

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 105–111.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 105–111.

Научная статья

УДК 517.95 + 532.5.031 + 534.1 + 539.3

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-14

Напряженно-деформированное состояние двухслойной частично-пористой среды под действием внешнего давления

Кристина Евгеньевна Найденова¹, Татьяна Андреевна Сибирякова²,
Константин Александрович Шишмарев³

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
kristina-akulova00@mail.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
sibiriakova.tatiana@mail.ru

³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
shishmarev.k@mail.ru

Original article

Stress-Strain State of a Two-Layer Partially Porous Medium Under External Pressure

Kristina E. Naydenova¹, Tatyana A. Sibiryakova², Konstantin A. Shishmarev³

¹Altai State University, Barnaul, Russia, kristina-akulova00@mail.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, sibiriakova.tatiana@mail.ru

³Altai State University, Barnaul, Russia, shishmarev.k@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии двухслойной пористой среды под действием внешнего давления. Каждый слой моделируется тонкой упругой средой с заданными массой на единицу площади и жесткостью. Слои соединены промежуточным слоем, учитывающим упругое и сдвиговое взаимодействие между ними. Нижний слой находится в контакте с жидкостью и является пористым. Пористость нижнего слоя моделируется через учет скорости проникновения жидкости на его нижней границе, которая определяется из закона Дарси. К рассматриваемой двухслойной среде приложено периодическое внешнее давление. Получено периодическое по времени решение для вертикальных перемещений и распределения деформаций в каждом слое. Поведение слоев исследовано в зависимости от значений параметров промежуточного слоя и пористости. Получено, что поведение слоев, в большей степени верхнего, сильно зависит от параметров промежуточного слоя. Относительные деформации в слоях увеличиваются с увеличением пористости нижнего слоя.

Ключевые слова: двухслойная тонкая среда, пористость, внешнее давление, деформации

Abstract. The paper deals with the problem of the stress-strain state of a two-layer porous medium under external pressure. Each layer is modeled as a thin elastic medium with specified mass per unit area and stiffness. An intermediate layer connects the layers, with consideration of elastic and shear interactions between them. The porous bottom layer is in contact with a liquid. The bottom layer porosity is modeled using the rate of liquid penetration at its lower boundary that is determined by Darcy's law. The considered two-layer medium is subjected to periodic external pressure. The obtained solution for displacements and distributions of deformations in each layer is time-periodic. The behavior of the layers is investigated in relation to different values of intermediate layer parameters and porosity. It is found that the behavior of the layers, primarily the upper one, strongly depends on the parameters of the intermediate layer. Deformations in the layers increase with increasing porosity of the bottom layer.

Keywords: two-layer thin medium, porosity, external pressure, deformations

Для цитирования: Найденова К.Е., Сибирякова Т.А., Шишмарев К.А. Напряженно-деформированное состояние двухслойной частично-пористой среды под действием внешнего давления // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 105–111. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-14

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>

Введение

Пороупругие среды используются для моделирования процессов захоронения газа, движения магмы, движения вязкой жидкости в пористых грунтах, динамики тающего снежно-ледового покрова и др. Наиболее используемыми моделями пороупругих сред являются модели фильтрации вязкой жидкости. Основными уравнениями таких моделей являются уравнения неразрывности, уравнения движения в форме закона Дарси и дополнительные реологические соотношения, см, например, [1–4]. Однако такие модели часто являются трудными для практического применения и анализа. В данной статье будет рассмотрена модель двухслойной пороупругой среды, которая должна быть применима для случаев, когда толщина слоев на порядок меньше занимаемого ими объема, и должна быть простой для анализа перемещений и деформаций в этих слоях. В этом случае двухслойную среду можно моделировать уравнениями тонких упругих тел с заданными массой на единицу площади, жесткостью и с учетом упругого и сдвигового взаимодействия между слоями. Аналогом таких тел могут служить тонкие пластины/балки.

Ряд исследованных задач связан с изучением вибраций в таких упругих телах. Чаще всего можно встретить модели, в которых исследуются характеристики тонких упругих тел, лежащих на упругом или вязкоупругом основании. В подобных задачах при моделировании используется представление фундамента как безмассового упругого слоя Винклера [5,6]. При другом подходе основание может моделироваться слоем Винклера — Пастернака с добавлением сдвигового взаимодействия. В работе [7] приведены модели с использованием одного и двух параметров упругого основания. Данные модели также хорошо описывают процессы, связанные с влиянием грунтов на различные виды конструкций. Выявлено, что в однослойных системах, в которых упругое или вязкоупругое основание моделирует грунты, большее влияние оказывают жесткость и слоистый характер грунтов [8,9]. В работе [10] представлено сравнение преимуществ и недостатков различных подходов к моделированию систем грунт — фундамент — конструкция. При решении некото-

For citation: Naydenova K.E., Sibiryakova T.A., Shishmarev K.A. Stress-Strain State of a Two-Layer Partially Porous Medium Under External Pressure. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 105–111. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-14

Funding: the study was supported by the Russian Science Foundation grant No 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>

рых практических задач возникает необходимость в исследовании систем, состоящих из двух упругих тел (пластин), соединенных упругим слоем, но такие задачи являются недостаточно изученными. Вибрации двухбалочной системы с упрощенной моделью вязкоупругого слоя рассмотрены в [11]. Модель двухбалочной системы под действием внешнего давления рассмотрена в [12]. Применение моделей упругих тел к решению задач о динамике ледового покрова проведено в [13–15].

1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная двумерная задача о напряженно-деформированном состоянии двухслойной частично пористой среды под действием внешнего давления. Двухслойная среда состоит из двух тонких слоев, каждый из которых моделируется тонким упругим телом. Между упругими слоями находится промежуточный слой Пастернака, который учитывает упругое и сдвиговое взаимодействие между верхним и нижним слоем. Нижний слой является пористым и упругим, верхний слой — упругим. На слои (сверху и снизу) действует внешнее давление. На нижний слой действует внешнее давление жидкости. Толщина жидкого слоя под нижним пористым упругим слоем равна H . На верхний слой действует внешнее давление, описываемое функцией $P(x, t)$ и осциллирующее с частотой ω . Слои неограничены в направлении оси x . Задача решается в рамках линейной теории гидроупругости, в которой оба слоя моделируются упругим телом (пластинами) с заданной массой на единицу площади M_1 и M_2 и жесткостью D_1 и D_2 . Поведение каждого слоя описывается их вертикальным перемещением $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$ из состояния покоя. Для упрощения модели будем считать, что течение жидкости под нижним слоем считается потенциальным, жидкость — невязкая и несжимаемая. Давление жидкости на границе нижний слой — жидкость задается линеаризованным интегралом Коши — Лагранжа

$$p(x, 0, t) = -\rho_\ell \varphi_t - \rho_\ell g w_2 \quad (-\infty < x < \infty, z = 0), \quad (1)$$

где ρ_ℓ — плотность жидкости, $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости течения жидкости, g — модуль ускорения силы тяжести. Потенциал скоро-

сти $\varphi(x, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -H < z < 0) \quad (2)$$

и граничному условию непротекания на дне жидкого слоя

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H). \quad (3)$$

В рассматриваемой модели пористость учитывается через нормальную скорость проникновения жидкости в нижний слой. Скорость проникновения жидкости v_n пропорциональна давлению жидкости, действующему на нижнюю поверхность двухслойной системы. Для описания движения жидкости в порах будем использовать закон Дарси

$$\vec{v}_n = -\frac{\Pi}{\mu} \nabla p(x, z, t), \quad (4)$$

где Π — коэффициент проницаемости, μ — динамическая вязкость. В итоге получим формулу для определения v_n

$$v_n = \alpha p(x, 0, t), \quad \alpha = \frac{\Pi}{\mu h^{(2)}}, \quad p = -\rho_\ell \varphi_t - \rho_\ell g w_2,$$

где $h^{(2)}$ — толщина нижнего слоя. Таким образом, кинематическое условие для потенциала течения жидкости на границе раздела нижний слой — жидкость ($z = 0$) имеет вид

$$\varphi_z = \alpha w_{2,t} + \alpha p(x, 0, t) \quad (z = 0). \quad (5)$$

Система уравнений дополняется условиями затухания возмущений в слоях и жидкости вдали от области приложения внешнего давления

$$w_1, w_2 \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Рассмотрим внешнее давление $P(x, t)$, осциллирующее с заданной частотой ω

$$P(x, t) = P_0 P_1(x/H) e^{i\omega t},$$

где P_0 — амплитуда, $P_1(x/H)$ — безразмерная функция, описывающая форму приложенного давления. Будем искать периодическое по времени решение

$$w_j(\tilde{x}, t) = \text{Re}[W_{sc} W_j(\tilde{x}) e^{i\omega t}] \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{z}, t) = \text{Re}[i\Phi_{sc} \Phi(\tilde{x}, \tilde{z}) e^{i\omega t}], \quad (8)$$

где $\tilde{x} = x/H$ и $\tilde{z} = z/H$, $W_{sc} = P_0/(\rho_\ell g)$, $\Phi_{sc} = \omega H W_{sc}$. В безразмерных переменных (здесь и далее функции и переменные записаны в безразмерном виде, знак $\sim$ опускается) система уравнений,

описывающая поведение рассматриваемой двухслойной системы, имеет вид

$$\begin{aligned} & -m_1 \gamma W_1 + \beta_1 W_{1,xxxx} + \\ & \left(\kappa - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (W_1 - W_2) = -P_1(x), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -m_2 \gamma W_2 + \beta_2 W_{2,xxxx} + \\ & \left(\kappa - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (W_2 - W_1) = \gamma \Phi(x, 0) - W_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta\Phi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -1 < z < 0), \quad (11)$$

$$\Phi_z = 0 \quad (z = -1), \quad (12)$$

$$\Phi_z = W_2 - i\delta(\gamma\Phi - W_2) \quad (z = 0), \quad (13)$$

$$W_1, W_2, \Phi \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Здесь $m_j = \frac{M_j}{\rho_\ell H}$ — отношение масс, $\beta_j = \frac{D_j}{H^4 \rho_\ell g}$ — безразмерная жесткость каждого слоя, $\gamma = \frac{\omega^2 H}{g}$ — безразмерная частота, $\kappa = \frac{K}{\rho_\ell g}$ — безразмерный коэффициент Винклера, описывающий упругое взаимодействие между слоями, $\sigma = \frac{G}{\rho_\ell g H^2}$ — безразмерный сдвиговой параметр и $\delta = \alpha \rho_\ell g / \omega$ — безразмерный параметр пористости. Целью задачи является определение вертикальных перемещений и относительных деформаций в первом и втором слое.

2. Метод решения

Метод решения повторяет алгоритм, изложенный в работе [15]. Задача (9)–(14) решается при помощи преобразования Фурье вдоль упругих слоев

$$W_j^F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W_j(x) e^{-i\xi x} dx, \quad j = 1, 2.$$

Данное преобразование применяется ко всем уравнениям системы (9)–(14). Следуя методу в [15], в итоге придем к алгебраическим уравнениям для определения образов Фурье перемещения каждого слоя

$$W_2^F(\xi) = -\frac{(\kappa + \xi^2 \sigma) Q_3 P_1^F}{Q_1 (Q_3^2 + \gamma^2 q_2^2)} - i \frac{\gamma q_2 (\kappa + \xi^2 \sigma) P_1^F}{Q_1 (Q_3^2 + \gamma^2 q_2^2)}, \quad (15)$$

$$W_1^F(\xi) = \frac{(\kappa + \xi^2 \sigma) W_2^{Re} - P_1^F}{Q_1} + i \frac{(\kappa + \xi^2 \sigma) W_2^{Im}}{Q_1}, \quad (16)$$

где

$$Q_1(\xi) = -m_1 \gamma + \beta_1 \xi^4 + (\kappa + \xi^2 \sigma),$$

$$Q_2(\xi) = -m_2 \gamma + \beta_2 \xi^4 + (\kappa + \xi^2 \sigma),$$

$$q_1(\xi) = \frac{\xi \tanh(\xi) + \delta^2 \gamma}{q_0(\xi)}, \quad q_2(\xi) = \frac{-\delta \gamma + \delta \xi \tanh(\xi)}{q_0(\xi)},$$

$$q_0(\xi) = \xi^2 \tanh^2(\xi) + \delta^2 \gamma^2,$$

$$Q_3(\xi) = 1 + Q_2(\xi) - \gamma q_1(\xi) - \frac{\kappa + \xi^2 \sigma}{Q_1(\xi)}.$$

Функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ определяются как несобственные интегралы в виде обратного преобразования Фурье, примененного к решениям (15)–(16).

3. Численные результаты

Напряженно-деформированное состояние двухслойной среды вычислялось в безразмерных переменных для $P_1(x)$, заданной в виде локализованного пятна давления, имеющего прямоугольную форму и занимающую область $-5 < x < 5$. Вертикальные перемещения вычислялись с помощью численных методов интегрирования от обратного преобразования Фурье. Параметры κ , σ и δ менялись в большом диапазоне в расчетах для определения напряженно-деформированного состояния каждого слоя. Для упрощения анализа эти параметры вычисляются из их соотношения с безразмерными жесткостями β_1 и β_2 . На рисунке 1 показаны безразмерные вертикальные перемещения $W_1(x)$ верхнего упругого слоя, на рисунке 2 — безразмерные вертикальные перемещения $W_1(x)$ нижнего пористого упругого слоя. Расчеты проводились для безразмерных параметров: $m_1 = m_2 = 0.15$, $\beta_1 = \beta_2 = 50$, $\gamma = 0.05$, $\delta = 16$. Черной линией показаны результаты для $\kappa = \sigma = \beta_1$, красной — для $\kappa = \sigma = \beta_1/100$, синей — для $\kappa = \sigma = \beta_1/500$. Максимальные амплитуды перемещений сосредоточены в области внешнего давления и затухают в отдалении от него. Поведение слоев совпадает для значений промежуточного слоя, сравнимых с жесткостью верхнего и нижнего слоя (черные линии). При уменьшении параметров промежуточного слоя напряженно-деформированное состояние слоев начинает отличаться: амплитуды перемещений верхнего слоя увеличиваются, нижнего — уменьшаются. Поведение верхнего слоя больше зависит от параметров промежуточного слоя, чем поведение нижнего. Значения относительных деформаций изменяются соответственно изменению амплитуд перемещений. Максимальные амплитуды перемещений наблюдаются в области приложенного давления и уменьшаются в отдалении от него. Для того чтобы поведение слоев было одинаковым, наиболее важным их двух является коэффициент, описывающий упругое взаимодействие в промежуточном слое κ . Уменьшение κ при неизменном большом значении сдвигового параметра σ не сохраняет одинаковое поведение обоих слоев.

На рисунке 3 показаны безразмерные вертикальные перемещения $W_2(x)$ верхнего упругого слоя для разных значений параметра пористости, на рисунке 4 — соответствующие безразмерные относительные деформации в нижнем слое. В линейной теории деформации изменяются линейно по толщине упругого тела и достигают максимумов на его поверхности. Изучаются только положительные деформации, соответствующие удлинениям. Расчеты проводились для безразмерных параметров: $m_1 = m_2 = 0.15$, $\kappa = \sigma = \beta_1 = \beta_2 = 50$, $\gamma = 0.05$. Черной линией показаны результаты для $\delta = 16$, красной — для

$\delta = 3.3$, синей — для $\delta = 0.6$. Перемещения и относительные деформации в нижнем слое увеличиваются с ростом пористости. Для случая $\kappa = \sigma = \beta_1 = \beta_2$ верхний слой ведет себя аналогично нижнему, следовательно, в нем тоже ожидается увеличение перемещений и относительных деформаций при увеличении пористости.

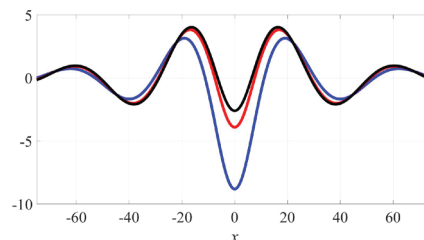


Рис. 1. Безразмерные вертикальные перемещения верхнего упругого слоя

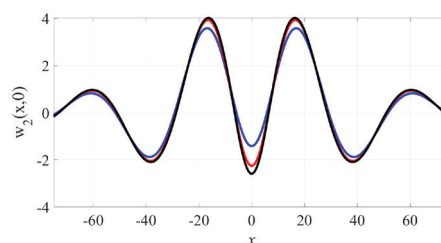


Рис. 2. Безразмерные вертикальные перемещения нижнего пористого слоя

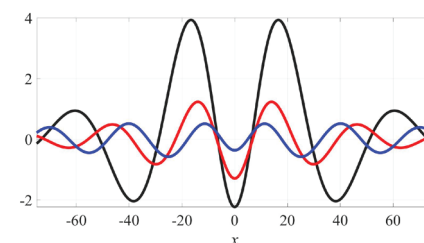


Рис. 3. Безразмерные вертикальные перемещения нижнего пористого слоя для разных значений параметра пористости

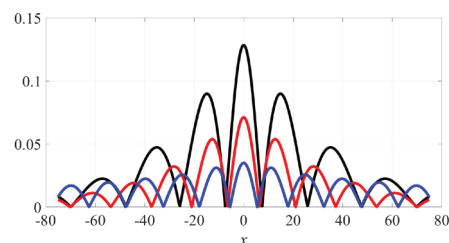


Рис. 4. Безразмерные относительные деформации в нижнем пористом слое для разных значений параметра пористости

Представленные результаты вычислены для одинаковых параметров верхнего и нижнего слоя, однако в большинстве случаев эти параметры будут отличаться. По мере последовательного проникновения жидкости в поры и под ее давлением толщина пористой части двухслойной среды может увеличиваться. Проведены расчеты максимальных деформаций в каждом слое в зависимости от разного соотношения параметров слоев. Значения максимальных деформаций в верхнем слое показаны на рисунке 5. Черной линией показаны результаты для $\kappa = \sigma = 400$, красной — для $\kappa = \sigma = 0.8$, синей — $\kappa = \sigma = 0.4$. По оси абсцисс отложены номера случаев соотношений параметров, см. таблицу. Эти соотношения изменялись за счет изменения толщины слоев. Деформации в верхнем и нижнем слое совпадают для черного случая значений параметров промежуточного слоя. Увеличение толщины нижнего пористого слоя до примерно половины суммарной толщины при постоянной пористости приводит к увеличению деформаций в обоих слоях. Однако дальнейшее увеличение толщины пористого слоя приводит к уменьшению деформаций в пористом слое и к увеличению/уменьшению деформаций в верхнем упругом слое в зависимости от параметров двухслойной среды.

Таблица соотношения упругих параметров верхнего и нижнего слоя, использованных при расчетах относительных деформаций на рисунке 5

	1	2	3	4	5
M_1/M_2	5.7	3.4	2.3	1.6	1.2
β_1/β_2	185	39.3	11.8	4.2	1.6

	6	7	8	9	10
M_1/M_2	0.8	0.6	0.4	0.3	0.17
β_1/β_2	0.6	0.2	0.08	0.02	0.005

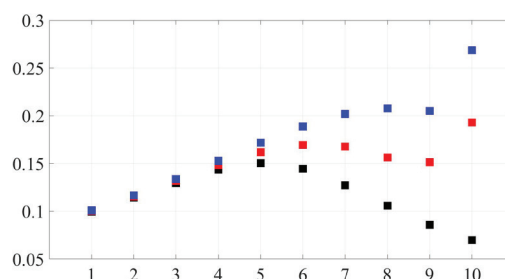


Рис. 5. Безразмерные максимальные деформации в верхнем слое в зависимости от соотношения упругих параметров слоев, см. таблицу

Заключение

Рассмотрена задача о поведении двухслойной частично пористой упругой среды под действием внешнего давления. Полученные результаты показывают, что: 1. Поведение слоев значительно зависит от значений параметров промежуточного слоя, описывающих упругое и сдвиговое взаимодействие между слоями. Уменьшение значений параметров промежуточного слоя приводит к увеличению деформаций в верхнем слое. Определяющим параметром для того, чтобы поведение слоев было одинаковым, является коэффициент, описывающий упругое взаимодействие в промежуточном слое. 2. Увеличение пористости под действием внешнего давления в двухслойной частично пористой среде приводит к увеличению деформаций в обоих слоях и, следовательно, увеличению рисков разрушения. 3. Увеличение толщины нижнего пористого слоя до половины суммарной толщины при постоянной пористости также приводит к увеличению деформаций в обоих слоях. Однако дальнейшее увеличение толщины пористого слоя приводит к уменьшению деформаций в пористом слое и к увеличению/уменьшению деформаций в верхнем упругом слое в зависимости от параметров двухслойной среды.

Библиографический список

1. Токарева М.А., Папин А.А. Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах : Барнаул: Алтайский государственный университет, 2020. 141 с.
2. Fowler A. Mathematical Geoscience. London: Springer, 2011. 883 p.
3. Coussy O. Poromechanics. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons, 2004. 320 p.
4. Tokareva M.A., Papin A.A. On the Existence of Global Solution of the System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Liquid in a Deformable Viscous Porous

Medium // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18. No 2. P. 1397–1422.

5. Timoshenko S.P. Method of Analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail // Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich, Switzerland. 1926. P. 407–418.

6. Duffy D.G. The Response of an Infinite Railroad Track to a Moving, Vibrating Mass // Journal of Applied Mechanics, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers. 1990. Vol. 57. P. 66–73.

7. Mallik A.K., Chandra S., Singh A.B. Steady State Response of an Elastically Supported Infinite Beam to a Moving Load // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 291. No 3–5. P. 1148–1169.

8. Ai Z.Y., Li Z.X., Cheng Y.C. BEM Analysis of Elastic Foundation Beams on Multilayered Isotropic Soils // *Soils Found.* 2014. Vol. 54. No 4. P. 667–674.

9. Ai Z.Y., Cai J.B. Static Interaction Analysis Between a Timoshenko Beam and Layered Soils by Analytical Layer Element/Boundary Element Method Coupling // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. No 21–22. P. 9485–9499.

10. Dutta S.C., Roy R. A Critical Review on Idealization and Modeling for Interaction Among Soil–Foundation–Structure System // *Computers and Structures*. 2002. Vol. 80. No 20–21. P. 1579–1594.

11. Vu H., Ordonez A., Karnopp B. Vibration of a Double-Beam System // *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 229. No 4. P. 807–822.

12. Hussein M.F.M., Hun H.E.M. Modelling of Floating-Slab Tracks with Continuous Slabs Under Oscillating Moving Loads // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 297. No 1–2. P. 37–54.

13. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // *Известия Алтайского государственного университета*. 2015. Т. 85. No 1. С. 126–131.

14. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Oglezneva K. Steady-State Motion of a Load on an Ice Cover with Linearly Variable Thickness in a Channel // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023. Vol. 11. No 5:1045. DOI: 10.3390/jmse11051045

References

1. Tokareva M.A., Papin A.A. *Boundary Value Problems for Filtration in Poroelectric Media*. Barnaul: Altai State University, 2020. 141 p. (In Russ.)

2. Fowler A. *Mathematical Geoscience*. London: Springer, 2011. 883 p.

3. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons, 2004. 320 p.

4. Tokareva M.A., Papin A.A. On the Existence of Global Solution of the System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Liquid in a Deformable Viscous Porous Medium. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. Vol. 18. No 2. P. 1397–1422.

5. Timoshenko S.P. Method of Analysis of Static and Dynamical Stresses in Rail. *Proceedings of the Second International Congress for Applied Mechanics*. Zurich, Switzerland. 1926. P. 407–418.

6. Duffy D.G. The Response of an Infinite Railroad Track to a Moving, Vibrating Mass. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers*. 1990. Vol. 57. P. 66–73.

7. Mallik A.K., Chandra S., Singh A.B. Steady State Response of an Elastically Supported Infinite Beam to a Moving Load. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 291. No 3–5. P. 1148–1169.

8. Ai Z.Y., Li Z.X., Cheng Y.C. BEM Analysis of Elastic Foundation Beams on Multilayered Isotropic Soils. *Soils Found.* 2014. Vol. 54. No 4. P. 667–674.

9. Ai Z.Y., Cai J.B. Static Interaction Analysis Between a Timoshenko Beam and Layered Soils by Analytical Layer Element/Boundary Element Method Coupling. *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. No 21–22. P. 9485–9499.

10. Dutta S.C., Roy R. A Critical Review on Idealization and Modeling for Interaction Among Soil–Foundation–Structure System. *Computers and Structures*. 2002. Vol. 80. No 20–21. P. 1579–1594.

11. Vu H., Ordonez A., Karnopp B. Vibration of a Double-Beam System. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 229. No 4. P. 807–822.

12. Hussein M.F.M., Hunt H.E.M. Modelling of Floating-Slab Tracks with Continuous Slabs Under Oscillating Moving Loads. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 297. No 1–2. P. 37–54.

13. Shishmarev K.A. Mathematical Problems of Ice Sheet and Hydroelastic Waves Interaction Modeling. *Izvestiya of Altai State University*. 2015. Т. 85. No 1. С. 126–131. (In Russ.)

14. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Oglezneva K. Steady-State Motion of a Load on an Ice Cover with Linearly Variable Thickness in a Channel. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023. Vol. 11. No 5:1045. DOI: 10.3390/jmse11051045

Информация об авторах

К.Е. Найденова, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Т.А. Сибирякова, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

К.А. Шишмарев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

K.E. Naydenova, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

T.A. Sibiryakova, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

K.A. Shishmarev, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.