

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 73–78
 Izvestiya of Altai State University. 2025. No 4 (144). P. 73–78.

Научная статья

УДК 514.172

DOI:10.14258/izvasu(2025)4-10

О выпуклой оболочке границы множества

Ирина Викторовна Поликанова¹, Мария Викторовна Куркина²

¹Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия, Anirix1@yandex.ru

²Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, Ханты-Мансийск, Россия, mavi@inbox.ru

Original article

On the Convex Hull of the Boundary of a Set

Irina V. Polikanova¹, Mariy V. Kurkina²

¹Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, Anirix1@yandex.ru

²Khanty-Mansiysk State Medical Academy, Khanty-Mansiysk, Russia, mavi@inbox.ru

Аннотация. В статье изучаются соотношения между выпуклыми оболочками границы множества и замыкания этого множества в аффинном n -мерном пространстве A^n . В предыдущей работе авторы выявили критерии совпадения выпуклой оболочки границы множества с выпуклой оболочкой его замыкания. Здесь же дается описание замыканий выпуклых оболочек замыкания множества и границы этого множества в случае, если совпадения нет.

Основной результат:

Теорема. Если выпуклая оболочка границы множества X в A^n не совпадает с выпуклой оболочкой замыкания множества X , то имеет место один из двух случаев:

1. Выпуклая оболочка замыкания множества X есть пространство A^n .

2. Замыкание выпуклой оболочки замыкания множества X есть замкнутое полупространство, при этом замыкание выпуклой оболочки границы множества X есть либо ограничивающая это полупространство гиперплоскость, либо слой между двумя параллельными гиперплоскостями (включающий эти гиперплоскости), одна из которых ограничивает это полупространство.

Методы доказательства — топологические с опорой на теорию выпуклых множеств в A^n .

Ключевые слова: граница множества, выпуклая оболочка, выпуклая оболочка границы множества, выпуклая оболочка замыкания множества

Abstract. The article studies the relations between the convex hulls of the boundary of a set and the closure of this set in n -dimensional Affine space A^n . In the previous work, the authors found criteria for the coincidence of the convex hull of the boundary of a set with the convex hull of its closure. This paper presents a description of the closures of the convex hulls of the boundary of a set and the closure of this set in the case where there is no coincidence.

Main result.

Theorem. If the convex hull of the boundary of a set X in A^n does not coincide with the convex hull of the closure of the set X , then one of two cases occurs:

1. The convex hull of the closure of a set X is a space A^n .
2. The convex hull of the closure of a set X is a closed half-space, and the closure of the convex hull of the boundary of the set X is either a hyperplane bounding this half-space, or a layer between two parallel hyperplanes (including these hyperplanes), one of which bounds this half-space.

Methods of proof — topological, based on the theory of convex sets in A^n .

Keywords: boundary of a set, convex hull, convex hull of set boundary, convex hull of a closure of a set

Для цитирования: Поликанова И.В., Куркина М.В. О выпуклой оболочке границы множества // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 73–78. DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-10.

For citation: Polikanova I.V., Kurkina M.V. On the Convex Hull of the Boundary of a Set. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 4 (144). P. 73–78. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-10.

Введение

Топологические аспекты, связанные с выпуклыми оболочками, исследовались Крейном и Мильманом [1] (представимость выпуклой оболочки компакта как выпуклой оболочки его крайних точек), Густиним [2] (аналог теоремы Каратеодори для внутренности выпуклой оболочки). Условия замкнутости выпуклых оболочек замкнутых множеств изучали Сакума Ицую [3], Хусейнов [4]. Бен-Эль-Мехайех вывел критерий замкнутости выпуклой оболочки объединения замкнутого выпуклого множества и компактного выпуклого множества [5]. Yuanguo Zhu ввел понятия выпуклой оболочки, замыкания, выпуклого замыкания и замкнутой выпуклой оболочки нечеткого множества (a fuzzy set) и изучил соотношения между ними [6].

Обозначения: $Co X$, $C(X)$, clX , $intX$, ∂X — соответственно выпуклая оболочка, дополнение, замыкание, внутренность, граница множества X в n -мерном аффинном (топологическом) пространстве A^n .

По свойствам выпуклых оболочек (раздел 1) и замыканий множеств справедливо включение:

$$Co(\partial X) \subset Co(clX). \quad (1)$$

В предыдущей статье мы выяснили, когда в формуле (1) достигается равенство.

Теорема 1 [7]. Для множества $X \subset A^n$ следующие предложения равносильны:

$$1. \quad Co(clX) = Co(\partial X). \quad (2)$$

$$2. \quad cl(Co(clX)) = cl(Co(\partial X)). \quad (3)$$

3. X не содержит полупространств.

$$4. \quad Co(C(X)) = A^n. \quad (4)$$

(О каком именно полупространстве идет речь: открытом или замкнутом, — можно не уточнять, поскольку очевидно множество содержит открытое полупространство тогда и только тогда, когда содержит замкнутое полупространство.)

Здесь мы продолжим исследование выпуклых оболочек и дадим описание множеств $cl(Co(clX))$ и $cl(Co(\partial X))$, когда равенства в (2) и (3) не достигаются.

Методы доказательства — топологические, с опорой на факты теории выпуклых тел в A^n .

1. Выпуклая оболочка множества

В этом разделе приведены необходимые сведения из теории выпуклых множеств в A^n .

Точки пространства A^n обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Для точек A, B полагаем: AB — прямая, проходящая через точки A и B , $[AB]$ — отрезок с концами A и B , $\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом A и концом B .

Через σ^+ и σ^- будем обозначать ограниченные гиперплоскостью σ открытые полупространства, а через $\bar{\sigma}^+$ и $\bar{\sigma}^-$ — соответствующие им замкнутые полупространства: $\bar{\sigma}^+ = cl \sigma^+$, $\bar{\sigma}^- = cl \sigma^-$.

Очевидно: $C(\sigma^+) = \bar{\sigma}^-$, $C(\sigma^-) = \bar{\sigma}^+$.

Множество X в A^n называется *выпуклым*, если вместе с каждым двумя своими точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Выпуклой оболочкой множества X называется пересечение всех содержащих его выпуклых множеств.

Предложение 1. Для любых $X, Y \subset A^n$

a) $X \subset CoX$;

b) $X \subset Y \Rightarrow CoX \subset CoY$;

c) если X — выпуклое множество, то $CoX = X$, в частности, $Co(CoX) = CoX$;

d) если X — компактное множество, то CoX также компактное множество;

e) (теорема Каратеодори) CoX есть объединение всех m -мерных симплексов в E^n ($m \leq n$) с вершинами в X .

$$f) \quad Co\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = Co\left(\bigcup_{i \in I} CoX_i\right), \quad (5)$$

где I — множество индексов произвольной мощности.

Доказательство. а)-е) ([7], предложение 4).

f) Для конечного множества индексов I доказательство по индукции. *Базис индукции:* $n = 2$. Формула

$$Co(X \cup Y) = Co(CoX \cup CoY) \quad (6)$$

доказана в ([8], теорема 10, с. 66). *Индукционное допущение:* для натурального числа $n \geq 2$ справедлива формула

$$Co\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\right) = Co\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} CoX_i\right). \quad (7)$$

Можно вывести следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} Co\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) &\stackrel{1}{=} Co\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\right) \cup X_n\right) \stackrel{2}{=} \\ &= Co\left(Co\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\right) \cup CoX_n\right) \stackrel{3}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Co(Co(\bigcup_{i=1}^{n-1} CoX_i) \cup CoX_n) \underbrace{=}_4 \\
 &= Co(Co(\bigcup_{i=1}^{n-1} CoX_i) \cup Co(CoX_n)) \underbrace{=}_5 \\
 &= Co((\bigcup_{i=1}^{n-1} CoX_i) \cup CoX_n) \underbrace{=}_6 Co(\bigcup_{i=1}^n CoX_i).
 \end{aligned}$$

Здесь равенства 1 и 6 — рекуррентное определение объединения n подмножеств, равенства 2 и 5 справедливы по формуле (6), равенство 3 — по индукционному предположению, равенство 4 — по предположению 1с). Итак, для любого натурального числа n верна формула:

$$Co\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) = Co\left(\bigcup_{i=1}^n CoX_i\right).$$

Пусть теперь множество индексов I — произвольной мощности. Проверим включение:

$$Co\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \subset Co\left(\bigcup_{i \in I} CoX_i\right). \quad (8)$$

Возьмем произвольную точку $M \in Co(\bigcup_{i \in I} X_i)$. По теореме Каратеодори (предложение 1е)) существует симплекс с вершинами в $\bigcup_{i \in I} X_i$, содержащий точку M . Тогда найдутся номера $i_0, i_1, \dots, i_n$ в I (возможно, повторяющиеся) такие, что вершины симплекса принадлежат множествам $X_{i_0}, \dots, X_{i_n}$, а значит, $M \in Co(\bigcup_{j=0}^n X_{i_j})$. По доказанному выше

$$Co\left(\bigcup_{j=0}^n X_{i_j}\right) = Co\left(\bigcup_{j=0}^n CoX_{i_j}\right).$$

Поэтому ввиду предложения 1b)

$$M \in Co\left(\bigcup_{j=0}^n CoX_{i_j}\right) \subset Co\left(\bigcup_{i \in I} CoX_i\right).$$

Включение (8) установлено. Обратное включение проверяется аналогично. Формула (5) доказана.

Предложение 2. Пусть σ, δ — параллельные гиперплоскости, σ^+ и δ^+ — открытые полупространства, ограниченные гиперплоскостями σ, δ соответственно, причем $\sigma^+ \subset \delta^+$, точка $B \in \delta$. Тогда

$$Co(\sigma^+ \cup \{B\}) = \delta^+ \cup \{B\}$$

(здесь $\{B\}$ — одноточечное множество).

Доказательство. Так как $\sigma^+ \cup \{B\} \subset \delta^+ \cup \{B\}$, то по предположению 1b)

$$Co(\sigma^+ \cup \{B\}) \subset Co(\delta^+ \cup \{B\}).$$

Так как множество $\delta^+ \cup \{B\}$ выпукло, то по предположению 1с)

$$Co(\delta^+ \cup \{B\}) = \delta^+ \cup \{B\}.$$

Поэтому $Co(\sigma^+ \cup \{B\}) \subset \delta^+ \cup \{B\}$.

Для проверки обратного включения возьмем произвольную точку $P \in \delta^+ \cup \{B\}$. Если $P \in \sigma^+ \cup \{B\}$, то $P \in Co(\sigma^+ \cup \{B\})$ по предположению 1а). Если $P \in \delta^+ \setminus \sigma^+$, то существует точка $Q \in BP \cap \sigma^+$. Тогда $P \in [BQ]$, значит, $P \in Co(\sigma^+ \cup \{B\})$.

Предложение 3. Если один конец отрезка содержится в множестве X , а другой конец — в его дополнении $C(X)$, то некоторая точка этого отрезка принадлежит границе ∂X .

Доказательство. Утверждение следует из связности отрезка в A^n .

Предложение 4 ([9], теорема 3.4).

Каждая точка M , не принадлежащая замыканию выпуклого множества $X \subset A^n$, строго отделяется от него некоторой гиперплоскостью.

2. Основной результат

Теорема 2. Если

$$Co(cl X) \neq Co(\partial X), \quad (9)$$

то имеет место только один из двух случаев:

1) $Co(cl X) = A^n$,

2) $cl(Co(cl X))$ есть замкнутое полупространство, при этом $cl(Co(cl X)) = cl(Co X)$, а множество $cl(Co(\partial X))$ есть либо ограничивающая это полупространство гиперплоскость, либо слой между двумя параллельными гиперплоскостями (включающий эти гиперплоскости), одна из которых является границей полупространства $cl(Co X)$.

Доказательство. Пусть для множества X выполняется условие (9).

Случай 1.

$$Co(cl C(X)) = Co(\partial C(X)).$$

Поскольку дополнение к $C(X)$ есть X , по теореме 1 имеем: $Co X = A^n$, откуда благодаря включению $Co X \subset Co(cl X)$ имеем: $Co(cl X) = A^n$.

Случай 2.

$$Co(cl C(X)) \neq Co(\partial C(X)). \quad (10)$$

По теореме 1 множества X и $C(X)$ содержат открытые полупространства, которые не пересекаются, поскольку $X \cap C(X) = \emptyset$. Следовательно, ограничивающие их гиперплоскости параллельны. Кроме того, всякие полупространства, содержащиеся в X или $C(X)$, ограничены гиперплоскостями им параллельными. Существуют максимальные по включению открытые полупространства σ^+ и δ^- , содержащиеся в множествах X и $C(X)$ соответственно, ограниченные параллельными или совпадающими гиперплоскостями σ и δ . Это объединения всех открытых полупространств, содержащихся в X и $C(X)$ соответственно. Тогда $\sigma^+ \subset \text{int } X$, $\delta^- \subset \text{int } C(X)$.

Если $\sigma = \delta$, то гиперплоскость σ является общей границей множеств X и $C(X)$. В этом случае множество clX представляет собой замкнутое полупространство $\bar{\sigma}^+$ и

$$cl(Co X) = \bar{\sigma}^+ = cl(Co(clX)), \quad cl(Co(\partial X)) = \sigma.$$

Пусть $\sigma \neq \delta$. Покажем, что открытое полупространство δ^+ , ограниченное гиперплоскостью δ и отличное от δ^- , содержится в CoX .

Проведем произвольно прямую l , пересекающую гиперплоскости σ и δ в точках B и A соответственно. Отметим на ней точки A_i такие, что

$$\overrightarrow{BA_i} = \frac{i}{i+1} \overrightarrow{BA}.$$

Все точки A_i лежат между точками B и A . Обозначим через δ_i^- открытое полупространство, содержащее δ^- и ограниченное гиперплоскостью, проходящей через точку A_i параллельно гиперплоскости δ , $i = 1, 2, \dots$. Поскольку δ^- – максимальное по включению открытое полупространство, содержащееся в $C(X)$, то каждое полупространство δ_i^- содержит точку $B_i \in X$. Обозначим через ζ_i^+ открытое полупространство, содержащее σ^+ и ограниченное гиперплоскостью, проходящей через точку B_i параллельно гиперплоскости δ , $i = 1, 2, \dots$. По предложению 2

$$Co(\sigma^+ \cup \{B_i\}) = \zeta_i^+ \cup \{B_i\},$$

а по предложению 1f)

$$\begin{aligned} Co(\sigma^+ \cup \{B_1, B_2, B_3, \dots\}) &= Co\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\sigma^+ \cup \{B_i\})\right) = \\ Co\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Co(\sigma^+ \cup \{B_i\})\right) &= Co\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\zeta_i^+ \cup \{B_i\})\right) = \\ &= Co(\delta^+) = \delta^+ \subset CoX \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\bar{\delta}^+ = cl(\delta^+) \subset cl(CoX). \quad (11)$$

По свойствам выпуклых оболочек и замыканий справедливо: $X \subset cl X \Rightarrow Co X \subset Co(cl X) \Rightarrow$

$$cl(Co X) \subset cl(Co(cl X)). \quad (12)$$

Поскольку $\delta^- \subset C(X)$, то $X \subset C(\delta^-) = \bar{\delta}^+$. Учитывая замкнутость и выпуклость полупространства $\bar{\delta}^+$, можем записать:

$$\begin{aligned} cl X \subset \bar{\delta}^+ &\Rightarrow Co(cl X) \subset Co(\bar{\delta}^+) = \bar{\delta}^+. \\ &\Rightarrow cl(Co(cl X)) \subset \bar{\delta}^+. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11), (12), (13) следует:

$$\bar{\delta}^+ \subset cl(CoX) \subset cl(Co(cl X)) \subset \bar{\delta}^+.$$

Поэтому

$$cl(Co(clX)) = cl(Co X) = \bar{\delta}^+.$$

Так как множество X и его дополнение $C(X)$ удовлетворяют одинаковым условиям (9), (10), то и

$$cl(Co(cl C(X))) = cl(Co C(X)) = \bar{\sigma}^-.$$

Поскольку $\partial X \subset clX$, то

$$cl(Co(\partial X)) \subset cl(Co(clX)),$$

что влечет ввиду (13)

$$cl(Co(\partial X)) \subset \bar{\delta}^+.$$

Точно так же

$$cl(Co(\partial C(X))) \subset \bar{\sigma}^-.$$

Учитывая, что $\partial X = \partial C(X)$, запишем:

$$cl(Co(\partial X)) \subset \bar{\delta}^+ \cap \bar{\sigma}^-.$$

Покажем, что имеет место равенство:

$$cl(Co(\partial X)) = \bar{\delta}^+ \cap \bar{\sigma}^-. \quad (14)$$

Допустим противное: существует точка $M \in (\bar{\delta}^+ \cap \bar{\sigma}^-) \setminus cl(Co(\partial X))$. По предложению 4 существует гиперплоскость ξ , строго разделяющая точку M и $cl(Co(\partial X))$, т. е. $M \in \xi^-$, а $cl(Co(\partial X)) \in \xi^+$. Понятно, что гиперплоскость ξ либо параллельна гиперплоскостям σ и δ и заключена между ними либо пересекает их.

Случай 2а): гиперплоскость ξ параллельна гиперплоскостям σ и δ и заключена между ними. Здесь можно выделить 2 подслучая.

2а₁). $\xi^- \cap \delta^- \neq \emptyset$.

Если $M \in X$, то возьмем произвольную точку P в $\delta^- \subset C(X)$ и соединим ее отрезком с точкой M . По предложению 3 на отрезке $[MP]$ содержится точка $Q \in \partial X$. Так как $[MP] \subset \xi^-$, то $\partial X \cap \xi^- \neq \emptyset$, а это противоречит тому, что $\partial X \subset cl(Co(\partial X)) \subset \xi^+$ и $\xi^+ \cap \xi^- = \emptyset$.

Если $M \in C(X)$, то $\xi^- \subset C(X)$, так как допустив существование точки $N \in X$ в ξ^- по предложению 3, получим, что на отрезке $[MN]$ имеется граничная точка множества X , что, как показано выше, невозможно. Но включение $\xi^- \subset C(X)$ противоречит тому, что δ^- максимальное по включению открытое полупространство, содержащееся в $C(X)$, так как $\delta^- \subset \xi^-$ и $\delta^- \neq \xi^-$.

2а₂). $\xi^- \cap \sigma^+ \neq \emptyset$.

Если $M \in C(X)$, то возьмем произвольную точку P в $\sigma^+ \subset X$ и соединим ее отрезком с точкой M . По предложению 3 на отрезке $[MP]$ содержится точка $Q \in \partial X$. Так как $[MP] \subset \xi^-$, то $\partial X \cap \xi^- \neq \emptyset$, а это противоречит тому, что $\partial X \subset cl(Co(\partial X)) \subset \xi^+$ и $\xi^+ \cap \xi^- = \emptyset$.

Если $M \in X$, то $\xi^- \subset X$, так как допустив существование точки $N \in C(X)$ в ξ^- по предположению 3, получим, что на отрезке $[MN]$ имеется граничная точка множества X , что, как показано выше, невозможно. Но включение $\xi^- \subset X$ противоречит тому, что σ^+ максимальное по включению открытое полупространство, содержащееся в X , так как $\sigma^+ \subset \xi^-$ и $\sigma^+ \neq \xi^-$.

Таким образом, **случай 2а)** невозможен.

Случай 2б): гиперплоскость ξ пересекает гиперплоскости σ и δ . Поэтому множества $\delta^- \cap \xi^-$ и $\sigma^+ \cap \xi^-$ непусты.

Если $M \in X$, то возьмем произвольную точку R в $\delta^- \cap \xi^-$ и соединим ее отрезком с точкой M . Если $M \in C(X)$, то возьмем произвольную точку R в $\sigma^+ \cap \xi^-$ и соединим ее отрезком с точкой M . В обоих случаях по предположению 3 отрезок $[MR]$ содержит граничную точку множества X . Так как $[MR] \subset \xi^-$, то $\partial X \cap \xi^- \neq \emptyset$, а это противоречит тому, что $\partial X \subset \xi^+$ и $\xi^+ \cap \xi^- = \emptyset$.

Итак, **случай 2б)** невозможен. Равенство (14) доказано, а вместе с ним и теорема 2.

Заключение

Мы установили, что при $Co(clX) \neq Co(\partial X)$ имеет место только один из двух случаев: $Co(clX) = A^n$ и поэтому $cl(Co(clX)) = A^n$,

а $cl(Co(\partial X))$ содержится в замкнутом полупространстве либо $cl(Co clX)$ представляет собой полупространство. В случае замкнутого выпуклого множества X отсюда вытекает (поскольку тогда $X = Co(clX) = cl(Co(clX))$) известный факт: если $X \neq Co(\partial X)$, то $X = A^n$, либо X является полупространством ([10], Lemma 1.4.1). Заметим, что если рассмотреть замкнутое выпуклое множество $Y = cl(Co(clX))$, то условие $Y \neq Co(\partial Y)$ не то же самое, что $cl(Co(clX)) \neq cl(Co(\partial X))$, так как

$$Co(\partial Y) = Co(\partial(cl(Co(clX)))) \neq cl(Co(\partial X)).$$

Убедиться в последнем неравенстве можно на примере замкнутого множества X , являющегося частью евклидовой плоскости, ограниченной одной ветвью тангенсоиды: $cl(Co(\partial X))$ есть слой между двумя асимптотами данной ветви тангенсоиды в объединении с этими асимптотами, а $Co(\partial(cl(Co(clX))))$ есть одна из этих асимптот. Поэтому теорема 2 из Lemma 1.4.1 в части строения множества Y непосредственно не вытекает. Такой вывод был бы возможен, если бы удалось доказать включение:

$$Co(\partial(cl(Co(clX)))) \subset cl(Co(\partial X)).$$

Пока нам это неизвестно.

Библиографический список

1. Krein M., Milman D. On Extreme Points of Regular Convex Sets // *Studia Mathematica*. 1940. Vol. 9. P. 133–138. DOI: : 10.4064/sm-9-1-133-138
2. Gustin W. On the Interior of the Convex Hull of a Euclidian Set // *Bulletian of the American Mathematical Society*. 1947. Vol. 53. No 4. P. 299–301. DOI: : 10.1090/S0002-9904-1947-08787-5. MR:0020800
3. Sakuma Itsuo. Closedness of the Convex Hulls // *Journal of economic Theory*. 1977. Vol. 14. P. 223–227. DOI: 10.1016/0022-0531(77)99095-3
4. Husseinov F. A Note on the Closedness of the Convex Hull and its Applications // *Journal of Convex Analysis*. 1999. Vol. 6. No 2. P. 387–393. <http://hdl.handle.net/11693/25121>
5. Ben-El-Mechaiekh H. On the Closedness of the Convex Hull in a Locally Convex Space // *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2014. Vol. 4. No 10. P. 1351–1355. DOI: 10.9734/BJMCS/2014/9194

6. Yuanguo Zhu. Convex Hull and Closure of a Fuzzy Set // *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2005. Vol. 16. No 1. P. 67–73.
7. Поликанова И.В., Куркина М.В. Критерии совпадения выпуклых оболочек границы множества и его замыкания // *Известия Алтайского государственного университета*. 2025. № 1 (141). С. 118–122. DOI: 10.14258/izvasu (2025)1-16
8. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М.: Наука. 1973. 440 с.
9. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука. 1985. 336 с.
10. Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 490 p.

References

1. Krein M., Milman D. On Extreme Points of Regular Convex Sets. *Studia Mathematica*. 1940. Vol. 9. P. 133–138. DOI: <https://doi.org/10.4064/sm-9-1-133-138>

2. Gustin W. On the Interior of the Convex Hull of a Euclidian Set. *Bulletian of the American Mathematical Society*. 1947. Vol. 53. No 4. P. 299–301. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08787-5>. MR:0020800

3. Sakuma Itsuo. Closedness of the Convex Hulls. *Journal of Economic Theory*. 1977. Vol. 14. P. 223–227. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(77\)99095-3](https://doi.org/10.1016/0022-0531(77)99095-3)
4. Husseinov F. A Note on the Closedness of the Convex Hull and its Applications. *Journal of Convex Analysis*. 1999. Vol. 6. No 2. P. 387–393.
5. Ben-El-Mechaiekh H. On the Closedness of the Convex Hull in a Locally Convex Space. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2014. Vol. 4. No 10. P. 1351–1355. DOI: <https://doi.org/10.9734/BJMCS/2014/9194>
6. Zhu Yuanguo. Convex Hull and Closure of a Fuzzy Set. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2005. Vol. 16. No 1. P. 67–73.
7. Polikanova I.V. Kurkina M.V. Criteria for the Coincidence of Convex Hulls of the Boundary of a Set and Its Closure. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (135). P. 118–122. (In Russ.). DOI: [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2025\)1-16](https://doi.org/10.14258/izvasu(2025)1-16)
8. Bakelman I.Ya., Werner A.L., Kantor B.E. *Introduction to Differential Geometry "in the Large"*. Moscow: Nauka. 1973. 440 p. (In Russ.).
9. Leichtweis K. *Convex Sets*. Moscow: Nauka. 1985. 336 p. (In Russ.).
10. Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 490 p.

Информация об авторах

И.В. Поликанова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия;

М.В. Куркина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физиологии и спортивной медицины, Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, Ханты-Мансийск, Россия.

Information about the authors

I.V. Polikanova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia;

M.V. Kurkina, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Physiology and Sports Medicine, Khanty-Mansiysk State Medical Academy, Khanty-Mansiysk, Russia.