфных шестимерных нильпотентных алгебр Ли только 26 классов допускают инвариантные симплектические структуры, а оставшиеся восемь классов представляют несимплектические группы Ли, т.е. такие группы, что каждая замкнутая левоинвариантная 2-форма является вырожденной. В 1974 г. Chu Bon-Yao показал, что каждая замкнутая вырожденная левоинвариантная 2-форма ω на группе Ли определяет симплектическую структуру на однородном пространстве этой группы Ли, когда в качестве группы изотропии выступает подгруппа Ли, соответствующая алгебре вырождения 2-формы ω . В данной работе рассмотрены геометрические структуры на симплектических однородных пространствах всех восьми несимплектических 6-мерных нильпотентных групп Ли. Показано, что инвариантные комплексные или паракомплексные структуры существуют в шести случаях из восьми. Показано, что инвариантные метрики на рассматриваемых однородных пространствах существуют только в четырех из восьми случаев. При этом инвариантные метрики являются псевдоримановыми.

Ключевые слова: шестимерные нильпотентные группы Ли, несимплектические группы Ли, однородные пространства, нильногообразия

Abstract. There are only 26 classes among the 34 classes of pairwise non-isomorphic six-dimensional nilpotent Lie algebras that admit invariant symplectic structures. The remaining eight classes represent non-symplectic Lie groups, i.e., groups for which every closed left-invariant 2-form is a degenerate one. In 1974, Chu Bon-Yao showed that every closed degenerate left-invariant 2-form ω on a Lie group determines a symplectic structure on a homogeneous space of this Lie group when the isotropy group is Lie subgroup corresponding to the degeneration algebra of the 2-form ω . This paper considers geometric structures on symplectic homogeneous spaces of all eight non-symplectic 6-dimensional nilpotent Lie groups. It is shown that invariant complex or paracomplex structures exist in six out of eight cases. Invariant metrics on the considered homogeneous spaces are proved to exist only in four out of eight cases. Moreover, the invariant metrics are pseudo-Riemannian ones.

Keywords: six-dimensional nilpotent Lie groups, non-symplectic Lie groups, homogeneous spaces, nilmanifolds

Для цитирования: Смоленцев Н.К., Чернова К.В. Симплектические однородные пространства шестимерных нильпотентных несимплектических групп Ли // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 85–90. DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-12.

Введение

Алгебры Ли несимплектических 6-мерных нильпотентных групп Ли $G_i, i = 1, \dots, 8$, в соответствии с классификацией [1], [2], [3], определены следующими скобками Ли в базисе $e_1, \dots, e_6$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$:

$$\mathfrak{g}_1 : [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_6.$$

$$\mathfrak{g}_2 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5.$$

$$\mathfrak{g}_3 : [e_1, e_2] = e_6, [e_3, e_4] = e_6.$$

$$\mathfrak{g}_4 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5, [e_3, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = -e_6.$$

$$\mathfrak{g}_5 : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_3, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = -e_6.$$

$$\mathfrak{g}_6 : [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_6.$$

$$\mathfrak{g}_7 : [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_6.$$

$$\mathfrak{g}_8 : [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_3, e_4] = e_6.$$

На первых трех группах Ли указанного списка существуют левоинвариантные комплексные структуры, а на остальных — нет ни комплексных, ни симплектических структур. Исследование левоинвариантных геометрических структур на первых трех группах Ли указанного списка проведено в работе [4], а остальные пять групп Ли изучались в работе [5].

Исследование левоинвариантных замкнутых 2-форм на группах Ли и однородных пространствах проведено в работе [6]. Напомним, что если ω — левоинвариантная вырожденная замкнутая 2-форма на группе Ли G , то подпространство вырождения $\mathfrak{h}_\omega = \{X \in \mathfrak{g} : \omega(X, *) = 0\}$ является подалгеброй. Алгебре $\mathfrak{h}_\omega$ соответствует подгруппа Ли H_ω . Если группа H_ω замкнута в G , то фактор-пространство G/H_ω является однородным пространством группы G и 2-форма ω определяет инвариантную симплектическую форму Ω на пространстве G/H_ω . В работе [6] показано, что если форма ω является точной, то фактор-пространство G/H_ω является однородным многообразием. В данной работе исследованы инвариантные геометрические структуры на симплектических однородных пространствах всех групп Ли указанного выше списка в случае, когда левоинвариантная 2-форма ω на группе Ли G является точной, $\omega = d\theta$.

Однородные симплектические многообразия

Для каждой указанной выше связной несимплектической 6-мерной нильпотентной группы Ли

For citation: Smolentsev N.K., Chernova K.V. Symplectic Homogeneous Spaces of Six-Dimensional Nilpotent Non-Symplectic Lie Groups. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 4 (144). P. 85–90. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-12.

$G_1, \dots, G_8$ мы построим однородное симплектическое многообразие, порожденное левоинвариантной вырожденной точной 2-формой, и исследуем вопрос о существовании на нем инвариантных (пара)комплексных [7] и (псевдо)римановых структур.

Теорема 1. *Симплектические однородные пространства шестимерных нильпотентных несимплектических групп Ли $G_i, i = 1, \dots, 8$, определенные левоинвариантными точными 2-формами $\omega = d\theta$, имеют следующие свойства:*

1. На однородном пространстве G_1/H_1 существует семейство инвариантных кэлеровых структур нулевой кривизны.
2. Для группы G_2 однородное пространство G_2/H_2 является двумерным нередуцируемым пространством.
3. Для группы G_3 однородное пространство G_3/H_3 является коммутативной группой Ли размерности 4.
4. На однородных многообразиях G_4/H_4 и G_5/H_5 не существует инвариантных почти (пара)комплексных структур и инвариантных (псевдо)римановых структур.
5. На однородных многообразиях G_6/H_6 и G_8/H_8 существуют инвариантные параккомплексные структуры, но не существует инвариантных (псевдо)римановых структур.
6. На однородном пространстве G_7/H_7 существует семейство инвариантных паракэлеровых структур нулевой кривизны.

Доказательство заключается в прямых вычислениях в соответствии с формулами левоинвариантной геометрии групп Ли и однородных пространств [8], [9], [10]. Рассмотрим подробно все эти группы.

1. Группа Ли G_1 . Не допускает левоинвариантных симплектических структур, но имеет комплексные. Рассмотрим 1-форму $\theta = t_1 e^1 + \dots + t_6 e^6$ (здесь $e^1, \dots, e^6$ — дуальный базис). Ее внешний дифференциал легко вычисляется по формуле $d\theta_{ij} = -t_k C_{ij}^k$, где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли:

$$d\theta = -t_4 e^1 \wedge e^3 - t_6 e^1 \wedge e^4 - t_5 e^2 \wedge e^3 - t_6 e^2 \wedge e^5.$$

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_1$ точной 2-формы $d\theta$ образовано векторами:

$$E_5 = [0, 0, -t_6, t_4, t_5, 0] \text{ и } E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1].$$

Легко видеть, что пространство $\mathfrak{m}_1$, инвариантное относительно присоединенного действия подалгебры $\mathfrak{h}_1$, порождается векторами:

$$E_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0], E_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, 0, t_6, -t_5], E_4 = [0, 0, 0, t_6, 0, -t_4].$$

Перейдем к новому базису E_i . Получаем следующие коммутационные соотношения: $[E_1, E_4] = t_6 E_6$, $[E_1, E_5] = -E_4$, $[E_2, E_3] = t_6 E_6$, $[E_2, E_5] = -E_3$.

Точная форма $d\theta$ в новом базисе будет иметь вид:

$$d\theta = -t_6^2(E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^3).$$

Таким образом, мы имеем разложение $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}_1$, при котором $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{h}_1 = 0$ и $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$.

Для задания геометрической структуры на однородном многообразии G_1/H_1 достаточно [8] задать ее на подпространстве $\mathfrak{m}_1$ при условии ее инвариантности относительно присоединенного действия подалгебры $\mathfrak{h}_1$ на $\mathfrak{m}_1$.

В частности, симплектическая структура Ω_1 на G_1/H_1 , полученная из $d\theta$, определяется формулой $\Omega_1 = -t_6^2(E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^3)$.

Метрический тензор g на $\mathfrak{m}_1$ инвариантный относительно действия $\mathfrak{h}_1$:

$$g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{m}_1, \forall Z \in \mathfrak{h}_1$$

имеет матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & -g_{13} \\ g_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Будем искать инвариантную (пара)комплексную структуру $J = (\psi_{ij})$, согласованную с симплектической формой Ω_1 . В соответствии с разложением $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}_1$ мы рассматриваем также оператор $\tilde{J}$ на $\mathfrak{g}_1$, имеющую блочный вид $\tilde{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где J — это почти (пара)комплексная структура на $\mathfrak{m}_1 = T_o(G_1/H_1)$. Потребуем выполнения условия инвариантности: $J \circ ad_Z = ad_Z \circ J, \forall Z \in \mathfrak{h}_1$, условия согласованности $\Omega_1(X, JY) + \Omega_1(JX, Y) = 0$ и условия интегрируемости:

$$N_J(X, Y) =$$

$$[\tilde{J}X, \tilde{J}Y] + (\tilde{J})^2[X, Y] - [X, \tilde{J}Y] - \tilde{J}[\tilde{J}X, Y] \in \mathfrak{h}_1.$$

Условие инвариантности относительно ad_{E_6} выполняется всегда, потому что E_6 лежит в центре, а инвариантность относительно ad_{E_5} возможна при следующих условиях на параметры:

$$\psi_{14} = 0, \psi_{13} = 0, \psi_{24} = 0, \psi_{23} = 0, \psi_{33} = \psi_{22},$$

$$\psi_{44} = \psi_{11}, \psi_{34} = \psi_{21}, \psi_{43} = \psi_{12}.$$

Согласованность с Ω_1 выполняется при следующих значениях параметров:

$$\psi_{22} = 0, \psi_{11} = 0, \psi_{21} = -\psi_{12}, \psi_{42} = \psi_{31}.$$

При этих условиях выполнено условие интегрируемости $N_J = 0$. Условие паракомплексности $J^2 = 1$ не выполняется, а из условия $J^2 = -1$ получаем следующую комплексную структуру, согласованную с Ω_1 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & -1 \\ -\psi_{32} & \psi_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем семейство инвариантных кэлеровых структур (J, Ω_1, g_J) , где $g_J(X, Y) = \Omega_1(X, JY)$, на однородном пространстве $M_1 = G_1/H_1$. Вычисления в системе Maple показывают, что это пространство нулевой кривизны.

2. Группа Ли G_2 . Не допускает симплектических структур, но имеет комплексные. Точные формы имеют вид: $\omega_2 = d\theta = -t_3 e^1 \wedge e^2 - t_4 e^1 \wedge e^3 - t_5 e^2 \wedge e^3$. Пространство вырождения $\mathfrak{h}_2$ 2-формы $d\theta$ четырехмерно и образовано векторами:

$$E_3 := [t_5, -t_4, t_3, 0, 0, 0], E_4 := [0, 0, 0, 1, 0, 0],$$

$$E_5 := [0, 0, 0, 0, 1, 0], E_6 := [0, 0, 0, 0, 0, 1].$$

Легко видеть, что не существует двумерного подпространства $\mathfrak{m}_2$, инвариантного относительно $\mathfrak{h}_2$. Если $E_1 := [a, b, c, d, e, f]$, то $ad_{E_3} E_1 = [0, 0, at_4 + bt_5, -at_3 + ct_5, -bt_3 - ct_4, 0]$, тогда $(ad_{E_3})^2 E_1 \in \mathfrak{h}_2$. Поэтому однородное пространство G_2/H_2 не редутивно.

3. Группа Ли G_3 . Не допускает симплектических структур, но имеет комплексные. Точные формы имеют вид: $\omega_3 = d\theta = -t_6 e^1 \wedge e^2 - t_6 e^3 \wedge e^4$. Пространство вырождения $\mathfrak{h}_3$ 2-формы $d\theta$ образовано векторами e_5 и e_6 . Тогда $\mathfrak{m}_3$ порождается векторами e_1, e_2, e_3, e_4 .

Поскольку пространство вырождения $\mathfrak{h}_3$ является идеалом, то однородное пространство G_3/H_3 является группой Ли с коммутативной алгеброй Ли $\mathfrak{m}_3$. Другими словами, однородное пространство G_3/H_3 является пространством $\mathbb{R}^4$ либо фактором $\mathbb{R}^4$ по дискретной решетке со стандартной симплектической структурой $\Omega_3 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$.

4. Группа Ли G_4 . Не допускает ни левоинвариантных симплектических структур, ни комплексных. Точные 2-формы имеют вид: $d\theta = e^1 \wedge (-t_3 e^2 - t_4 e^3 - t_5 e^4) + e^2 \wedge (-t_5 e^3 + t_6 e^5) - t_6 e^3 \wedge e^4$.

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_4$ точной 2-формы $d\theta$ порождается векторами:

$$E_5 = [t_6^2, 0, -t_5 t_6, t_4 t_6, -t_3 t_6 - t_5^2, 0] \text{ и } E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1].$$

Легко видеть, что пространство $\mathfrak{m}_4$, инвариантное относительно действия подалгебры $\mathfrak{h}_4$, порождается векторами:

$$E_1 = [1, 1, 0, 0, 0, 0],$$

$$E_2 = [0, 0, t_6^2, t_5 t_6, -t_4 t_6 + t_5 t_6, -t_3 t_6 - t_5^2],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, t_6^4, t_5 t_6^3, -t_4 t_6^3 - t_5^2 t_6^2],$$

$$E_4 = [0, 0, 0, 0, t_6^6, -t_6^6 t_5].$$

Перейдем к новому базису $E_1, \dots, E_6$. Тогда коммутационные соотношения принимают вид: $[E_1, E_2] = 1/t_6^2 E_3 + 1/t_6^4 E_4 + (2t_4 t_6 + t_5^2) E_6$, $[E_1, E_3] = 1/t_6^2 E_4$, $[E_1, E_4] = -t_6^6 E_6$, $[E_1, E_5] = -E_2$, $[E_2, E_3] = t_6^6 E_6$, $[E_2, E_5] = -E_3$, $[E_3, E_5] = -E_4$.

Точная форма $d\theta$ в новом базисе будет иметь вид $d\theta = E^1 \wedge (-2t_4 t_6^2 - t_5^2 t_6) E^2 + t_6^7 E^4 - t_6^7 E^2 \wedge E^3$.

Не существует почти (пара)комплексных структур на $\mathfrak{m}_4$ инвариантных относительно действия $\mathfrak{h}_4$. Кроме того, каждая симметричная 2-форма g на $\mathfrak{m}_4$, инвариантная относительно действия $\mathfrak{h}_4$, является вырожденной, поскольку $g(E_i, E_4) = 0$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$.

5. Группа Ли G_5 . Не допускает ни левоинвариантных симплектических структур, ни комплексных. Точные 2-формы имеют вид: $d\theta = e^1 \wedge (-t_3 e^2 - t_4 e^3 - t_5 e^4) + t_6 e^2 \wedge e^5 - t_6 e^3 \wedge e^4$.

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_5$ точной 2-формы $d\theta$ порождается векторами: $E_5 = [-t_6, 0, t_5, -t_4, t_3, 0]$ и $E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$.

Пространство $\mathfrak{m}_5$, инвариантное относительно действия подалгебры $\mathfrak{h}_5$, порождается векторами:

$$E_1 = [1, 1, 0, 0, 0, 0], E_2 = [0, 0, -t_6, -t_5, t_4, t_3],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, t_6^2, t_5 t_6, -t_4 t_6 - t_5^2],$$

$$E_4 = [0, 0, 0, 0, -t_6^3, t_6^2].$$

Перейдем к новому базису E_i . Тогда коммутационные соотношения принимают вид:

$$[E_1, E_2] = -1/t_6 E_3 - (2t_4 + (t_5^2)/t_6) E_6, [E_1, E_3] = -1/t_6 E_4, [E_1, E_4] = t_6^3 E_6, [E_1, E_5] = -E_2, [E_2, E_3] = -t_6^3 E_6, [E_2, E_5] = -E_3, [E_3, E_5] = -E_4.$$

Точная форма $d\theta$ в новом базисе: $d\theta = E^1 \wedge ((2t_4 t_6 + t_5^2) E^2 - t_6^4 E^4) + t_6^4 E^2 \wedge E^3$.

Несложные вычисления показывают, что на однородном многообразии G_5/H_5 не существует инвариантных почти комплексных и почти паракомплексных структур. Также не существует инвариантных (псевдо)римановых структур, каждая симметричная 2-форма на $\mathfrak{m}_5$, инвариантная относительно действия $\mathfrak{h}_5$, является вырожденной: $g(E_i, E_4) = 0$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$.

6. Группа Ли G_6 . Не допускает ни левоинвариантных симплектических структур, ни комплексных. Точные 2-формы имеют вид: $d\theta = e^1 \wedge (-t_4 e^2 - t_5 e^3 - t_6 e^4) - t_6 e^3 \wedge e^5$.

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_6$ точной 2-формы $d\theta$ порождается векторами: $E_5 = [0, -t_6, 0, t_4, 0, 0]$ и $E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$. Легко видеть, что пространство $\mathfrak{m}_6$, инвариантное относительно действия подалгебры $\mathfrak{h}_6$, порождается векторами

$$E_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0], E_2 = [0, 0, 1, 0, 0, 0],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, 0, 1, 0], E_4 = [0, 0, 0, t_6, 0, -t_4].$$

Перейдем к новому базису E_i . Тогда коммутационные соотношения принимают вид: $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_4] = t_6 E_6$, $[E_1, E_5] = -E_4$, $[E_2, E_3] = E_6$.

Точная форма $d\theta$ в новом базисе: $d\theta = E^1 \wedge (-t_5 E^2 - t_6^2 E^4) - t_6 E^2 \wedge E^3$.

Простые вычисления показывают, что на однородном многообразии G_6/H_6 существуют паракомплексные структуры вида:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & -1 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\psi_{41}\psi_{21} + \psi_{31}\psi_{43}}{2} & \psi_{42} & \psi_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Инвариантных (псевдо)римановых структур на пространстве G_6/H_6 не существует: $g(E_i, E_4) = 0$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$.

7. Группа Ли G_7 . Не допускает ни левоинвариантных симплектических структур, ни комплексных. Точные 2-формы имеют вид: $d\theta = e^1 \wedge (-t_4 e^2 - t_6 e^4) - t_5 e^2 \wedge e^3 - t_6 e^3 \wedge e^5$.

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_7$ точной 2-формы $d\theta$ порождается векторами: $E_5 = [0, t_6, 0, -t_4, t_5, 0]$ и $E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$.

Легко видеть, что пространство $\mathfrak{m}_7$, инвариантное относительно действия подалгебры $\mathfrak{h}_7$, порождается векторами:

$$E_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0], E_2 = [0, 0, 1, 0, 0, 0],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, -t_6, 0, t_4], E_4 = [0, 0, 0, 0, t_6, -t_5].$$

Перейдем к новому базису E_i . Тогда коммутационные соотношения принимают вид: $[E_1, E_3] = -t_6 E_6$, $[E_1, E_5] = -E_3$, $[E_2, E_4] = t_6 E_6$, $[E_2, E_5] = -E_4$.

Точная форма $d\theta$ в новом базисе будет иметь вид: $d\theta = t_6^2 (E^1 \wedge E^3 - E^2 \wedge E^4)$.

На пространстве $\mathfrak{m}_7$ существует инвариантная относительно присоединенного действия подалгебры $\mathfrak{h}_7$ паракомплексная структура:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & -\psi_{41} & 0 & 1 \\ \psi_{41} & -\psi_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом выполнено условие ее согласованности с симплектической структурой $\Omega_7 = E^1 \wedge E^3 - E^2 \wedge E^4$ на G_7/H_7 .

Рассмотрим ассоциированную метрику $g_J(X, Y) = \Omega_7(X, JY)$. Получаем семейство инвариантных паракэлеровых структур (J, Ω_7, g_J) нулевой кривизны на однородном пространстве $M_7 = G_7/H_7$.

8. Группа Ли G_8 . Не допускает ни левоинвариантных симплектических структур, ни комплексных. Точные 2-формы имеют вид: $d\theta = e^1 \wedge (-t_5 e^2 - t_6 e^5) - t_6 e^3 \wedge e^4$.

Пространство вырождения $\mathfrak{h}_8$ точной 2-формы $d\theta$ порождается векторами: $E_5 = [0, -t_6, 0, 0, t_5, 0]$ и $E_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$.

Легко видеть, что пространство $\mathfrak{m}_8$, инвариантное относительно действия подалгебры $\mathfrak{h}_8$, порождается векторами

$$E_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0], E_2 = [0, 0, 1, 0, 0, 0],$$

$$E_3 = [0, 0, 0, 1, 0, 0], E_4 = [0, 0, 0, 0, t_6, -t_5].$$

Перейдем к новому базису E_i . Получаем следующие структурные константы: $[E_1, E_4] = t_6 E_6$, $[E_1, E_5] = -E_4$, $[E_2, E_3] = E_6$.

Точная форма $d\theta$ в новом базисе будет иметь вид: $d\theta = -t_6^2(E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^3)$.

Простые вычисления показывают, что на однородном многообразии G_8/H_8 существуют паракомплексные структуры вида:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & -1 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\psi_{42}\psi_{21} + \psi_{43}\psi_{31}}{2} & \psi_{42} & \psi_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Инвариантных (псевдо)римановых структур на пространстве G_8/H_8 не существует: $g(E_i, E_4) = 0$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$.

Заключение

В работе получены новые примеры симплектических нильмногообразий с несимплектическими 6-мерными группами преобразований и с двумерными группами изотропии. Исследованы их геометрические свойства. В частности, показано, что только в четырех из восьми рассматриваемых случаев нильмногообразий существуют инвариантные псевдоримановы метрики.

Библиографический список

1. Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L. Pseudo-Kähler Metrics on Six-Dimensional Nilpotent Lie Algebras // *Journal of Geometry and Physics*. 2004. Vol. 50. P. 115–137.
2. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. Symplectic or Contact Structures on Lie Groups. // *Differential Geometry and Its Applications*. 2004. Vol. 21 (1). P. 41–54.
3. Salamon S. Complex Structures on Nilpotent Lie Algebras // *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2001. Vol. 157. P. 311–333. (arXiv:math/9808025v2, [math.DG])
4. Smolentsev N. K., Chernova K. V. On Left-Invariant Semi-Kähler Structures on Sixdimensional Nilpotent Nonsymplectic Lie Groups // arXiv:2408.14733v2 [math.DG]. 2024, 13 p.
5. Smolentsev N.K. Left-Invariant Almost Paracomplex Structures on Six Dimensional Nilpotent Lie Groups // arXiv:1801.07991, [math.DG]). 2018, 14 p.
6. Chu Bon-Yao. Symplectic Homogeneous Spaces // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1974. Vol. 197. P. 154–159.
7. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // *Успехи математических наук*. 2009. Т. 64. Вып. 1 (385). С. 3–50.
8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. II. 416 с.
9. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Том 1, 384 с.
10. Milnor J. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups // *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

References

1. Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L. Pseudo-Kähler Metrics on Six-Dimensional Nilpotent Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*. 2004. Vol. 50. P. 115–137.
2. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. Symplectic or Contact Structures on Lie Groups. *Differential Geometry and Its Applications*. 2004. Vol. 21. No 1. P. 41–54.
3. Salamon S. Complex Structures on Nilpotent Lie Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2001. Vol. 157. P. 311–333. arXiv: math/9808025v2 [math.DG].
4. Smolentsev N.K., Chernova K.V. On Left-Invariant Semi-Kähler Structures on Six-Dimensional Nilpotent Nonsymplectic Lie Groups. arXiv: 2408.14733v2 [math.DG]. 2024. 13 p.
5. Smolentsev N. K. Left-Invariant Almost Paracomplex Structures on Six Dimensional Nilpotent Lie Groups. arXiv: 1801.07991 [math.DG]. 2018. 14 p.
6. Chu Bon-Yao. Symplectic Homogeneous Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1974. Vol. 197. P. 154–159.
7. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. Homogeneous Para-Kähler Einstein Manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 2009. Vol. 64. No 1. P. 1–43. (In Russ.).
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Moscow, Nauka, 1981. Vol. II. 416 p. (In Russ.).
9. Besse A. *Einstein Manifolds*. Vol. 1. Moscow. Mir, 1990. 384 p. (In Russ.).
10. Milnor J. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups. *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

Информация об авторах

Н.К. Смоленцев, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;

К.В. Чернова, магистрант Института фундаментальных наук, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия.

Information about the authors

N.K. Smolentsev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia;

K.V. Chernova, Master Student of the Institute of Fundamental Sciences, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.