Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 56–60.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 4 (144). P. 56–60.

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 514.764.227
DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-07

О конформно киллинговых векторных полях на пятимерном 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля

Максим Евгеньевич Гнедко[1], Дмитрий Николаевич Оскорбин[2], Евгений Дмитриевич Родионов[3]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, gnedko98@mail.ru
[2]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия, oskorbin@yandex.ru
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru

MATHEMATICS AND MECHANICS

Original article

On Conformal Killing Vector Fields on a Five-Dimensional 2-Symmetric Indecomposable Lorentzian Manifold with a Trivial Weyl Tensor

Maksim E. Gnedko[1], Dmitry N. Oskorbin[2], Evgeny D. Rodionov[3]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, gnedko98@mail.ru
[2]Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia, oskorbin@yandex.ru
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru

Аннотация. Исследование групп конформных преобразований, потоков Риччи и солитонов Риччи на различных классах многообразий является одной из актуальных задач современной дифференциальной геометрии. Одним из важных классов таких многообразий являются (псевдо)римановы k-симметрические пространства. Если в римановом случае k=1, то в псевдоримановом случае существуют k-симметрические пространства для любого k. Такими, например, являются обобщенные k-симметрические пространства Каэна — Уоллаха, а также 2- и 3-симметрические псевдоримановы пространства, которые возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике и изучались многими математиками. В случае малых размерностей эти пространства и конформно киллинговы векторные поля на них изучались Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, а в случае обобщенных k-симметрических пространств Каэна — Уоллаха ими была установлена связь между солитонами Риччи и конформно киллинговыми векторными полями

Abstract. The study of conformal transformation groups, Ricci flows, and Ricci solitons on various classes of manifolds is one of the actual problems of differential geometry. (Pseudo) Riemannian k-symmetric spaces are one of the important classes of such manifolds. If for the Riemannian case k=1, then there are k-symmetric spaces existing for any k values for the pseudo-Riemannian case. The generalized k-symmetric Kahen — Wallach spaces, as well as the 2- and 3-symmetric pseudo-Riemannian spaces, are good examples of that. They appear in studies of pseudo-Riemannian geometry and in physics, and have been studied by many mathematicians. These spaces and conformal Killing vector fields on them were studied by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov for the case of low dimensions. A connection between Ricci solitons and conformal Killing vector fields on the generalized k-symmetric Kahen — Wallach spaces was established. Also, it was found that the behavior of the conformal multiplier depends on the properties of the Weyl tensor. In this paper, new nontrivial examples of conformal Killing на этих пространствах. Кроме того, оказалось, что поведение конформного множителя зависит от свойств тензора Вейля. В данной работе построены новые нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем на пятимерном 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с нулевым тензором Вейля.

Ключевые слова: конформные векторные поля Киллинга, лоренцевы k-симметрические пространства, тензор Вейля

vector fields with a variable conformal factor on a five-dimensional 2-symmetric indecomposable Lorentzian manifold with zero Weyl tensor are constructed.

Keywords: conformal Killing vector fields, Lorentzian k-symmetric spaces, Weyl tensor

Для цитирования: Гнедко М.Е., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О конформно киллинговых векторных полях на пятимерном 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 4 (144). С. 56–60. DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-07.

For citation: Gnedko M.E., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. On Conformal Killing Vector Fields on a Five-Dimensional 2-Symmetric Indecomposable Lorentzian Manifold with a Trivial Weyl Tensor. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 4 (144). P. 56–60. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)4-07.

1. Предварительные сведения

Гладкое многообразие $\mathcal{M}$ с гладким невырожденным симметричным метрическим тензором g называется псевдоримановым многообразием. Пара $(\mathcal{M}, g)$ называется лоренцевым многообразием, если g имеет сигнатуру $(1, n-1)$.

Гладкое многообразие $\mathcal{M}$ с псевдоримановой метрикой g называется k-симметрическим, если для связности Леви-Чивиты ∇ имеют место равенства: $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$ и R — тензор кривизны многообразия $(\mathcal{M}, g)$.

Ранее Каэн и Уоллах получили с точностью до изометрии классификацию односвязных лоренцевых симметрических пространств [1–3]. В списке содержатся пространства Каэна — Уоллаха: $CW^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$ с метрикой

$$g = -2du(dv + A_{ij}x^i x^j du) + \delta_{ij}x^i x^j,$$

где δ_{ij} — символы Кронекера, A_{ij} — матричные константы.

Далее согласно теореме Ву [4] следует, что любое лоренцево многообразие локально изометрично прямому произведению некоторого риманова многообразия и локально неразложимого лоренцева многообразия. Поэтому все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия будем предполагать локально неразложимыми. С учетом замечания для локально неразложимого лоренцева многообразия $(\mathcal{M}, g)$ размерности $n+2 \geq 4$ справедлива теорема [5, 6].

Теорема 1. Многообразие $(\mathcal{M}, g)$ является 2-(3-)симметрическим тогда и только тогда, если оно локально изометрично обобщенному пространству Каэна — Уоллаха $(\mathcal{CW}_d^{n+2})$ порядка $d = 1 (d = 2)$.

Определение 1. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — (псевдо)риманово многообразие. Тогда гладкое полное векторное поле K на M называется киллинговым векторным полем, если производная Ли метрического тензора вдоль поля K равна нулю: $L_K g = 0$, где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Определение 2. Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — (псевдо)риманово многообразие. Тогда гладкое полное векторное поле K на M называется конформно киллинговым, если выполняется равенство $L_K g = f(p) \cdot g$, где $p \in \mathcal{M}$, а $f(p)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Согласно результатам работы [5] в некоторой окрестности любой точки локально неразложимого 2-симметрического лоренцева многообразия существует система координат $(v, x^1, x^2, \ldots, x^n, u)$ такая, что метрика g имеет вид:

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n-2}(dx^i)^2 + (\sum_{i,j=1}^{n-2} H_{ij0}x^i x^j + \sum_{i=1}^{n-2} uH_{ii1}(x^i)^2)du^2, \quad (1)$$

где H_0 — симметрические постоянные матрицы $n \times n$, H_1 — невырожденная диагональная матрица.

Нетрудно видеть, что вид конформного множителя $f(p)$ в уравнении $L_K g = f(p) \cdot g$ зависит от того, является ли тензор Вейля равным нулю.

Лемма. Тензор Вейля метрики (1) равен нулю тогда и только тогда, когда все H_{ii1} равны между собой, все H_{ii0} равны между собой, а при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.

Доказательство. Тензор Вейля на многообразии с метрикой (1) принимает вид:

$$W = \frac{1}{n-2}((2-n)(H_{ii1}u + H_{ii0})+ \sum_{j=1}^{n-2}(H_{jj1}u + H_{jj0})) \cdot \sum_{i=1}^{n-2}(dudx^i dudx^i+ dx^i dudx^i du - dudx^i dx^i du - dx^i dududx^i)+ H_{ij0}(1-\delta_{ij}) \sum_{i,j=1}^{n-2}(dudx^i dx^j du + dx^i dududx^j - dudx^i dudx^j - dx^i dudx^j du),$$

где δ_{ij} — символы Кронекера.

Заметим, что при $i \neq j$ компоненты тензора Вейля при $dudx^i dx^j du$, $dx^i dududx^j$, $dudx^i dudx^j$ и $dx^i dudx^j du$ равны H_{ij0}. Следовательно, если $W = 0$, то при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.

Все компоненты при $dudx^i dudx^i$, $dx^i dudx^i du$, $dudx^i dx^i du$ и $dx^i dududx^i$, с точностью до знака, имеют следующий вид:

$$-H_{ii1}u - H_{ii0} + \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}(H_{jj1}u + H_{jj0}).$$

Приравняем к нулю коэффициент при u свободный член этого выражения:

$$-H_{ii1} + \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} H_{jj1} = 0;$$

$$-H_{ii0} + \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} H_{jj0} = 0.$$

Так как эти уравнения должны быть справедливы при любых $1 \leq i \leq n\text{-}2$, то из них следует, что все H_{ii1} равны между собой и все H_{ii0} также равны. Лемма доказана.

2. Случай размерности пять

В окрестности некоторой точки $p \in \mathcal{M}$ рассмотрим уравнение $L_K g = f(p) \cdot g$ в локальных координатах (1). Действуя как в [7], положим $f = \frac{dF(u)}{du}$ для некоторой функции $F(u)$. Для простоты положим $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Тогда получим систему уравнений конформно киллинговых векторных полей в локальных координатах:

$$\begin{cases} U_v = 0; \\ U_x + X_v = 0; U_y + Y_v = 0; U_z + Z_v = 0; \\ X_y + Y_x = 0; X_z + Z_x = 0; Z_y + Y_z = 0; \\ 2X_x = f; 2Y_y = f; 2Z_z = f; \\ U_u + V_v = f; \\ HU_x + X_u + V_x = 0; \\ HU_y + Y_u + V_y = 0; \\ HU_z + Z_u + V_z = 0; \\ -fH + 2HU_u + 2V_u + XH_x + YH_y + ZH_z+ \\ UH_u = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где координаты искомого векторного поля K имеют вид: $V = V(v,x,y,z,u)$, $X = X(v,x,y,z,u)$, $Y = Y(v,x,y,z,u)$, $Z = Z(v,x,y,z,u)$, $U = U(v,x,y,z,u)$, (V, X, Y, Z, U — гладкие функции), $H = H_{110}x^2 + 2H_{120}xy + 2H_{130}xz + H_{220}y^2 + 2H_{230}yz + H_{330}z^2 + u(H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2)$.

Действуя как в [8, 9, 10], получаем решения:

$$\begin{cases} U = F(u); \\ X = \frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}x + C_1 y + C_2 z + b_1(u); \\ Y = -C_1 x + \frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}y + C_3 z + b_2(u); \\ Z = -C_2 x - C_3 y + \frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}z + b_3(u); \\ V = -\frac{db_1(u)}{du}x - \frac{db_2(u)}{du}y - \frac{db_1(u)}{du}z \\ -\frac{x^2+y^2+z^2}{4}\frac{d^2F(u)}{du^2} + C_4, \end{cases} \qquad (3)$$

где C_i — произвольные постоянные, а $b_i(u)$ — гладкие функции, определяемые из системы дифференциальных уравнений работы [11]. Из (2) получаем:

$$\frac{dF(u)}{du}(u(H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2) + H_{110}x^2 + H_{220}y^2 + H_{330}z^2 + 2H_{120}xy + 2H_{130}xz + 2H_{230}yz) + (\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}x + C_1 y + C_2 z + b_1(u))(2H_{111}ux + 2H_{110}x + 2H_{120}y + 2H_{130}z) + (-C_1 x + \frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}y + C_3 z + b_2(u))(2H_{221}uy + 2H_{120}x + 2H_{220}y + 2H_{230}z) + (-C_2 x - C_3 y + \frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du} + b_3(u))(2H_{331}uz + 2H_{130}x + 2H_{230}y + 2H_{330}z) - 2\frac{d^2b_1(u)}{du^2}x - 2\frac{d^2b_2(u)}{du^2}y - 2\frac{d^2b_1(u)}{du^2}z - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3} + F(u)(H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2) = 0$$

Отсюда и из результатов работы [9] следует, что в случае нетривиального тензора Вейля метрики (1) конформный множитель является постоянным. В конформно плоском случае ситуация менее очевидна.

3. Пятимерный конформно плоский случай

Применяя лемму, имеем:

$$g = 2dudv + dx^2 + dy^2 + dz^2 + (b(x^2+y^2+z^2) + au(x^2+y^2+z^2))du^2,$$

где $a = H_{111} = H_{221} = H_{331}$ и $b = H_{110} = H_{220} = H_{330}$ произвольные постоянные. Тогда получим дифференциальное уравнение относительно $F(u)$ следующего вида:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+2\frac{dF(u)}{du}(au+b)+aF(u)=0.$$

Из этого уравнения $F(u)$ выражается как

$$F(u)=C_1AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})^2+ C_2AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})+ C_3AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})^2,$$

где $AiryAi$ и $AiryBi$ — частные решения 1-го и 2-го рода дифференциального уравнения Эйри: $y''-uy=0$, определяемые несобственными интегралами [12]:

$$AiryAi(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}cos(\frac{x^3}{3}+ux)dx.$$

$$AiryBi(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[exp(-\frac{x^3}{3}+ux)+ sin(\frac{x^3}{3}+ux)]dx.$$

В данном случае векторное поле вида (3), где

$$b_1(u)=C_4AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})+C_5AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}),$$

$$b_2(u)=C_6AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})+C_7AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}),$$

$$b_3(u)=C_8AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})+C_9AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}),$$

являются решениями уравнения $L_Kg=f(p)g$ для системы (1). Конформный множитель принимает вид:

$$f(u)=\frac{2aC_{10}AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})AiryAi(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})}{(-a)^{\frac{2}{3}}}+ \frac{2aC_{11}AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})AiryBi(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})}{(-a)^{\frac{2}{3}}}+ \frac{2aC_{12}AiryAi(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})AiryBi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})}{(-a)^{\frac{2}{3}}}+ \frac{2aC_{13}AiryAi(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})AiryBi(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}})}{(-a)^{\frac{2}{3}}}.$$

Заключение

Полученные результаты позволяют завершить исследования работы [10] и построить новые нетривиальные примеры конформно киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем. Кроме того, разработанные методы позволят получить многомерные аналоги построенных примеров.

Библиографический список

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. 1970. Vol. 76. No 3. P. 585–591.

2. Cahen M., Kerbrat Y. Champs de Vecteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symétriques // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1978. Vol. 57. No 2. P. 99–132.

3. Cahen M., Kerbrat Y. Transformations Conformes des Espaces Symétriques Pseudo-Riemanniens // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1982. Vol. 132. P. 275–289.

4. Wu H. On the de Rham Decomposition Theorem // Illinois Journal of Mathematics. 1964. Vol. 8. No 2. P. 291–311.

5. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-Symmetric Lorentzian Manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2011. Vol. 61. P. 2331–2340.

6. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of Second-Order Symmetric Lorentzian Manifold // Journal of the European Mathematical Society. 2013. Vol. 15. P. 595–634.

7. Hall G.S. Conformal Symmetries and Fixed Points in Spacetime // Journal of Mathematical Physics. 1989. Vol. 31. P. 1198–1207.

8. Андреева Т.А., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Исследование конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях // Вестник Югорского государственного университета. 2021. Т. 1 (60). С. 17–22.

9. Blau M., O'Loughlin M. Homogeneous Plane Waves // Nuclear Physics B. 2003. Vol. 654. No. 1-2. P. 135–176. DOI: : 10.1016/S0550-3213(03)00055-5

10. Андреева Т.А., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О конформном множителе в конформном уравнении Киллинга на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии // Владикавкавказкий математический журнал. 2023 Т. 25 (3). С. 5–14.

11. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена — Уоллаха // Сибирский математический журнал. 2019 Т. 60 (5). С. 1165–1170.

12. Федорюк М.В. Эйри функции // Математическая энциклопедия. М., 1985. Т. 5. С. 939–941.

References

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society. 1970.* Vol. 76. No 3. P. 585–591.

2. Cahen M., Kerbrat Y. Champs de Vecteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symétriques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* 1978. Vol. 57. No 2. P. 99–132.

3. Cahen M., Kerbrat Y. Transformations Conformes des Espaces Symétriques Pseudo-riemanniens. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 1982. Vol. 132. P. 275–289.

4. Wu H. On the de Rham Decomposition Theorem. *Illinois Journal of Mathematics.* 1964. Vol. 8. No 2. P. 291–311.

5. Galaev A.S., Alexeevskii D.V. Two-symmetric Lorentzian Manifolds. *Journal of Geometry and Physics.* 2011. Vol. 61. P. 2331–2340.

6. Blanco O.F., Sanchez M., Senovilla J.M. Structure of Second-Order Symmetric Lorentzian Manifolds. *Journal of the European Mathematical Society.* 2013. Vol. 15. P. 595–634.

7. Hall G.S. Conformal Symmetries and Fixed Points in Spacetime. *Journal of Mathematical Physics.* 1989. Vol. 31. P. 1198–1207.

8. Andreeva T.A., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Study of Conformally Killing Vector Fields on Five-dimensional 2-Symmetric Lorentzian Manifolds. *Bulletin of Ugra State University.* 2021. Vol. 1. No 60. P. 17–22. (In Russ.)

9. Blau M., O'Loughlin M. Homogeneous Plane Waves. *Nuclear Physics B.* 2003. Vol. 654. No 1-2. P. 135–176. DOI: https://doi.org/10.1016/S0550-3213(03)00055-5

10. Andreeva T.A., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. On the Conformal Factor in the Conformal Killing Equation on a 2-Symmetric Five-Dimensional Indecomposable Lorentzian Manifold. *Vladikavkaz Mathematical Journal.* 2023. Vol. 25. No 3. P. 5–14. (In Russ.)

11. Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons and Killing Fields on Generalized Cahen–Wallach Manifolds. *Siberian Mathematical Journal.* 2019. Vol. 60. No 5. P. 1165–1170. (In Russ.)

12. Fedoryuk M.V. Airy Functions. *Mathematical Encyclopedia.* Ed. Vinogradov I.M. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1985. Vol. 5. P. 939–941. (In Russ.)

Информация об авторах

М.Е. Гнедко, аспирант Института математики и информационных технологий, ассистент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.Н. Оскорбин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия;

Е.Д. Родионов, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

M.E. Gnedko, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Assistant of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.N. Oskorbin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;

E.D. Rodionov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.