

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 79–84.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 4 (144). P. 79–84.

Научная статья

УДК 517.9 + 534.1 + 532.3

DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-11

**Решение задачи о колебаниях вязкоупругой
полубесконечной ледовой пластины методом
вертикальных мод**

*Татьяна Андреевна Сибирякова¹, Кристина Евгеньевна Найденова²,
Константин Александрович Шишмарев³*

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
sibiriakova.tatiana@mail.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
kristina-akulova00@mail.ru

³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, shishmarev.k@mail.ru

Original article

**Solution of the Problem of Oscillations of a Viscoelastic
Semi-Infinite Ice Plate Using the Vertical Mode Method**

Tatyana A. Sibiryakova¹, Kristina E. Naydenova², Konstantin A. Shishmarev³

¹Altai State University, Barnaul, Russia, sibiriakova.tatiana@mail.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, kristina-akulova00@mail.ru

³Altai State University, Barnaul, Russia, shishmarev.k@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о колебаниях полубесконечной вязкоупругой пластины. Вязкость льда моделируется в рамках модели Кельвина — Фойгта вязкоупругого материала. Жидкость под пластиной невязкая, несжимаемая и конечной глубины. Колебания вызваны осцилляциями внешней нагрузки, расположенной на свободной поверхности вблизи края пластины. На другом краю свободной поверхности расположена непроницаемая стенка. Решение задачи разбивается на две подзадачи для поиска потенциалов скорости течения жидкости под пластиной и под свободной поверхностью. Потенциал под пластиной определяется разложением на вертикальные моды. Для использования вертикальных мод необходимо вычислять волновые числа дисперсионного соотношения с учетом вязкости. Под свободной поверхностью потенциал определяется с помощью метода разделения переменных. Оба потенциала и их нормальные производные удовлетворяют условию непрерывности под краем пластины. Рассмотрен случай добавления конечной плавающей отколовшейся пластины.

Ключевые слова: ледовая пластина, гидроупругие волны, вязкость, вертикальные моды, внешняя нагрузка

Abstract. Abstract. The paper considers the problem of oscillations of a semi-infinite viscoelastic plate. The viscosity of ice is modeled by the Kelvin — Voigt viscoelastic material model. The liquid is non-viscous, incompressible, and of finite depth. Oscillations of an external load placed on the free surface near the edge of the plate induce the oscillations of the plate. There is an impermeable wall on the other edge of the free surface. The solution of the problem is split into two subproblems. The first one is to find the velocity potential of the fluid flow beneath the plate, while the other one is to find the same potential beneath the free surface. The potential beneath the plate can be determined using expansion into vertical modes. Therefore, it is necessary to calculate the wave numbers of the dispersion relation considering the viscosity of ice. The potential beneath the free surface is determined using the variable separation method. Both potentials and their normal derivatives satisfy the continuity condition under the edge of the plate. The case of adding a finite floating detached plate is considered.

Keywords: ice plate, hydroelastic waves, viscosity, vertical modes, external load

Для цитирования: Сибирякова Т.А., Найденова К.Е., Шишмарев К.А. Решение задачи о колебаниях вязкоупругой полубесконечной ледовой пластины методом вертикальных мод // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 79–84. DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-11.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01096, <https://rscf.ru/project/23-71-01096/>.

Введение

Задачи волнообразного движения в жидкости с тонкой упругой пластиной, плавающей на верхней границе жидкости, активно изучаются в последнее время. Широко изучены задачи, связанные с распространением гравитационных волн в ледовых покровах, возникающие из-за воздействия внешних нагрузок. Основы моделирования таких задач изложены в [1, 2].

Последние исследования сосредоточены на изучении взаимодействия между ледовым покровом и прибрежными сооружениями, такими как стенки (причалы), опоры (поддержки мостов и нефтяных платформ) и др. Рассмотрены задачи движения нагрузки в канале, у края ледового покрова, между двумя ледовыми покровами, по жидкой поверхности вдоль края ледового покрова и многие другие, см., например, [3, 4]. Нелинейные модели взаимодействия жидкости со льдом изучены численно и аналитически в [5, 6]. Модели, учитывающие сжимаемость льда, изучены в [7–9]. Эти модели применяются не только для описания ледового покрова, но и для других плавучих упругих конструкций, таких как причалы и волнорезы [10, 11].

В данной статье рассматриваются колебания полубесконечной пластины, вызванные осцилляциями внешней нагрузки, расположенной на свободной поверхности вблизи пластины. Новизной является учет вертикальной стенки на другом краю свободной поверхности и учет вязкости ледовой пластины для демпфирования колебаний в рассматриваемой постановке.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о колебаниях вязкоупругой полубесконечной пластины, изначально занимающей область $x \geq L_0$, вызванных периодическими осцилляциями внешней нагрузки, находящейся на свободной поверхности вблизи пластины. Свободная поверхность занимает область $0 < x < L_0$. На левой границе свободной поверхности расположена непроницаемая стенка. Состояние покоя свободной поверхности и ледовой пластины соответствует $z = 0$. Рассматривается конечная глубина водоема $z = -H$. Внешняя нагрузка моделируется гладким локализованным пятном давления и расположена на свободной поверхности

For citation: Sibiryakova T.A., Naydenova K.E., Shishmarev K.A. Solution of the Problem of Oscillations of a Viscoelastic Semi-Infinite Ice Plate Using the Vertical Mode Method. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 4 (144). P. 79–84. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-11.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No 23-71-01096, <https://rscf.ru/project/23-71-01096/>.

не касаясь пластины. Амплитуда внешней нагрузки осциллирует с заданной частотой ω . Схема задачи изображена на рисунке 1. Задача решается в рамках линейной теории гидроупругости. Ледовая пластина моделируется тонкой упругой пластиной в рамках модели Кирхгофа — Лява. Вязкость пластины моделируется через учет времени запаздывания в рамках модели Кельвина — Фойгта вязкоупругого материала. Жидкость в рассматриваемом водоеме невязкая и несжимаемая. Течение, вызванное колебаниями внешней нагрузки и пластиной, считается потенциальным.

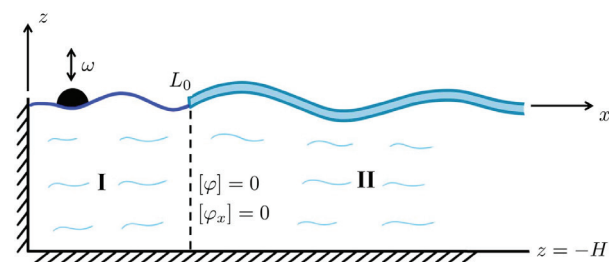


Рис. 1. Схема задачи

Система основных уравнений в рамках рассматриваемой модели имеет вид

$$\rho_\ell g w + \rho_\ell \varphi_t = P(x, t) \quad (0 < x < L_0, z = 0), \quad (1)$$

$$M w_{tt} + D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) w_{xxxx} = -\rho_\ell g w - \rho_\ell \varphi_t \quad (x \geq L_0, z = 0), \quad (2)$$

$$w_{xx} = w_{xxx} = 0 \quad (x = L_0), \quad (3)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad (x > 0, -H < z < 0), \quad (4)$$

$$w_t = \varphi_z \quad (x > 0, z = 0), \quad (5)$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi_x = 0 \quad (x = 0), \quad (6)$$

где $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости течения жидкости, w — функция, описывающая вертикальное перемещение свободной поверхности ($x < L_0$) и вертикальное перемещение (прогибы льда) ледовой пластины ($x \geq L_0$), M — масса льда на единицу площади, D — изгибная жесткость пластины, ρ_ℓ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, $P(x, t)$ — форма внешней нагрузки, t — время, τ — время запаздывания. Ледовая пластина удовлетворяет условиям свободного края на границе свободная поверхность/пластина.

Рассматривается периодическое по времени решение задачи (1) – (6): $w(x, t) = \text{Re}[W(x)e^{-i\omega t}]$, $\varphi(x, z, t) = \text{Re}[-i\omega\phi(x, z, t)e^{-i\omega t}]$, $P(x, t) = \text{Re}[P_0P_1(x)e^{-i\omega t}]$. Задача решается в безразмерных переменных, где за масштаб длины выбрано L_0 , масштаб прогибов льда w_{sc} равен масштабу длины, масштаб потенциала скорости течения $\varphi_{sc} = L_0^2\omega$. В безразмерных переменных система уравнений примет вид (здесь и далее все функции и переменные записаны в безразмерной форме)

$$-W + \gamma\phi = qP_1(x) \quad (0 < x < 1, z = 0), \quad (7)$$

$$-\delta\gamma W + \beta(1 - i\varepsilon)W_{xxxx} + W = \gamma\phi \quad (x \geq 1, z = 0), \quad (8)$$

$$W_{xx} = W_{xxx} = 0 \quad (x = 1), \quad (9)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (x > 0, -H < z < 0), \quad (10)$$

$$W = \phi_z \quad (x > 0, z = 0), \quad (11)$$

$$\phi_z = 0 \quad (z = -h), \quad \phi_x = 0 \quad (x = 0), \quad (12)$$

где $\gamma = \omega^2 L_0/g$ – безразмерная частота, $\beta = D/(\rho_\ell g L_0^4)$ – безразмерная жесткость, $\delta = M/(L_0 \rho_\ell)$ – отношение масс, $h = H/L_0$ – безразмерная глубина, $\varepsilon = \tau\omega$ – безразмерное время запаздывания, $q = P_0/(\rho_\ell g L_0)$. Решение задачи (7)–(12) зависит от указанных безразмерных параметров и формы внешней нагрузки $P_1(x)$. Неизвестными функциями являются потенциал ϕ и прогибы льда w .

2. Метод решения

Решение задачи (7) – (12) будем строить отдельно в областях I и II, см. рисунок 1. Для решения задачи в области II применим метод вертикальных мод [12]. В этом методе потенциал ищется в форме

$$\phi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n x} f_n(z), \quad (13)$$

где $f_n(z)$ – вертикальные моды, имеющие вид

$$f_n(z) = \frac{\cosh(k_n(z + h))}{\cosh(k_n h)}.$$

Эти моды не ортогональны в классическом смысле, см. [12]. Собственными значениями этих мод являются волновые числа k_n , которые представляют собой решение дисперсионного уравнения

$$(1 - \delta\gamma + \beta(1 - i\varepsilon)k_n^4)k_n \tanh(k_n h) = \gamma. \quad (14)$$

В случае когда вязкость отсутствует, $\tau = 0$, решением уравнения (14) будет 2 симметричных действительных корня, $\pm k_0$, 2 комплексных корня с симметричной действительной частью, $k_{-1} = s_1 + id_1$, $k_{-2} = -s_1 + id_1$ и четное число чисто мнимых корней $k_n = i\kappa_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Действительный положительный корень описывает распространяющиеся вдоль ледовой пластины периодические волны, отрицательный действительный

корень дает волны, амплитуда которых растет при $x \rightarrow \infty$ и не учитывается в решении. В случае если $\tau \neq 0$, то действительный положительный корень тоже станет комплексным, $k_0 = s_0 + id_0$, что означает, что все волны в ледовой пластине будут затухать при $x \rightarrow \infty$. Решение для потенциала в области I имеет вид

$$\phi = \frac{A_0}{2} + \phi_1 + \phi_2, \quad (15)$$

где потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа в области течения и краевым условиям

$$\phi_{1,x} = 0 \quad (x = 0) \quad \phi_{1,x} = 0 \quad (x = 1),$$

$$\phi_{1,z} = W \quad (z = 0, 0 < x < 1), \quad \phi_{1,z} = 0 \quad (z = -h),$$

$$\phi_{2,x} = 0 \quad (x = 0) \quad [\phi_{2,x}] = 0 \quad (x = 1),$$

$$\phi_{2,z} = 0 \quad (z = 0, 0 < x < 1), \quad \phi_{2,z} = 0 \quad (z = -h),$$

где условие с квадратными скобками означает непрерывность нормальной производной. Решением для этих потенциалов будут следующие функции

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\pi n x) \psi_n(z), \quad (16)$$

$$\psi_n(z) = \frac{\cosh(\pi n(z + h))}{\cosh(\pi n h)},$$

$$\phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi_n(x) \cos\left(\frac{\pi n}{h} z\right), \quad (17)$$

$$\xi_n(x) = \frac{\cosh(\pi n x/h)}{\cosh(\pi n/h)}.$$

Задача решается методом редукции. Ограничим верхний предел суммы в (13), (16) и (17) числом N . Получим $3N + 4$ неизвестных. Потенциал (15) должен удовлетворять краевому динамическому условию (7). Подставляя (16) и (17) в (7), получим

$$-\sum_{n=1}^N A_n \cos(\pi n x) \pi n \tanh(\pi n h) + \gamma \frac{A_0}{2} +$$

$$\gamma \left(\sum_{n=1}^N A_n \cos(\pi n x) + \sum_{n=1}^N B_n \xi_n(x) \right) = qP_1.$$

Домножая получившееся уравнение на $\cos(\pi j x)$, $j = 0, 1, \dots, N$ и интегрируя результат по x , получим систему $N + 1$ алгебраических уравнений

$$-\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2} \delta_{nj} \pi n \tanh(\pi n h) + \gamma \frac{A_0}{2} \delta_{0j} +$$

$$\gamma \left(\sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2} \delta_{nj} + \sum_{n=1}^N B_n \xi_{nj} \right) = qP_{1j}, \quad (18)$$

$$\xi_{nj} = \int_0^1 \xi_n \cos(\pi j x) dx, \quad P_{1j} = \int_0^1 P_1 \cos(\pi j x) dx.$$

Потенциал ϕ_2 удовлетворяет условию непрерывности нормальной производной на границе $x = 1$, что дает

$$\sum_{n=1}^N B_n \frac{\pi n}{h} \tanh\left(\frac{\pi n}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h} z\right) = \sum_{n=-2}^N i a_n k_n e^{i k_n} f_n(z).$$

Домножая получившееся уравнение на $\cos(\pi j z/h)$, $j = 1, \dots, N$ и интегрируя результат по z , получим систему N алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^N B_n \frac{\pi n}{h} \tanh\left(\frac{\pi n}{h}\right) \frac{h}{2} \delta_{nj} = \sum_{n=-2}^N i a_n k_n e^{i k_n} f_{nj}, \quad (19)$$

$$f_{nj} = \int_{-h}^0 f_n \cos(\pi j z/h) dz.$$

Дополнительно суммарный потенциал $\phi(x, z)$ должен удовлетворять условию непрерывности на границе $x = 1$. С учетом (13), (16) и (17) это условие имеет вид

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n (-1)^{n+1} \psi_n(z) + \sum_{n=1}^N B_n \cos\left(\frac{\pi n}{h} z\right) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n e^{i k_n} f_n(z).$$

Домножая получившееся уравнение на $\cos(\pi j z/h)$, $j = 0, 1, \dots, N$ и интегрируя результат по z , получим систему $N + 1$ алгебраических уравнений

$$\frac{A_0}{2} h \delta_{0j} + \sum_{n=1}^N A_n (-1)^{n+1} \psi_{nj} + \sum_{n=1}^N B_n \frac{h}{2} \delta_{nj} = \sum_{n=-2}^N a_n e^{i k_n} f_{nj}, \quad (20)$$

$$\psi_{nj} = \int_{-h}^0 \psi_n \cos(\pi j z/h) dz.$$

В сумме полученные соотношения дают $3N+2$ уравнений для поиска $3N+4$ неизвестных. Последние два уравнения получим из краевых условий свободного края (9)

$$\sum_{n=-2}^N a_n k_n^2 e^{i k_n} = 0, \quad \sum_{n=-2}^N a_n k_n^3 e^{i k_n} = 0. \quad (21)$$

Система уравнений (18)–(21) является замкнутой системой $3N+4$ уравнений с ненулевой правой частью для поиска $3N+4$ неизвестных. Эта система может быть записана в матричной форме и решена соответствующим образом.

3. Учет отколовшейся части пластины

После вычисления прогибов и деформаций в полубесконечной ледовой пластине далее определяется точка, в которой деформации в ледовом покрове будут максимальными. Наличие такой точки гарантируется затуханием колебаний пластины в силу вязкости льда. Обозначим эту точку $x = l_1 > 1$. Рассмотрим теперь задачу, когда часть пластины длиной $l_1 - 1$ откололась и находится в свободном контакте с основной полубесконечной пластиной, см. рисунок 2. В этом случае область, занимаемая жидкостью, делится на 3 части. В левой и правой частях используется такое же, как в предыдущем пункте, разложение на вертикальные моды во II области и на сумму двух потенциалов в I области.

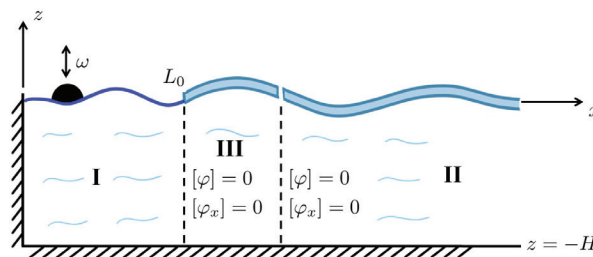


Рис. 2. Схема задачи с отколовшейся пластиной

В III области предлагается также использовать метод вертикальных мод

$$\phi(x, z) = \sum_{n=-2}^N \left(b_n e^{i k_n (x-1)} + c_n e^{i k_n (l_1-x)} \right) f_n(z). \quad (22)$$

Потенциал (22) удовлетворяет динамическому и кинематическому условиям для плавающей пластины

$$-\delta \gamma W + \beta (1 - i \varepsilon) W_{xxxx} + W = \gamma \phi, \\ W = \phi_z \quad (1 \leq x \leq l_1, z = 0),$$

условию непротекания на дне и должен удовлетворять условиям непрерывности потенциала и его нормальной производной на границах с областями I и II

$$[\phi] = 0, \quad [\phi_x] = 0, \quad (x = 1, x = l_1). \quad (23)$$

Соответствующий прогиб отколовшейся пластины должен удовлетворять условиям свободного края на краях $x = 1$, $x = l_1$. При таком разложении имеем в сумме $5N+10$ неизвестных: a_n, A_n, B_n, b_n, c_n . Уравнения для поиска этих неизвестных строятся так же, как в предыдущем параграфе. Из краевого динамического условия

(7) получим $N+1$ уравнение. Далее $2N+1$ уравнение получим из условий непрерывности (23) при $x=1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_n \frac{\pi n}{h} \tanh\left(\frac{\pi n}{h}\right) \frac{h}{2} \delta_{nj} = \\ \sum_{n=-2}^N \left(i b_n k_n - i c_n k_n e^{i k_n (l_1-1)} \right) f_{nj}, \\ \frac{A_0}{2} h \delta_{0j} + \sum_{n=1}^N A_n (-1)^{n+1} \psi_{nj} + \sum_{n=1}^N B_n \frac{h}{2} \delta_{nj} = \\ \sum_{n=-2}^N \left(b_n + c_n e^{i k_n (l_1-1)} \right) f_{nj}. \end{aligned}$$

На другой границе областей получим $2N+2$ уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2}^N \left(i b_n k_n e^{i k_n (l_1-1)} - i c_n k_n \right) f_{nj} = \\ \sum_{n=-2}^N i a_n k_n e^{i k_n l_1} f_{nj}, \\ \sum_{n=-2}^N \left(b_n e^{i k_n (l_1-1)} + c_n \right) f_{nj} = \\ \sum_{n=-2}^N a_n e^{i k_n l_1} f_{nj}. \end{aligned}$$

Оставшиеся 6 уравнений выразим из краевых условий свободного края для отколовшейся и основной полубесконечной пластины

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2}^N \left(b_n k_n^2 + c_n k_n^2 e^{i k_n (l_1-1)} \right) = 0, \\ \sum_{n=-2}^N \left(b_n k_n^3 - c_n k_n^3 e^{i k_n (l_1-1)} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-2}^N \left(b_n k_n^2 e^{i k_n (l_1-1)} + c_n k_n^2 \right) = 0,$$

$$\sum_{n=-2}^N \left(b_n k_n^3 e^{i k_n (l_1-1)} - c_n k_n^3 \right) = 0,$$

$$\sum_{n=-2}^N a_n k_n^2 e^{i k_n l_1} = 0, \quad \sum_{n=-2}^N a_n k_n^3 e^{i k_n l_1} = 0.$$

Аналогичным образом могут быть добавлены следующие отколовшиеся части ледовой пластины. Каждая новая отколовшаяся часть пластины добавляет $2N+6$ неизвестных.

Заключение

Рассмотрена двумерная задача о колебаниях полубесконечной вязкоупругой пластины. Колебания вызваны периодической внешней нагрузкой, находящейся на поверхности жидкости вблизи края пластины. С другой стороны область жидкости ограничена непроницаемой стенкой. Предложен метод решения рассматриваемой задачи в периодической форме. Потенциал скорости течения жидкости под пластиной и под свободной поверхностью определяется отдельно. Потенциал под пластиной определяется методом вертикальных мод. Для использования этих мод необходимо вычислить волновые числа соответствующего дисперсионного соотношения с учетом вязкости. Всего будет 3 комплексных волновых числа с ненулевой действительной частью и счетное число мнимых корней. Потенциал под свободной поверхностью раскладывается на сумму двух потенциалов, учитывающих непрерывность потенциала и его нормальной производной под краем пластины. В итоге задача сведена к замкнутой алгебраической системе из $3N+4$ неизвестных. Рассмотрен случай добавления конечной плавающей отколовшейся пластины. Решение такой задачи методом вертикальных мод добавляет $2N+6$ уравнений и неизвестных за каждую отдельно плавающую пластину.

Библиографический список

1. Nugroho W.S., Wang K., Hosking R.J., Milinazzo F. Time-Dependent Response of a Floating Flexible Plate to an Impulsively Started Steadily Moving Load // *Journal of Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 381. P. 337–355.
2. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
3. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Нестационарные колебания ледяного покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления // *Вычис-*

лительные технологии. 2019. Т. 24. № 2. С. 111–128. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.010

4. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледяного покрова и гидроупругих волн // *Известия Алтайского государственного университета*. 2015. Т. 85. № 1-1. С. 126–131.

5. Plotniko P.I., Toland, J.F. Modelling Nonlinear Hydroelastic Waves // *Philosophical Transactions of the Royal Society*

of London Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2011. Vol. 369. P. 2942–2956. DOI: 10.1098/rsta.2011.0104

6. Parau E.I., Dias F. Nonlinear Effects in the Response of a Floating Ice Plate to a Moving Load // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 460. P. 281–305.

7. Stepanyants Y., Sturova I. Waves on a Compressed Floating Ice Plate Caused by Motion of a Dipole in Water // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 907. P. A7.

8. Stepanyants Y., Sturova I. Hydrodynamic Forces Exerting on an Oscillating Cylinder under Translational Motion in Water Covered by Compressed Ice // *Water*. 2021. Vol. 13. No 6. P. 822.

9. Il'ichev A.T. Solitary Wave Packets Beneath a Compressed Ice Cover // *Fluid Dynamics*. 2016. Vol. 51. P. 327–337.

10. Amouzadrad P., Mohapatra S.C., Guedes Soares C. Hydroelastic Response to the Effect of Current Loads on Floating Flexible Offshore Platform // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023. Vol. 11. No 2. P. 437.

11. Amouzadrad P., Mohapatra S.C., Guedes Soares C. Effect of Mooring Lines on the Hydroelastic Response of a Floating Flexible Plate Using the BIEM Approach // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2021. Vol. 9. No 9. P. 941.

12. Korobkin A., Malenica S., Khabakhpasheva T. The Vertical Mode Method in the Problems of Flexural-Gravity Waves Diffracted by a Vertical Cylinder // *Applied Ocean Research*. 2019. Vol. 84. P. 111–121.

References

1. Nugroho W.S., Wang K., Hosking R.J., Milinazzo F. Time-Dependent Response of a Floating Flexible Plate to an Impulsively Started Steadily Moving Load. *Journal of Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 381. P. 337–355.

2. Heisin D.E. *Ice Cover Dynamics*. Leningrad: Hydrometeorological Data, 1967. 215 p. (In Russ.)

3. Shishmarev K.A., Khabakhpasheva T.I. Unsteady Deflection of Ice Cover in a Frozen Channel Under a Moving Load. *Computational Technologies*. 2019. Vol. 24. No 2. P. 111–128. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2019.24.2.010>

4. Shishmarev K.A. Mathematical Problems of Ice Sheet and Hydroelastic Waves Interaction Modeling. *Izvestiya of Altai State University*. 2015. Vol. 85. No 1-1. P. 126–131. (In Russ.). DOI: [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2015\)1.1-22](https://doi.org/10.14258/izvasu(2015)1.1-22)

5. Plotnikov P.I., Toland J.F. Modelling Nonlinear Hydroelastic Waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2011. Vol. 369. P. 2942–2956. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0104>

6. Parau E.I., Dias F. Nonlinear Effects in the Response of a Floating Ice Plate to a Moving Load. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 460. P. 281–305.

7. Stepanyants Y., Sturova I. Waves on a Compressed Floating Ice Plate Caused by Motion of a Dipole in Water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 907. P. A7.

8. Stepanyants Y., Sturova I. Hydrodynamic Forces Exerting on an Oscillating Cylinder under Translational Motion in Water Covered by Compressed Ice. *Water*. 2021. Vol. 13. No 6. P. 822.

9. Il'ichev A.T. Solitary Wave Packets Beneath a Compressed Ice Cover. *Fluid Dynamics*. 2016. Vol. 51. P. 327–337.

10. Amouzadrad P., Mohapatra S.C., Guedes Soares C. Hydroelastic Response to the Effect of Current Loads on Floating Flexible Offshore Platform. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023. Vol. 11. No 2. P. 437.

11. Amouzadrad P., Mohapatra S.C., Guedes Soares C. Effect of Mooring Lines on the Hydroelastic Response of a Floating Flexible Plate Using the BIEM Approach. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2021. Vol. 9. No 9. P. 941.

12. Korobkin A., Malenica S., Khabakhpasheva T. The Vertical Mode Method in the Problems of Flexural-Gravity Waves Diffracted by a Vertical Cylinder. *Applied Ocean Research*. 2019. Vol. 84. P. 111–121.

Информация об авторах

Т.А. Сибирякова, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

К.Е. Найденова, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

К.А. Шишмарев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

T.A. Sibiryakova, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

K.E. Naydenova, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

K.A. Shishmarev, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Altai State University, Barnaul, Russia.