Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 67–72.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 4 (144). P. 67–72.

Научная статья
УДК 519.6 + 519.25
DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-09

Новый подход к квантификации результатов кластерного анализа

Сергей Вадимович Дронов[1], *Юлия Алексеевна Дударева*[2], *Святослав Юрьевич Еськов*[3]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, dsv@math.asu.ru
[2]Алтайский государственный медицинский университет, Барнаул, Россия, julia.dudareva@mail.ru
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, eskovslava13@gmail.com

Original article

A New Approach to Quantifying Cluster Analysis Results

Sergei V. Dronov[1], *Yulia A. Dudareva*[2], *Svyatoslav Yu. Eskov*[3]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, dsv@math.asu.ru
[2]Altai State Medical University, Barnaul, Russia, julia.dudareva@mail.ru
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, eskovslava13@gmail.com

Аннотация. В работе предложен единый подход к нескольким вариантам решения задачи о квантификации кластеров заранее построенного кластерного разбиения конечного множества. В результате применения любого из предлагаемых подходов каждый кластер получает, вообще говоря, векторные метки. Для этого применяется методика, близкая к анализу латентных классов. В первой группе методов, латентно-объектной, каждый объект отождествляется с вектором, координаты которого равны значениям наблюдаемых показателей этого объекта. Во второй, латентно-показательной, каждый показатель заменяется вектором своих значений на всех объектах данного кластера. После этого из пучка полученных на данном кластере векторов выделяется центральный, наиболее близкий ко всем векторам пучка. При латентно-объектном подходе он и объявляется векторной меткой кластера. При латентно-показательном подходе метки разных кластеров получаются имеющими разные размерности. Описаны возможные методы приведения их в единую, числовую, форму. Даны также рекомендации по сокращению размерности латентно-объектных меток. Рассмотрен числовой пример.

Ключевые слова: кластерная переменная, квантификация кластеров, post-hoc задача кластерного анализа, латентный анализ классов

Abstract. The paper proposes a unified approach to several variants of solving the problem of quantifying clusters of a pre-built cluster partition of a finite set. Generally speaking, each cluster gets vector labels when any of the mentioned variants are applied. For this purpose, a technique close to the analysis of latent classes is used. The first latent-object group of methods identifies each object with a vector with coordinates equal to the of the observed characteristics of this object. The second latent-indicative group of methods replaces each characteristic of all objects in a given cluster by a vector of its values. After that, the central vector being the closest to all vectors of the bunch, is selected from the bundle of vectors of a given cluster. The latent-object approach declares such a vector the vector label of the cluster. When using the latent-indicative approach, the obtained labels of different clusters have different dimensions. Thus, possible methods to reduce them to the one-dimensional numeric form are provided along with the recommendations for reducing the dimensionality of data-object labels. A numerical example is considered.

Keywords: cluster variable, cluster quantification, post-hoc cluster analysis problem, latent class analysis

Для цитирования: Дронов С.В., Дударева Ю.А., Еськов С.Ю. Новый подход к квантификации результатов кластерного анализа // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 67–72. DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-09.

For citation: Dronov S.V., Dudareva J.A., Eskov S. Yu. A New Approach to Quantifying Cluster Analysis Results. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 4 (144). P. 67–72. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-09.

1. Постановка задачи

Методы кластеризации данных сегодня весьма востребованы как важная часть анализа больших данных. При этом для включения результатов кластерного анализа в дальнейшее построение математических моделей появляется препятствие, состоящее в том, что информация о кластере, в который попал данный объект, по сути, имеет нечисловой, категорированный характер. Поэтому актуальной является задача перевода информации такого рода в числовую форму.

Точнее, пусть исходное множество объектов $U = \{o_1, ..., o_n\}$ разбито на m кластеров $A_1, ..., A_m$. Правило, которое каждому объекту o_i ставит в соответствие кластер A_j, к которому объект оказался отнесен, мы называем кластерной переменной. Требуется каждому из кластеров приписать некоторую числовую или векторную метку, заменив тем самым обозначение кластера соответствующим числовым или векторным значением так, чтобы оптимизировать некоторый критерий. Заменяя в определении кластерной переменной обозначения кластеров на приписанные метки, мы производим квантификацию (проще — оцифровку) этой переменной или, глядя на проблему более широко, оцифровываем результаты проведенного ранее кластерного анализа.

При различных видах критериев оптимальности (а иногда и без четкого определения критерия) подобные задачи решались неоднократно. Например, использовались идеи бинаризации, введение dummy-переменных, one-hot кодирование, методики TF-IDF для текстов и другие способы ([1–4]). Видимо, наиболее естественным является такой способ квантификации кластерной переменной, при котором метки кластеров находятся либо в сильной связи со значением тех показателей, с помощью которых задаются объекты множества U, либо в наилучшей степени отражают то общее, что присуще объектам кластера.

Оба намеченных подхода связаны с построением некоторой общей для всех показателей или объектов числовой или векторной характеристики, которая, не будучи непосредственно наблюдаемой, тем не менее, содержит в себе максимально сконцентрированную информацию о каждом из кластеров изучаемого кластерного разбиения. Будем далее называть ее латентной характеристикой. Исследование такого рода характеристик было начато относительно недавно в рамках так называемого латентного анализа классов [5, 6], или, иначе, латентного кластерного анализа [7]. Практически очевидно, что решение задачи квантификации кластерной переменной, при реализации которого мы отождествим ее числовые значения со значениями латентной характеристики, должно привести в некотором смысле к оптимальной разметке кластеров.

Цель работы — предложить несколько несложных методов оценивания латентной характеристики, алгоритмов перевода ее значений в числовые и векторные метки кластеров и на примере из практики произвести сравнение полученных квантификаций кластерной переменной с метками кластеров, получаемых другими методами.

2. Латентная характеристика как центральный вектор пучка

Обычной практикой является отождествление изучаемых объектов с векторами, координаты которых равны значениям их показателей. Иногда бывает удобно заменить такие векторы на единичные векторы, сонаправленные с ними. В этом случае можно считать косинусы углов между такими векторами оценками коэффициентов корреляции между координатами соответствующих векторов. При таком подходе ясно, что можно отождествить латентную характеристику с таким направлением, проекции на которые всех векторов-объектов имеют, например, наибольшую длину, а длины этих проекций принять за значения латентной характеристики для каждого из объектов.

Действительно, если проекция какого-либо вектора на выбранное направление $\vec{f}$ довольно велика, то разность этого вектора и проекции, остаток, будет довольно мал. Учитывая то, что этот остаток перпендикулярен проекции, он может считаться некоррелированным с ней, и малость соответствующих остатков будет означать, что после удаления предложенной оценки латентной характеристики в распоряжении исследователя останется довольно мало информации. Следовательно, направление $\vec{f}$ содержит в себе максимально существенную информацию о совокупности всех первоначальных векторов.

Главное предположение. Если набор объектов отождествлен с набором некоторых векторов, то значения латентной характеристики есть длины проекций этих векторов на такое направление, для которого эти проекции имеют максимально возможную длину.

Поиск направления, на которое нужно проецировать векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ для определения значений латентной переменной, может быть организован, например, в виде решения экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} ||\vec{a}_i - \vec{f}||^2 \ \to \min_{\vec{f}}, \tag{1}$$

решением которой будет направление, определяемое суммой векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.

Но по сравнению с предложенным решением проекции набора векторов можно увеличить, сменив предварительно знаки у некоторых из $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ таким образом, чтобы они стали образовывать тесный пучок, т.е. чтобы углы между векторами с измененными знаками стали бы в основном острыми. Эта задача может быть сформулирована следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n} ||\alpha_i\vec{a}_i - \vec{f}||^2 \ \to \min_{\alpha_1,...,\alpha_n;\vec{f}}, \tag{2}$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_n = \pm 1$. Подбор нужных коэффициентов α_i для решения задачи (2) назовем переплюсовкой. После осуществления подобной процедуры решение, конечно же, будет иметь вид

$$\vec{f} \ = \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i \tag{3}$$

в полной аналогии с (1).

Возможен и другой подход к определению направления латентной характеристики. Вычисляя непосредственно длины проекций на искомое направление $\vec{f}$, приходим к следующей задаче

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \varphi_i \ \to \min_{\varphi_1,...,\varphi_n}, \tag{4}$$

где через φ_i обозначены углы между векторами $\vec{a}_i$ и $\vec{f}$. Подобная постановка оправдана еще и тем, что данные косинусы представляют собой оценки коэффициентов корреляции, а следовательно, найденный в итоге $\vec{f}$ окажется наиболее сильно коррелирован со всем пучком векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ в совокупности. Отметим, что при таком подходе предварительная переплюсовка не нужна, поскольку при смене знака у любого из векторов $\cos^2 \varphi_i$ не меняет своего значения.

Центрируем и нормируем каждый из векторов $\vec{a}_i$, вычитая из его координат их среднее значение и деля каждую из них после этого на квадратный корень из суммы квадратов этих координат. Полученный вектор будем обозначать той же буквой, при этом окажутся выполненными два условия

$$(\forall i) \ \sum_{j=1}^{p} x_{i,j} = 0; \ \sum_{j=1}^{p} x_{i,j}^2 = 1, \tag{5}$$

где $x_{i,j}$ — координаты p-мерного вектора $\vec{a}_i$.

Для решения задачи (4) используем следующий результат [8]:

Теорема. *Решением экстремальной задачи (4) среди векторов единичной длины является собственный вектор матрицы $G = B^t B$, отвечающий ее наибольшему собственному числу, где B– $n \times p$-матрица с элементами $x_{i,j}$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., p$.*

Таким образом, расположив по строкам B центрированные и нормированные векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, мы приходим к задаче на собственные векторы матрицы $G = B^t B$. Отметим, что G является оценкой корреляционной матрицы набора исходных данных.

3. Два новых метода квантификации кластерной переменной

Предлагается подойти к задаче присвоения меток кластеров с двух точек зрения. Их объединяет основная идея — метка кластера должна содержать в себе максимально возможную информацию о составе этого кластера и, видимо, принципах его формирования. Наши методы строят метки отдельно для каждого кластера, и процедура построения метки для кластера должна быть повторена для каждого из них. Выберем кластер.

Первый метод, названный нами латентно-объектным, предлагает, рассматривая каждый из объектов кластера как p-мерный вектор, координатами которого являются значения формирующих показателей, сформировать из этого пучка центральный вектор с помощью (3) или привлекая утверждение теоремы. При использовании первого варианта этого метода нужно сначала проделать переплюсовку:

- Построим матрицу Z попарных скалярных произведений всех векторов рассматриваемого пучка. Создадим вектор $\vec{\alpha}$ той же размерности, что Z, и заполним его координаты α_j единицами.
- Найдем столбец Z, содержащий максимальное количество отрицательных чисел. Если таких чисел в матрице нет, переплюсовка не нужна. Если столбцов с таким числом отрицательных элементов несколько, возьмем первый из них. Поменяем знаки у всех элементов этого столбца и элементов строки с тем же номером. При этом диагональные элементы Z не меняем.
- Определим число отрицательных элементов в преобразованной матрице. Если оно увеличилось по отношению к своему предыдущему значению, отменяем результат последней смены знаков и завершаем работу алгоритма, переплюсовка окончена.
- Пусть j — номер столбца, в котором изменялись знаки элементов. Изменим знак α_j на противоположный. Перейдем ко второму шагу алгоритма с измененной матрицей Z.

На выходе этого алгоритма получаем вектор, содержащий значения коэффициентов для подстановки в формулу (3). По ней вычисляется вектор, являющийся меткой текущего кластера.

При использовании второго метода в качестве пучка векторов в текущем кластере рассматриваются векторы с координатами, равными значениям каждого показателя на объектах кластера. Таким образом, получаем пучок из p, имеющих размерность, равную количеству элементов текущего кластера. Далее в каждом из кластеров эти векторы обрабатываются в точности так же, как в латентно-объектном методе. При применении первого варианта этого метода также стоит предварительно произвести переплюсовку. Такой метод мы назвали латентно-показательным.

Каждый из двух вариантов описанных здесь методов снабжает кластеры векторными метками. Но если латентно-объектный метод каждому кластеру присваивает метку одной и той же размерности p, то латентно-показательный дает метки разных размерностей для разных кластеров. Поэтому если латентно-объектные метки в принципе готовы к использованию, то латентно-показательные для применения еще нуждаются в дополнительной подготовке.

Эта подготовка должна заключаться в конвертации предварительно полученных векторов для каждого из кластеров, например, в числовые метки для них. Чтобы сделать такую конвертацию, заметим, что координаты вектора, построенного для конкретного кластера, можно рассматривать как значения латентной характеристики на каждом из объектов этого кластера. Так как, по нашим предположениям, в этих значениях содержится максимально сконцентрированная информация о кластере, то мы можем заменить исходную задачу на одномерную. Построение числовой метки кластера, все элементы которого заданы только одной числовой характеристикой, можно, например, просто заменить расчетом среднего значения латентной характеристики на всех объектах кластера.

Или если мы хотим строить сразу метки для всех кластеров, задать эти метки так, чтобы итоговая кластерная переменная была максимально коррелирована со всеми найденными значениями. Этот подход подробно рассмотрен в [9], но технически решать эту задачу в нашем случае гораздо проще, поскольку она одномерна.

Если же размерность латентно-объектных меток необходимо сократить, то это можно сделать любым из методов сокращения размерностей, скажем, одним из вариантов метода главных компонент (см., например, [10]). Рассмотрим пример.

4. Обработка медицинских данных

Для получения меток в медицинском примере с 28 пациентками и их 4 показателями латентно-объектным методом нормируем четырехмерные векторы, отвечающие каждой пациентке в отдельности по каждому заданному кластеру. Вычислим в каждом из них матрицу попарных скалярных произведений всех полученных векторов размерности, равной числу объектов кластера. Например, в первом кластере это будет матрица 6×6, а в пятом 10×10. В нашем примере оказывается, что все элементы таких матриц положительны, а следовательно, переплюсовка не нужна. Центральные векторы соответствующих пучков для всех кластеров указаны в таблице 1. Они могут использоваться в качестве четырехмерных меток кластеров.

Таблица 1

Центральные векторы пучков-объектов

кл 1	5,18	-1,78	-2	-1,39
кл 2	4,28	-1,51	-1,86	-0,91
кл 3	3,41	-1,28	-1,49	-0,64
кл 4	2,57	-0,89	-1,07	-0,6
кл 5	8,61	-2,76	-3,64	-2,2

Исходные данные для примера приведены в таблице 2 — это частичные результаты медицинского обследования пациенток Алтайского краевого диагностического центра, классифицированных по 5 различным диагнозам. Каждая из пациенток характеризуется набором 4 числовых показателей. В последней колонке приведен условный код диагноза y. Его мы рассматривали как обозначение для кластера, к которому отнесена данная пациентка. Следовательно, с помощью приведенной ниже таблицы 2 мы задали кластерное разбиение, кластерам которого и приписываются метки предложенными методами.

Для сравнения с другими методами получим одномерные (числовые) метки, прибегнув к стандартной методике сокращения размерностей методом главных компонент. Найдем ковариационную матрицу столбцов таблицы 1. Ее собственный вектор, отвечающий наибольшему собственному числу, равен (-0,8927; 0,0359; 0,3723; 0,2514). Спроецируем каждую из четырехмерных меток кластеров на направление этого вектора. Проекции дадут значения числовых меток кластеров. Результат: (-5,782; -4,796; -3,806; -2,875; -9,693). Разумеется, если нас интересует только взаимное расположение кластеров на некоторой условной координатной прямой (а это обычно так и бывает), удобно стандартизовать эти метки. В итоге получим (-0,074; 0,113; 0,300; 0,477; -0,815).

При расчете меток кластеров латентно-показательным методом результаты (размерность каждой равна числу объектов кластера) приведены в таблице 3. Окончательные результаты вычислений после их стандартизации: (-0,313; 0,453; -0,305; 0,625; -0,461).

Таблица 2

Таблица данных примера

Пациент	x_1	x_2	x_3	x_4	y	Пациент	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	260	27	9,7	43,3	1	15	110	12	9,2	40,6	3
2	273	11,4	11,8	26,3	1	16	131	13	17,4	13	4
3	260	11,6	5,5	29,8	1	17	104	16	5,7	23,3	4
4	299	15	6,6	31,9	1	18	111	13	5,1	29,7	4
5	395	15,8	6,5	29	1	19	165	25,6	10,3	28,5	5
6	365	22,4	8,6	37,2	1	20	176	22	9	29	5
7	164	25	6,4	40	2	21	200	24,8	4,5	29,9	5
8	197	13,2	11	23,9	2	22	197	18	8	25,4	5
9	200	14	9,7	30,9	2	23	176	24	5,4	22,4	5
10	190	20,2	6,8	50	2	24	243	11,6	7,5	29,8	5
11	165	20	11,1	33	2	25	179	25,6	6,9	30,7	5
12	200	14	10,9	27,9	3	26	231	10,8	9,2	25,6	5
13	102	19,6	10,6	28,2	3	27	175	25,4	6	36	5
14	250	13,6	6,4	29	3	28	243	11	6,6	36,6	5

Таблица 3

Центральные векторы пучков-показателей

кл 1	(2,12; 0,08; -0,74; -0,44; -1,35; 0,33)
кл 2	(2,01; -1,97; -1,33; 1,2; 0,08)
кл 3	(0,37; 2,02; -1,47; -0,93)
кл 4	(-2,77; 1,87; 0,9)
кл 5	(-1,28; -0,69; 0,32; -0,34; -0,63 0,92; -0,33; 0,21; 0,19; 1,63)

5. Обсуждение и выводы

В статье рассмотрено несколько новых подходов к оцифровке задачи кластерного анализа. Одной из отличительных черт предлагаемых методов является их независимая работа в рамках каждого кластера, причем полная кластерная структура подключается лишь на последнем этапе. На взгляд авторов, два основных предлагаемых подхода обеспечивают адекватность результата заметно выше, чем использовавшиеся ранее «глобальные» методы квантификации. Соотношение полученных результатов, в частности порядок расположения первоначальных кластеров на некоторой условной числовой оси (вторая колонка), приведено в заключительной таблице 4. Последние две колонки отведены под результаты вычислений по алгоритму, предложенному в [9].

Таблица 4

Сравнение числовых меток кластеров

Метод	Л-о		Л-п		Глобальный	
кл 1	-0.07	2	-0.31	2	0.50	4
кл 2	0.11	3	0.45	4	-0.36	2
кл 3	0.30	4	-0.30	3	-0.35	3
кл 4	0.48	5	0.62	5	0.59	5
кл 5	-0.81	1	-0.46	1	-0.38	1

Очевидно, что различия в метках, полученных разными методами, относительно порядка следования кластеров следует признать небольшими.

Библиографический список

1. Samuels J.A. One-Hot Encoding and Two-Hot Encoding: An Introduction. London: Imperial College London. 2024. 5 P. DOI: : 10.13140/RG.2.2.21459.76327

2. Manning C.D., Raghavan P., Schutze H. Introduction to Information Retrieval. Cambridge: University Press. 2009. 581 p. DOI: : 10.1017/CBO9780511809071

3. Moreo A., Francisco M., Sebastiani F. Multi-label Quantification // ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data. 2024. Vol. 18. No 1. DOI: : 10.48550/arXiv.2211.08063

4. Bunse M., Moreo A., Sebastiani F., Senz M. Ordinal Quantification Through Regularization // Data Mining and Knowledge Discovery. 2024. Vol 38. No 6. P. 4076–4121. DOI: : 10.1007/978-3-031-26419-1-3

5. Cheung Kwok-Wai, Tsui Kwok-Ching, Liu Jiming. Extended Latent Class Models for Collaborative Recommendation // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans. 2004. Vol. 34. No 1. P. 143–148. DOI: : 10.1109/TSMCA.2003.818877

6. Rindskopf D. Latent Class Analysis. In: The SAGE Handbook of Quantitative Methods in Psychology. N.Y.: Sage. 2009. P. 226–244. DOI: : 10.4135/9780857020994

7. Дронов С.В., Шеларь А.Ю. Латентный кластерный анализ для случая двух кластеров // МАК: «Математики — Алтайскому краю» : сборник трудов Всероссийской конференции по математике. Барнаул: Изд-во Алтайского гос. университета. 2018. С. 23–26.

8. Дронов С.В., Еськов С.Ю. Геометрический подход в post-hoc задаче кластерного анализа // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2024. Т. 10. С. 48–53.

9. Dronov S.V., Sazonova A.S. Two Approaches to Cluster Variable Quantification // Model Assisted Statistics and Applications. 2015. Vol. 10. P. 155–162. DOI: : 10.3233/MAS-140314

10. Gewers F.L. et al. Principal Component Analysis: A Natural Approach to Data Exploration // ACM Computing Surveys. 2021. Vol. 54. No 4. P. 1–34. DOI: : 10.1145/3447755

References

1. Samuels J.A. *One-Hot Encoding and Two-Hot Encoding: An Introduction. London: Imperial College London (Preprint, T. 10).* 2024. 5 p. DOI: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21459.76327

2. Manning C.D., Raghavan P., Schutze H. *Introduction to Information Retrieval. Cambridge: University Press.* 2009. 581 p. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511809071

3. Moreo A., Francisco M., Sebastiani F. Multi-label Quantification. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data.* 2024. Vol. 18. No 1. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.08063

4. Bunse M., Moreo A., Sebastiani F., Senz M. Ordinal Quantification Through Regularization. *Data Mining and Knowledge Discovery.* 2024. Vol. 38. No 6. P. 4076–4121. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-26419-1-3

5. Cheung K.-W., Tsui K.-Ch., Liu J. Extended Latent Class Models for Collaborative Recommendation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans.* 2004. Vol. 34. No 1. P. 143–148. DOI: https://doi.org/10.1109/TSMCA.2003.818877

6. Rindskopf D. Latent Class Analysis. *The SAGE Handbook of Quantitative Methods in Psychology.* N.Y.: Sage. 2009. P. 226–244. DOI: https://doi.org/10.4135/9780857020994

7. Dronov S.V., Shelar A.Yu. Latent Cluster Analysis for the Case of Two Clusters. *MAK: "Mathematicians - for the Altai Territory": Conference Proceedings of the All-Russian Conference on Mathematics*. Barnaul: Publishing House of Altai State University. 2018. P. 23–26. (In Russ.).

8. Dronov S.V., Eskov S.Yu. Geometric Approach to Post-hoc Problem in Cluster Analysis. *Proceedings of the Seminar on Geometry and Mathematical Modeling.* 2024. Vol. 10. P. 48–53. (In Russ.).

9. Dronov S.V., Sazonova A.S. Two Approaches to Cluster Variable Quantification. *Model Assisted Statistics and Applications.* 2015. Vol. 10. P. 155–162. DOI: https://doi.org/10.3233/MAS-140314

10. Gewers F.L. et al. Principal Component Analysis: A Natural Approach to Data Exploration. *ACM Computing Surveys.* 2021. Vol. 54. No 4. P. 1–34. DOI: https://doi.org/10.1145/3447755

Информация об авторах

С.В. Дронов, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Ю.А. Дударева, доктор медицинских наук, профессор кафедры акушерства и гинекологии, Алтайский государственный медицинский университет, Барнаул, Россия;

С.Ю. Еськов, студент Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

S.V. Dronov, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

Yu.A. Dudareva, Doctor of Sciences in Medicine, Professor of the Department of Obstetrics and Gynecology, Altai State Medical University, Barnaul, Russia;

S.Yu. Eskov, Undergraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technology, Altai State University, Barnaul, Russia.