

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 135–140.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 135–140.

Научная статья

УДК 532.546

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-19

Исследование фазового перехода в промерзающем грунте

Антон Николаевич Сибин¹, Татьяна Андреевна Пекарская²

¹Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия, sibin_anton@mail.ru

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, pekarskayat@yandex.ru

Original article

Study of Phase Transition in Freezing Grounds

Anton N. Sibin¹, Tatyana A. Pekarskaya²

¹Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia, sibin_anton@mail.ru

²Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Altai State University, Barnaul, Russia, pekarskayat@yandex.ru

Аннотация. В данной работе на основе уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача движения воды и воздуха в замерзающем / протаивающем грунте. Для этого используются уравнения сохранения массы, двухфазной фильтрации и теплового баланса. Предложенная одномерная математическая модель учитывает фазовый переход в протяженной области, изменяющиеся фильтрационные свойства грунта и фильтрацию воды к области фазового перехода. Приводятся несколько эмпирических зависимостей для интенсивности фазового перехода вода — лед и их верификация с помощью экспериментальных данных из литературных источников. Численные эксперименты показали выполнение физического принципа максимума для пористости грунта и формирование в грунте слоя с меньшей проницаемостью, который влияет на впитывающую способность грунта и распределение поверхностного и грунтового стока в период весеннего снеготаяния. Предложенная математическая модель может использоваться для моделирования тающего снега на поверхности мерзлого грунта.

Ключевые слова: термодинамика грунта, неоднородная среда, фазовые переходы, многофазная фильтрация, пористая среда

Abstract. This paper considers the movement of water and air in freezing and thawing soil, based on the equations of non-isothermal two-phase filtration. In order to achieve this, the equations of mass conservation, two-phase filtration, and heat balance are employed. The proposed one-dimensional mathematical model considers the phase transition in the extended region, the varying filtration properties of the soil, and the filtration of water into the phase transition region. This paper presents several empirical relationships for the intensity of the water-ice phase transition and their verification with experimental data from the literature. Numerical experiments have demonstrated the fulfillment of the physical maximum principle for soil porosity and the formation of a layer of lower permeability in the soil. This affects the absorption capacity of the soil and the distribution of surface and subsurface runoff during spring snowmelt. The proposed mathematical model can be used to simulate melting snow on the surface of frozen ground.

Keywords: ground thermodynamics, inhomogeneous medium, phase transitions, multiphase filtration, porous medium

Для цитирования: Сибин А.Н., Пекарская Т.А. Исследование фазового перехода в промерзающем грунте // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 135–140. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-19

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-71-00058), <https://rscf.ru/project/24-71-00058/>

For citation: Sibin A.N., Pekarskaya T.A. Study of Phase Transition in Freezing Grounds. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 135–140. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-19

Funding: this study was supported by the Russian Science Foundation (project code 24-71-00058), https://rscf.ru/project/24-71-00058

1. Постановка задачи

В работе промерзающий/протаивающий грунт рассматривается как сплошная среда, состоящая из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$), льда ($i = 3$) и грунта ($i = 4$). Частицы грунта и лед, находящийся в порах, образуют твердый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом скелете описывается уравнениями сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнениями двухфазной фильтрации и уравнением теплового баланса для четырехфазной среды.

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_4}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_4 \vec{u}_4) = 0; \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (2)$$

$$\phi s_i \vec{u}_i = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2; \quad (3)$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I. \quad (4)$$

Здесь $\vec{V} = \sum_{i=1}^4 \rho_i^0 \alpha_i c_i \vec{u}_i$, $\vec{u}_i$ — скорость i -й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} — интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени ($I_{ji} = -I_{ij}$, $\sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0$); ϕ — пористость снега; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха; s_3, s_4 — объемные доли льда и грунта в пористом скелете ($\alpha_1 = \phi s_1$, $\alpha_2 = \phi s_2$, $\alpha_3 = (1 - \phi) s_3$, $\alpha_4 = (1 - \phi) s_4$, $s_1 + s_2 = 1$, $s_3 + s_4 = 1$), $K_0(\phi)$ — коэффициент проницаемости пористой среды; $\bar{k}_{0i}$ — фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0$, $\bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i — динамические вязкости; p_i — давления фаз; p_c — капиллярное давление; $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; c_i — удельная теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; ν — удельная теплота плавления льда; λ_c — теплопроводность грунта.

Процессами сублимации и испарения пренебрегаем ($I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$), а интенсивность фазового перехода «вода — лед» есть заданная функция $I_{13} = I(\phi, \theta, s_1)$. Частицы льда и грунта неподвижны $\vec{u}_3 = 0$, $\vec{u}_4 = 0$, структура льда и грунта как сплошных сред не уточняется [1]. Предполагается, что температуры во всех четырех фазах совпадают, т.е. $\theta_i = \theta$ ($i = 1, \dots, 4$).

Система (1)–(4) дополняется гипотезами $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, \dots, 4$. Заметим, что при пористости грунта $\phi_g = 0$ коэффициенты принимают значения $s_4 = 0$, $s_3 = 1$ пористый скелет сформирован частицами льда, и предложенная математическая модель сводится к математической модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге, изученной в работе [2–4].

2. Моделирование обмена массой между водой и льдом

Наиболее распространенный подход к моделированию теплового баланса в грунте с четкой границей раздела между талым и мерзлым грунтом — классическая задача Стефана [5], в которой предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачком происходит переход льда в воду. Этот подход не требует знания интенсивности фазового перехода «лед — вода». Экспериментальные [6–8] и теоретические [9, 10] исследования процесса промерзания мелкозернистых грунтов показали, что фазовый переход протекает в протяженной области, в которой одновременно происходят миграция и кристаллизация влаги. При таком подходе наибольшую сложность представляет задание эмпирической зависимости для обмена массой между водой и льдом.

В работе [9] предложена и верифицирована эмпирическая зависимость для обмена массой между водой и льдом в виде

$$I = \frac{s_{eq}(\theta) - s}{t_*}. \quad (5)$$

Здесь s — влажность грунта, s_{eq} — равновесная влажность, t_* — характерное время кристаллизации, зависящее от материала.

На основе экспериментальных данных для различных видов грунта определена функция s_{eq} ,

имеющая вид [9]

$$s_{eq} = \frac{1 + T}{1 - \alpha_0 T}, \quad T = \frac{\theta - \theta_{0*}}{\theta_{min} - \theta_{0*}},$$

где θ_{min} — минимальная температура среды, θ_{0*} — температура фазового перехода, параметр α_0 определяет вид функции остаточной влажности и не имеет физического смысла.

Интенсивность фазового перехода «вода — лед» определялась экспериментально для тающего снега в работах [1, 7], а для промерзающего/протаивающего грунта в [1, 11]. Предлагаемые зависимости имеют схожий вид. Например, в работе [12] принимается, что в каждом слое снега в определенный момент времени вода, определяющая влажность снега, может находиться только в одной из двух фаз: либо в жидкой, либо в твердой. Если температура слоя опускается ниже 0°C , вся жидкая вода в этом слое замерзает; в случае если слой нагревается до 0°C и имеется какой-либо «излишек» тепла (что определяется уравнением теплового баланса слоя), весь лед в слое начинает таять. Для интенсивности обмена массы предлагается соотношение

$$I = \begin{cases} -\gamma\omega/\Delta t, & \theta < \theta^-; \\ \gamma\omega/\Delta t, & \theta > \theta^+, \end{cases}$$

где γ — массовая доля воды/льда в данном слое, ω — масса единицы площади слоя влажного снега, Δt — шаг по времени.

В данной работе используется зависимость для интенсивности фазового перехода «лед — вода», основанная на идеях, представленных в работах [1–4, 11].

$$I = \begin{cases} -\lambda_1 \phi \exp(\beta(\theta^- - \theta))(s - s_{cr})^\gamma, & \theta < \theta^-; \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+; \\ \lambda_2(\phi_g - \phi) \exp(\beta(\theta - \theta^+)), & \theta > \theta^+. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $s \equiv s_1$ — водонасыщенность ($1 - s = s_2$), θ^+ — температура плавления льда, θ^- — температура замерзания воды, $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ — размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta]=1/\text{K}$, $[\lambda_1]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K})$, $[\lambda_2]=\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$). Данная зависимость верифицирована для модели фильтрации воды и воздуха в тающем снеге в работе [3] на экспериментальных данных из работы [7].

3. Интенсивность фазового перехода

В работе [9] сделан обширный обзор экспериментальных исследований по определению интенсивности фазового перехода в полностью насыщенном грунте. Стандартный эксперимент заключался в поддержании на левой границе низкой температуры, которая обеспечивалась воздухом, выдуваемым из холодильной камеры. Температура на этой границе составляла $-12,5^\circ\text{C}$. На правой

границе, наоборот, поддерживалась более высокая температура, достигаемая за счет потока нагретой жидкости, которая прокачивалась через термостат. Эта граница имела температуру $3,0^\circ\text{C}$.

Чтобы обеспечить равномерный и одномерный тепловой поток через образцы, боковые стороны были теплоизолированы, что предотвратило потерю тепла и обеспечило стабильные условия для эксперимента. В процессе исследования температура в холодильной камере и термостате контролировалась с помощью лабораторных термометров, а температура непосредственно в образцах измерялась с использованием термопар.

Для сравнения с экспериментом рассмотрим полностью насыщенный грунт, в котором скорость движения фаз $\vec{u}_i = 0$, тогда система уравнений (1)–(4) упрощается и процесс замораживания влагонасыщенного грунта с учетом влияния остаточной влажности на кинетику фазового перехода описывается уравнениями для температуры и водонасыщенности.

Уравнение для температуры записывается в виде

$$\left(\sum_{i=1}^4 \rho_i^0 c_i \alpha_i\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \nu I. \quad (7)$$

Изменение влажности, происходящее в процессе замораживания, задается уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla(D \nabla s) + I. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия в одномерном случае имеют следующий вид:

$$s|_{t=0} = s_0, \quad \frac{\partial s}{\partial x}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x}|_{\Gamma_2} = 0, \quad (9)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{\Gamma_1} = \theta_{min}, \quad \theta|_{\Gamma_2} = \theta_0, \quad (10)$$

где θ_0 — температура грунта в начальный момент времени, s_0 — влажность в начальный момент времени, $D = D(s)$ — коэффициент диффузии [9].

В работе [9] проведена верификация зависимости для интенсивности обмена массой (5) на данных из приведенного выше эксперимента. Использовалась упрощенная математическая модель (7)–(10), в которой не учитывалось изменение теплоемкости и плотности грунта при замерзании. В данной работе (см. рис. 1 и 2) приведена верификация зависимости (6) с экспериментальными данными из работы [6] для времени $t = 12$ часов. Для удобства решения задачи и представления результатов уравнения начальные и граничные условия приведены к безразмерному виду с помощью следующего преобразования:

$$\xi = \frac{x}{H}, \quad T = \frac{\theta - \theta_{0*}}{\theta_{min} - \theta_{0*}},$$

$$\omega = \frac{s - s_{min}}{s_0 - s_{min}}, \quad D = \frac{D(s)}{D(s_0)},$$

где H — глубина исследуемой области.

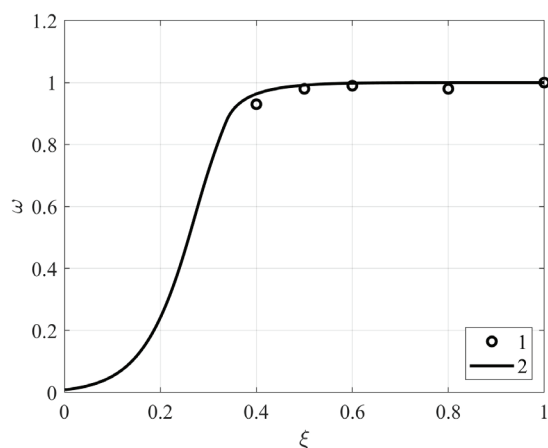


Рис. 1. Сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных для распределения влажности:

- 1 — результаты эксперимента [6];
2 — результаты численного моделирования

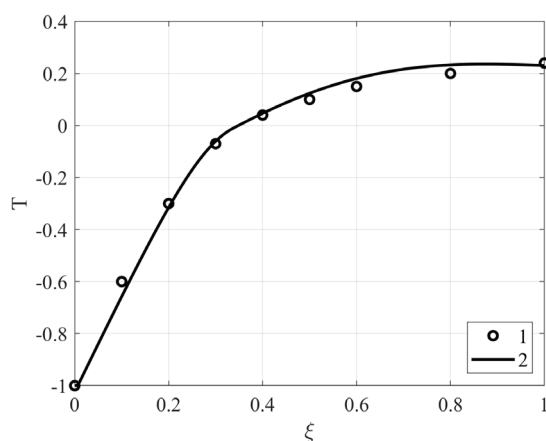


Рис. 2. Сравнение результатов численного моделирования и экспериментальных данных для распределения температуры:

- 1 — результаты эксперимента [6];
2 — результаты численного моделирования

Влажность (см. рис. 1) монотонно возрастает с левой границы до значения, соответствующего влажности почвы в незамерзшей зоне. Резкое увеличение профиля влажности в зоне фазового перехода отражает диффузию влаги из незамерзшей зоны вследствие кристаллизации. Температурное распределение по глубине (см. рис. 2) указывает, что фронт заморзания располагается в диапазоне от 0,3 до 0,5. Наблюдается значительное соответствие между результатами моделирования и экспериментальными данными.

4. Численные эксперименты

Проведено численное исследование полной модели (1)–(4), учитывающей фильтрационные свойства грунта и его переменную пористость.

В начальный момент времени пористость равна 0,3, на верхней границе температура $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, на нижней границе поддерживалась температура $-0,05\text{ }^{\circ}\text{C}$. На рисунке 3 приведено распределение пористости, на рисунке 4 распределение температуры по глубине для двух экспериментов. Результаты моделирования продемонстрировали образование слоя с заметно меньшей пористостью, что, в свою очередь, приводит к уменьшению его проницаемости. Эти результаты соответствуют физическим процессам таяния и заморзания. Математическая модель предоставляет возможность оценить объем поверхностного и грунтового стока во время весеннего снеготаяния, принимая во внимание изменения проницаемости почвы и верхних слоев грунта.

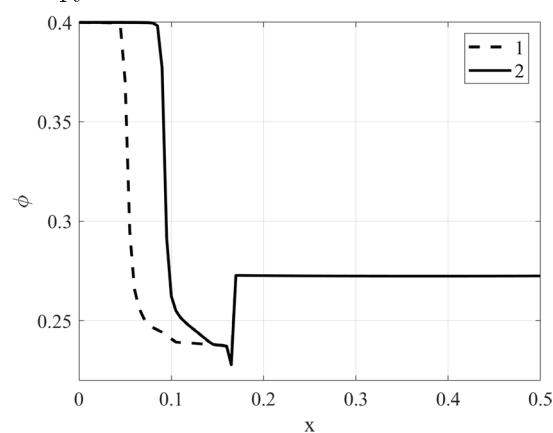


Рис. 3. Результаты численного моделирования распределения пористости по глубине в момент времени: 1) $t = 8\text{ ч}$, 2) $t = 16\text{ ч}$

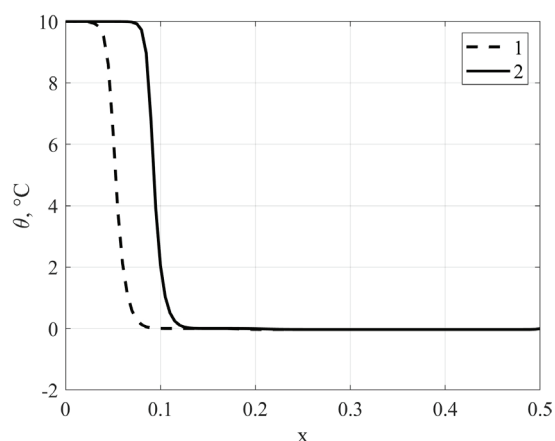


Рис. 4. Результаты численного моделирования распределения температуры по глубине в момент времени: 1) $t = 8\text{ ч}$, 2) $t = 16\text{ ч}$

Выводы

Предложена одномерная математическая модель фильтрации воды и воздуха в промерзаю-

щем/протаивающем грунте и снеге на поверхности грунта. Проведена верификация на экспериментальных данных эмпирических зависимостей, использующихся для описания интенсивности фазового перехода «лед — вода». Численно прове-

рен физический принцип максимума для пористости грунта при полном протаивании верхнего слоя мерзлого грунта. Проведена проверка сходимости численного решения на последовательности измельченных сеток.

Библиографический список

1. Колесников А.Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Доклады Академии наук СССР. 1952. Т. 82. № 6. С. 889–891.
2. Alekseeva S.V., Sazhenkov S.A. Numerical Analysis of a One-dimensional Model of a Melting-freezing Snowpack // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2021. Vol. 8. No 4. P. 17–27. DOI: 10.14529/jcem210403
3. Сибин А.Н., Папин А.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 1. С. 109–118.
4. Сибин А.Н., Папин А.А. Моделирование движения растворимой примеси в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65. № 1. С. 58–69.
5. Tsyppkin G.G. Water – Ice Phase Transition in Unsaturated Soil in the Presence of Capillary Pressure // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 5. No 4. P. 681–690.
6. Ершов Э.Д. Влагоперенос и криогенные текстуры в дисперсных породах. М.: МГУ. 1979. 214 с.
7. Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H. Effect of Snow Structure on Water Flow and Solute

Transport // *Hydrological processes*. 2008. Vol. 18. No 7. P. 1271–1290.

8. Прохоров А.Е., Желнин М.С., Костина А.А., Плехов О.А. Исследование особенностей неравновесного фазового перехода во флюидонасыщенном грунте // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 4 (42). С. 31–37.
9. Bronfenbrener L. Non-equilibrium Crystallization in Porous Media: Numerical Solution // *Cold Region Science and Technology*. 2013. Vol. 85. P. 137–149. DOI: 10.1016/j.coldregions.2012.09.002
10. Bronfenbrener L. Frost Heave and Ice Lenses Formation in Freezing Soils // *Journal of Chemical Engineering Research Updates*. 2014. Vol. 1. No 1. P. 3–19.
11. Нерсесова З.А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры // Доклады Академии наук СССР. 1950. Т. 75. № 6. С. 845–846.
12. Шмакин А.Б. Модель снежного покрова с учетом слоистой структуры и ее сезонной эволюции // Криосфера Земли. 2009. Т. 13. № 4. С. 68–79.

References

1. Kolesnikov A.G. On Changing the Mathematical Formulation of the Problem of Soil Freezing. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1952. Vol. 82. No 6. P.889–891. (In Russ.)
2. Alekseeva S.V., Sazhenkov S.A. Numerical Analysis of a One-dimensional Model of a Melting-freezing Snowpack. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2021. Vol. 8. No 4. P. 17–27. DOI: 10.14529/jcem210403
3. Sibina A.N., Papin A.A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. No 1. P. 109–118. (In Russ.)
4. Sibina A.N., Papin A.A. Modeling the Movement of Dissolved Salt in Melting Snow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024. Vol. 65. No 1. P. 58–69. (In Russ.)
5. Tsyppkin G.G. Water – Ice Phase Transition in Unsaturated Soil in the Presence of Capillary Pressure. *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 5. No 4. P. 681–690.
6. Ershov E.D. *The Moisture Transfer and Cryogenic Textures in Dispersive Rocks*. M.: MSU. 1979. 214 p. (In Russ.).
7. Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H. Effect of Snow Structure on Water Flow and So-

lute Transport. *Hydrological Processes*. 2008. Vol. 18. No 7. P. 1271–1290.

8. Prokhorov A.E., Zhelnin M.S., Kostina A.A., Plekhov O.A. Investigation of Non-equilibrium Phase Transition in Freezing Porous Media. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2018. No 4 (42). P. 31–37. (In Russ.)
9. Bronfenbrener L. Non-equilibrium Crystallization in Porous Media: Numerical Solution. *Cold Region Science and Technology*. 2013. Vol. 85. P. 137–149. DOI: 10.1016/j.coldregions.2012.09.002
10. Bronfenbrener L. Frost Heave and Ice Lenses Formation in Freezing Soils. *Journal of Chemical Engineering Research Updates*. 2014. Vol. 1. No 1. P. 3–19. DOI: 10.15377/2409-983X.2014.01.01.1
11. Nersesova Z.A. Change in Soil Ice Content Depending on Temperature. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1950. Vol. 75. No 6. P. 845–846. (In Russ.)
12. Shmakin A.B. Model of Snow Cover Taking into Account the Layered Structure and Its Seasonal Evolution. *Earth's Cryosphere*. 2009. Vol. 13. No 4. P. 68–9. (In Russ.)

Информация об авторах

А.Н. Сибин, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;

Т.А. Пекарская, инженер, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия; аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

A.N. Sibin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Researcher, Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Researcher at the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;

T.A. Pekarskaya, Engineer at the Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia; Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia.