

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 118–122.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 118–122.

Научная статья

УДК: 514.172

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-16

Критерии совпадения выпуклых оболочек границы множества и его замыкания

Ирина Викторовна Поликанова¹, Мария Викторовна Куркина²

¹Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия, Anirix1@yandex.ru

²Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, Ханты-Мансийск, Россия, mavi@inbox.ru

Original article

Criteria for the Coincidence of the Convex Hulls of the Boundary of a Set and the Closure of this Set

Irina V. Polikanova¹, Mariy V. Kurkina²

¹Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, Anirix1@yandex.ru

²Khanty-Mansiysk State Medical Academy, Khanty-Mansiysk, Russia, mavi@inbox.ru

Аннотация. Из свойств выпуклых оболочек и замыканий множеств следует, что выпуклая оболочка границы множества содержится в выпуклой оболочке его замыкания. В статье выясняются условия их совпадения.

Основной результат: для множества X в n -мерном аффинном пространстве A^n следующие утверждения равносильны:

1. Выпуклая оболочка границы множества совпадает с выпуклой оболочкой его замыкания.
2. Замыкание выпуклой оболочки границы множества совпадает с замыканием выпуклой оболочки его замыкания.
3. Множество X не содержит полупространств.
4. Выпуклая оболочка дополнения множества X есть пространство A^n .

Для ограниченного множества все эти утверждения справедливы.

Методы доказательства — топологические, с опорой на факты теории выпуклых тел в A^n .

Ключевые слова: граница множества, выпуклая оболочка, выпуклая оболочка границы множества, выпуклая оболочка замыкания множества

Для цитирования: Поликанова И.В., Куркина М.В. Критерии совпадения выпуклых оболочек границы множества и его замыкания // Известия Алтайского государственного университета. 2025. №1 (141). С. 118–122. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-16

Abstract. The paper explores the connections between the convex hull of a set, the convex hull of its boundary, and the convex hull of its closure in an affine n -dimensional space A^n . According to the properties of convex hulls and closures of sets, it follows that the convex hull of a set boundary is contained in the convex hull of the closure of this set. The article examines the conditions for their coincidence.

The main result: for a set X in space A^n , the following statements are equivalent:

1. The convex hull of the boundary of a set coincides with the convex hull of its closure.
2. The closure of the convex hull of the boundary of a set coincides with the closure of the convex hull of the closure of this set.
3. The set X contains no half-spaces.
4. The convex hull of the complement of the set X is the space A^n .

All these propositions are valid for a bounded set.

The methods of proof are topological, based on the facts of the theory of convex bodies in A^n .

Keywords: boundary of a set, convex hull, convex hull of set boundary, convex hull of a closure of a set

For citation: Polikanova I.V., Kurkina M.V. Criteria for the Coincidence of the Convex Hulls of the Boundary of a Set and the Closure of this Set. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 118–122. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-16

Введение

Выпуклые оболочки находят широкое применение в экономике, физике, биологии и в самой математике. Но большая часть литературы по данной теме посвящена поискам эффективных алгоритмов построения выпуклых оболочек. Что же касается топологических аспектов, то результатов в этой сфере не так много. Это вошедшие во все учебники по выпуклому анализу утверждения об открытости выпуклой оболочки открытого множества и компактности выпуклой оболочки компактного множества [1], ставшая уже классикой теорема Крейна — Мильмана [2] о том, что выпуклая оболочка компакта совпадает с выпуклой оболочкой ее крайних точек, и теорема Крейна — Смулиана, являющаяся ее обобщением в банаховых пространствах [3], теорема Густина о том, что всякая внутренняя точка выпуклой оболочки некоторого множества X в n -мерном евклидовом пространстве E^n является внутренней точкой выпуклой оболочки подмножества X , состоящего не более чем из $2n$ точек [4]. Условия замкнутости выпуклой оболочки замкнутого множества исследовали Сакумо Ицумо [5] и Хусейнов [6]. Бен-Эль-Мехайех сформулировал критерий замкнутости выпуклой оболочки объединения замкнутого выпуклого множества и компактного выпуклого множества [7].

Обозначения: $C(X)$, clX , $intX$, ∂X — соответственно дополнение, замыкание, внутренность, граница множества X в n -мерном аффинном пространстве A^n .

В статье исследуются соотношения между выпуклыми оболочками множества, его границы и его замыкания в A^n .

Ввиду соотношения $\partial X \subset clX$ и свойств выпуклых оболочек и замыканий множеств имеем включения

$$a) Co(\partial X) \subset Co(clX), \quad (1)$$

$$b) cl(Co(\partial X)) \subset cl(Co(clX)). \quad (2)$$

Нас интересует вопрос: когда в (1), (2) будут знаки равенства.

В разделе 2 доказана теорема

Теорема 1. Для множества $X \subset A^n$ следующие предложения равносильны:

$$1. \quad Co(clX) = Co(\partial X). \quad (3)$$

$$2. \quad cl(Co(clX)) = cl(Co(\partial X)). \quad (4)$$

$$3. \quad X \text{ не содержит полупространств.}$$

$$4. \quad Co(C(X)) = A^n. \quad (5)$$

Ясно, что множество содержит открытое полупространство тогда и только тогда, когда содержит замкнутое полупространство. Поэтому можно не уточнять, о каком именно полупространстве идет речь: открытом или замкнутом.

Методы доказательства — топологические, с опорой на факты теории выпуклых тел в A^n .

1. Выпуклые оболочки множества

Точки аффинного n -мерного пространства A^n будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Если σ — гиперплоскость, то через σ^+ и σ^- будем обозначать ограниченные ею открытые полупространства, а через $\bar{\sigma}^+$ и $\bar{\sigma}^-$ — соответствующие им замкнутые полупространства: $\bar{\sigma}^+ = cl \sigma^+$, $\bar{\sigma}^- = cl \sigma^-$. В дальнейшем используются соотношения:

$$C(\sigma^+) = \bar{\sigma}^-, \quad C(\sigma^-) = \bar{\sigma}^+.$$

Приведем необходимые сведения из теории выпуклых множеств.

Множество X в A^n называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя своими точками оно содержит и соединяющий их отрезок.

Флаговым полупространством с пикой M называется максимальное по включению не содержащее точку M непустое выпуклое множество $S_M \subset E^n$ ([1], с. 12).

Пусть

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_i \subset \sigma_{i+1} \subset \dots \subset \sigma_n$$

— последовательность вложенных друг в друга аффинных подпространств $\sigma_i \subset A^n$ размерностей $i = 0, 1, \dots, n$, причем $\sigma_0 = M$ — точка, $\sigma_n = A^n$ — само пространство. Геометрическая структура флагового полупространства описывается следующими предложениями.

Предложение 1 ([1], теорема 1.10)

Множество вида $S_M = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i^+$ является флаговым полупространством с пикой M , и каждое флаговое полупространство имеет такой вид.

Предложение 2 ([1], лемма 1.3)

Пусть X_1, X_2 — пара непустых дополняющих друг друга выпуклых множеств в A^n , т.е.

$$X_1 \cup X_2 = A^n, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Тогда: а) $clX_1 \cap clX_2$ есть гиперплоскость в A^n , б) $intX_1, intX_2, clX_1, clX_2$ суть ограниченные этой гиперплоскостью открытые и замкнутые полупространства в A^n .

В ([1], с. 14) доказывается, что дополнение к S_M является выпуклым множеством.

Из предложения 2 следует, что $intS_M, intC(S_M), clS_M, clC(S_M)$ — открытые и замкнутые полупространства в A^n , ограниченные гиперплоскостью $\sigma_{n-1} = clS_M \cap clC(S_M)$.

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество X , называется *выпуклой оболочкой* множества X и обозначается $Co X$.

Предложение 3 ([1], теорема 2.1)

Выпуклая оболочка множества $X \subset A^n$ есть либо пересечение всех содержащих X флаговых полупространств: $Co X = \bigcap_{S_M \supset X} S_M$, либо все A^n (если нет ни одного S_M , содержащего X).

Предложение 4 Для любых $X, Y \subset E^n$

- a) $X \subset Co X$;
- b) $X \subset Y \Rightarrow Co X \subset Co Y$;
- c) если X — выпуклое множество, то $Co X = X$, в частности, $Co(Co X) = Co X$;
- d) если X — компактное множество, то $Co X$ — также компактное множество;
- e) (теорема Каратеодори) $Co X$ есть объединение всех m -мерных симплексов в E^n ($m \leq n$) с вершинами в X .

Доказательство. Свойства a), b), c) непосредственно вытекают из определения выпуклой оболочки множества X как минимального по включению выпуклого множества, содержащего данное множество X . d), e) [1] теоремы 2.6 и 2.4.

Предложение 5 (об альтернативе)[8]

Пусть множества X, Y таковы, что $C(Y)$ связное множество и $\partial X \subset Y$. Тогда либо $cl X \subset Y$ либо $cl C(X) \subset Y$.

Предложение 6 ([1], теорема 3.4). *Непустые выпуклые множества X и Y в A^n , замыкания которых не пересекаются и хотя бы одно из которых ограничено, строго отделяемы некоторой гиперплоскостью σ , т. е. $X \subset \sigma^+$, $Y \subset \sigma^-$.*

2. Доказательство теоремы 1.

1. $\Rightarrow$ 2. Тривиально.

2. $\Rightarrow$ 3. Пусть выполнено (4). Покажем, что X не содержит полупространств. Допустим противное: X содержит открытое полупространство σ^+ , ограниченное гиперплоскостью σ : $\sigma^+ \subset X$. Тогда

$$C(X) \subset C(\sigma^+) \Rightarrow C(X) \subset \bar{\sigma}^-.$$

Так как множество $\bar{\sigma}^-$ замкнуто, то:

$$\partial C(X) \subset cl C(X) \subset \bar{\sigma}^-.$$

Но $\partial C(X) = \partial X$, поэтому $\partial X \subset \bar{\sigma}^-$. Поскольку полупространство $\bar{\sigma}^-$ — выпуклое множество, то по предложениям 4b), c)

$$Co(\partial X) \subset Co(\bar{\sigma}^-) = \bar{\sigma}^-.$$

Так как $\bar{\sigma}^-$ — замкнутое множество, то последние соотношения влекут:

$$cl(Co(\partial X)) \subset cl(\bar{\sigma}^-) = \bar{\sigma}^-. \quad (6)$$

С другой стороны, поскольку $\sigma^+ \subset X$, по свойству замыканий имеем: $cl(\sigma^+) \subset cl X$ или $\bar{\sigma}^+ \subset cl X$ и

по предложению 4b) с учетом выпуклости множества $\bar{\sigma}^+$ можем записать:

$$\bar{\sigma}^+ = Co(\bar{\sigma}^+) \subset Co(cl X),$$

что влечет ввиду замкнутости множества $\bar{\sigma}^+$,

$$\bar{\sigma}^+ = cl(\bar{\sigma}^+) \subset cl(Co(cl X)). \quad (7)$$

Тогда из (6), (4), (7) выводим:

$$\bar{\sigma}^+ \subset cl(Co(cl X)) = cl(Co(\partial X)) \subset \bar{\sigma}^-,$$

из чего следует ложное заключение: $\bar{\sigma}^+ \subset \bar{\sigma}^-$. Значит, сделанное допущение ложно и множество X не содержит полупространств. Доказано.

3. $\Leftrightarrow$ 4. Докажем равносильное предложение: $Co(C(X)) \neq A^n$ тогда и только тогда, когда X содержит полупространство.

По предложению 3 условие $Co(C(X)) \neq A^n$ означает, что существует флаговое полупространство, содержащее множество $C(X)$. Тогда его замыкание есть замкнутое полупространство $\bar{\delta}^+$, поэтому $C(X) \subset \bar{\delta}^+$, что влечет: $\delta^- = C(\bar{\delta}^+) \subset X$, т. е. множество X содержит открытое полупространство δ^- .

Пусть, наоборот, открытое полупространство $\delta^- \subset X$. Тогда ввиду выпуклости замкнутого полупространства $\bar{\delta}^+$ по предложению 4b), c) имеем: $C(X) \subset C(\delta^-) = \bar{\delta}^+ \Rightarrow Co(C(X)) \subset Co(\bar{\delta}^+) = \bar{\delta}^+$. Следовательно, $Co(C(X)) \neq A^n$. Доказано.

3. $\Rightarrow$ 1. Докажем равносильное контрапозиционное утверждение: $Co(\partial X) \neq Co(cl X) \Rightarrow X$ содержит полупространство.

Пусть $Co(\partial X) \neq Co(cl X)$. Ввиду (1) делаем вывод: $Co(\partial X) \neq A^n$. По предложению 3

$$Co(\partial X) = \bigcap_{S_M \supset \partial X} S_M$$

— пересечение всех флаговых полупространств, содержащих ∂X . Множество $C(S_M)$ связно, будучи выпуклым множеством. По предложению 5 из соотношения $\partial X \subset S_M$ следует альтернатива: $cl X \subset S_M$ либо $cl C(X) \subset S_M$. Если для какого-либо флагового полупространства S_M , содержащего ∂X , выполняется $cl C(X) \subset S_M$, то тогда и $C(X) \subset S_M$, что влечет $C(S_M) \subset X$. В этом случае открытое полупространство $int C(S_M)$ содержится в X .

Покажем, что вариант, когда для всех флаговых полупространств, содержащих ∂X , имеет место $cl X \subset S_M$, невозможен. Действительно, при таком раскладе

$$cl X \subset \bigcap_{S_M \supset \partial X} S_M.$$

Поскольку пересечение флаговых полупространств есть выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств), то

$$Co(cl X) \subset \bigcap_{S_M \supset \partial X} S_M.$$

Принимая во внимание (1), запишем цепочку включений:

$$\bigcap_{S_M \supset \partial X} S_M = Co(\partial X) \subset Co(cl X) \subset \bigcap_{S_M \supset \partial X} S_M,$$

из которой следует, что $Co(\partial X) = Co(cl X)$ в противоречии с допущением. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Одновременность равенств (3) (4) не означает, что равенство (3) влечет замкнутость множеств $Co(cl X)$ и $Co(\partial X)$. Например, если X — множество в E^2 , заключенное между парой трактрис, симметричных относительно их общей асимптоты l , то множество $Co(cl X)$ совпадает с $Co(\partial X)$ и представляет собой множество точек, расположенных между прямыми, параллельными прямой l и проходящими через вершины A и B этих трактрис в объединении с этими вершинами.

Множество X в A^n называется *ограниченным*, если содержится в некотором компактном множестве ([1], с. 21).

Теорема 2. Пусть $X \subset A^n$.

1. Если множество X замкнуто, то

$$Co(\partial X) \subset Co X. \quad (8)$$

2. Если множество X ограничено, то

$$Co X \subset cl(Co X) = Co(cl X) = Co(\partial X). \quad (9)$$

3. Если множество X компактно, то

$$Co X = Co(cl X) = Co(\partial X). \quad (10)$$

Доказательство.

1. Если множество X замкнуто, то (8) вытекает из соотношений $\partial X \subset cl X = X$ на основании предложения 4а).

2. Первое включение в (9) очевидно.

Пусть множество X ограничено, т. е. содержится в некотором компакте $K \subset A^n$. Пространство A^n хаусдорфово, поэтому компакт K замкнут в A^n . Тогда $cl X \subset cl K = K$. Следовательно, множество $cl X$ является компактом (по теореме: замкнутое подмножество компакта есть компакт). По предложению 4с) множество $Co(cl X)$ также компакт, а потому замкнуто в A^n и совпадает со своим замыканием:

$$Co(cl X) = cl(Co(cl X)).$$

По предложению 4б) и свойствам замыканий

$$X \subset cl X \Rightarrow Co X \subset Co(cl X) \Rightarrow cl(Co X) \subset cl(Co(cl X)) = Co(cl X),$$

откуда следует

$$cl(Co X) \subset Co(cl X). \quad (11)$$

Допустим, что равенство

$$cl(Co X) = Co(cl X) \quad (12)$$

не имеет места. Тогда ввиду (11) найдется точка $M \in Co(cl X) \setminus cl(Co X)$. По предложению (6) некоторая гиперплоскость σ строго разделяет точку M и $cl(Co X)$, т. е. $M \in \sigma^-$, $cl(Co X) \subset \sigma^+$. Так как $M \in Co(cl X)$, то по предложению 4е) существует симплекс с вершинами в множестве $cl X$, содержащий точку M . Тогда хотя бы одна из вершин этого симплекса, например N , содержится в σ^- , иначе все вершины симплекса содержались бы в $C(\sigma^-) = \bar{\sigma}^+$, а ввиду выпуклости полуплоскости $\bar{\sigma}^+$ и весь симплекс вместе с точкой M содержался бы в $\bar{\sigma}^+$ в противоречии с условием $M \in \sigma^-$. Так как $N \in cl X$, а σ^- окрестность точки N , то имеется точка $P \in X \cap \sigma^-$ (возможно, точка P совпадает с N). Но $X \subset cl(Co X) \subset \sigma^+$ и $\sigma^+ \cap \sigma^- = \emptyset$. Пришли к противоречию, которое и доказывает равенство (12).

Второе равенство в (9) вытекает из теоремы 1, поскольку компактное множество не содержит полупространств, а значит, и ограниченное множество не содержит полупространств.

3. Равенства (10) следуют из (8) и (9), поскольку компактное множество в A^n замкнуто и ограничено. Теорема 2 доказана полностью.

Замечание 2. В евклидовом n -мерном пространстве E^n равенство (12) составляет содержание теоремы 1.1.10 [9].

Пример 1. Для незамкнутого множества равенство $Co X = Co(\partial X)$ может не выполняться, например, для открытого шара $X \subset E^n$.

Пример 2. Для неограниченного множества равенство $Co X = Co(\partial X)$ может не выполняться. Пусть X — дополнение открытого шара B в E^n . Тогда $Co X = Co(cl X) = E^n$, а $Co(\partial X) = cl B$ — замкнутый шар.

Пример 3. Для неограниченного множества равенство (12) может не выполняться. Пусть X — множество в E^2 , ограниченное одной ветвью тангенсоиды. Тогда $Co X = Co(cl X)$ — открытая полуплоскость, ограниченная той асимптотой тангенсоиды, которая не содержится в X , а $cl Co X$ — замкнутая полуплоскость.

Заключение

В статье выявлены критерии совпадения выпуклой оболочки границы множества и его замыкания в A^n . В частности, такое совпадение имеет место для ограниченных множеств. В следующей статье мы намереваемся описать вид множеств $cl(Co(\partial X))$ и $cl(Co(cl X))$ в случае их несовпадения.

Библиографический список

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М., 1985. 336 с.
2. Krein M., Milman D. On Extreme Points of Regular Convex Sets // *Studia Mathematica*. 1940. Vol. 9. P. 133–138. DOI: 10.4064/sm-9-1-133-138
3. Krein M., Šmulian D. On Regularly Convex Sets in the Space Conjugate to Banach Space // *Annals of Mathematics*. 1940. Second Series. Vol. 41. No 3. P. 556–583. DOI: 10.2037/1968735. hdl:10338.dmlcz/100106
4. Gustin W. On the Interior of the Convex Hull of a Euclidian Set // *Bulletian of the American Mathematical Society*. 1947. Vol. 53. No 4. P. 299–301. DOI: 10.1090/S0002-9904-1947-08787-5. MR:0020800
5. Sakuma Itsuo. Closedness of the Convex Hulls // *Journal of Economic Theory*. 1977. Vol. 14. P. 223–227. DOI: 10.1016/0022-0531(77)99095-3
6. Hüseinov F. A Note on the Closedness of the Convex Hull and its Applications // *Journal of Convex Analysis*. 1999. Vol. 6. No 2. P. 387–393.
7. Ben-El-Mechaiekh H. On the Closedness of the Convex Hull in a Locally Convex Space // *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2014. Vol. 4. No 10. P. 1351–1355. DOI: 10.9734/BJMCS/2014/9194
8. Поликанова И.В. О границах множеств и границах выпуклых множеств. // *Известия Алтайского государственного университета*. 2024. № 1 (135). С. 120–125. DOI: 10.14258/izvasu (2024)1-17
9. Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1993. 490 p.

References

1. Leichtweis K. *Convex Sets*. M.: Nauka. 1985. 336 p. (In Russ.).
2. Krein M., Milman D. On Extreme Points of Regular Convex Sets. *Studia Mathematica*. 1940. Vol. 9. P. 133–138. DOI: 10.4064/sm-9-1-133-138
3. Krein M., Smulian D. On Regularly Convex Sets in the Space Conjugate to Banach Space. *Annals of Mathematics*. 1940. Second Series. Vol. 41. No 3. P. 556–83. DOI: 10.2037/1968735. hdl:10338.dmlcz/100106
4. Gustin W. On the Interior of the Convex Hull of a Euclidian Set. *Bulletian of the American Mathematical Society*. 1947. Vol. 53. No 4. P. 299–301. DOI: 10.1090/S0002-9904-1947-08787-5. MR:0020800
5. Sakuma Itsuo. Closedness of the Convex Hulls. *Journal of Economic Theory*. 1977. Vol. 14. P. 223–227. DOI: 10.1016/0022-0531(77)99095-3
6. Husseinov F. A Note on the Closedness of the Convex Hull and its Applications. *Journal of Convex Analysis*. 1999. Vol. 6. No 2. P. 387–393.
7. Ben-El-Mechaiekh H. On the Closedness of the Convex Hull in a Locally Convex Space. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2014. Vol. 4. No 10. P. 1351–1355. DOI: 10.9734/BJMCS/2014/9194
8. Polikanova I.V. On the Boundaries of Sets and Boundaries of Convex Sets. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 120–125. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu (2024)1-17
9. Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge; New York : Cambridge University Press,, 1993. 490 p.

Информация об авторах

И.В. Поликанова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия;

М.В. Куркина, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физиологии и спортивной медицины, Ханты-Мансийская государственная медицинская академия, Ханты-Мансийск, Россия.

Information about the authors

I.V. Polikanova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia;

M.V. Kurkina, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Physiology and Sports Medicine, Khanty-Mansiysk State Medical Academy, Khanty-Mansiysk, Russia.