Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 99–104.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 99–104.

Научная статья
УДК 519.677
DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-13

Математическая модель оптимального раскроя профилей пластиковых окон

Вера Владимировна Журавлева[1], *Артем Владимирович Кожевников*[2], *Анастасия Станиславовна Маничева*[3]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, vvzhuravleva@mc.asu.ru
[2]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, innot.not@gmail.com
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, manichevaas@mc.asu.ru

Original article

The Mathematical Model of Optimal Cutting of Plastic Window Profiles

Vera V. Zhuravleva[1], *Artem V. Kozhevnikov*[2], *Anastasia S. Manicheva*[3]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, vvzhuravleva@mc.asu.ru
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, innot.not@gmail.com
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, manichevaas@mc.asu.ru

Аннотация. Разработаны специализированная математическая модель и программа одномерного раскроя, ориентированные на производство оконных стеклопакетов. В основе решения лежит метод ветвей и границ, использующий на каждом шаге матричный симплекс-метод. Улучшение решения достигнуто одновременно за счет модификации целевой функции и упрощения системы ограничений — исключение нецелесообразных вариантов раскроя. При этом существенно снижается размерность задачи и вместе с этим уменьшается время ее решения.

Авторами выполнена автоматизация этапов составления модели (основанной на генерации «матрицы раскроя») и поиска начального опорного плана. Факт существования допустимого базисного решения также приводит к экономии времени.

Практическая значимость результатов заключается в повышении эффективности производственного проектирования. Это приводит к снижению затрат на закупку, обработку, транспортировку, хранение и утилизацию материалов. Разработанные методы и алгоритмы легко адаптируемы и применимы в других производственных процессах, где имеется одномерный раскрой, с дополнительными технологическими ограничениями.

Ключевые слова: задача одномерного раскроя, метод ветвей и границ, оптимизация производства, API сервис

Abstract. The paper presents the development of a specialized mathematical model and a one-dimensional cutting program for production of double-glazed windows. The solution is based on the branch and boundary method, which uses a matrix simplex method at each step. Simultaneous modification of the objective function and simplification of the system of constraints, i.e. elimination of inappropriate cutting options, help improve the developed solution. At the same time, the problem dimension and the time required to solve it reduce significantly.

Authors have automated the stages of model engineering (based on the „cutting matrix“ generation) and searching for an initial reference plan. The existence of a valid basic solution helps save the consumed time.

The practical significance of the obtained results lies in improving the efficiency of production design. This leads to lowering the costs of purchase, processing, transportation, storage, and disposal of materials. The developed methods and algorithms are easily adaptable and applicable to other production processes with one-dimensional cutting when considering additional technological limitations.

Keywords: one-dimensional cutting problem, branch and boundary method, production optimization, API service

Для цитирования: Журавлева В.В., Кожевников А.В., Маничева А.С. Математическая модель оптимального раскроя профилей пластиковых окон // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 99–104. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-13

For citation: Zhuravleva V.V., Kozhevnikov A.V., Manicheva A.S. The Mathematical Model of Optimal Cutting of Plastic Window Profiles. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 99–104. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu (2025)1-13

Введение

Для большого спектра производственных процессов основные этапы связаны с раскроем материалов. Моделирование размещения деталей на «карте раскроя» является важным этапом технологического процесса для экономии ресурсов. Рациональное расположение деталей и последующий раскрой материала позволяют решить проблему экономии ресурсов.

Задача одномерного раскроя в случае одного вида материала изучается уже полвека. Она описывается моделью линейного целочисленного программирования [1]. В стандартной постановке эта задача рассматривалась Л.В. Канторовичем, В.А. Залгаллером [1] и P. Gilmore, R. Gomory [2]. Эффективный алгоритм в случае раскроя материала смешанных длин в серийном производстве предложен Г. Беловым [3]. Однако в отдельных случаях этот алгоритм оказался слишком трудоемким, чтобы быть практически полезным. Параллельно разрабатывались эвристические методы. Наиболее совершенными считаются генетические методы для решения задачи раскроя материала одинаковой длины, но при этом можно получить только приближенные решения, а для достижения приемлемого уровня точности время работы сопоставимо с временем работы точных методов [4].

Далее рассматривается производственная ситуация, возникающая в условиях крупносерийного производства — раскрой профилей пластиковых окон. Материал для раскроя на детали заданных размеров поступает в виде хлыстов различных типоразмеров в заданном количестве. Множество типоразмеров составляют отрезы от стандартных материалов большого размера, а также сами стандартные материалы.

Разработка специализированной математической модели и программного обеспечения (API сервиса) для решения данной задачи позволит получить реальный экономический эффект в форме снижения отходов, повысить оперативность и качество планирования и управления производственными процессами, сократить расход сырья, снизить себестоимость продукции.

Для достижения указанной цели решались следующие задачи:

1) разработка математической модели задачи оптимального одномерного раскроя профилей;

2) автоматизация генерации матрицы раскроя и составления опорного решения;

3) реализация алгоритма решения задачи о раскрое;

4) разработка API сервиса и тестирование его на реальных данных.

Итак, рассматривается задача одномерного раскроя на производстве (классификация 1VDM по H. Dykhoff [5]), которая имеет следующие особенности:

— полосы раскраиваются не полностью; в результате получаются остатки раскроя (хлысты), сумму которых необходимо минимизировать;

— остатки материалов используются в следующих циклах раскроя;

— остатки можно ограничивать при генерации введением «плохих интервалов», в которых деталей при следующих раскроях заведомо не будет;

— самых больших стандартных материалов бесконечное количество (т.е. ограничения на их количество не учитываются).

Эти особенности требуют разработки специализированных алгоритмов раскроя, существенно отличающихся от известных стандартных алгоритмов решения задачи 1VDM.

Задачу формирования раскроя с учетом специфики производства можно сформулировать следующим образом. Требуется определить оптимальный план раскроя профилей, при котором: минимизируется расход стандартных материалов и будут минимальными остатки от разрезов материалов, а также минимизируется количество неиспользуемых хлыстов (остатков при раскрое материала).

В похожей постановке задача одномерного раскроя материалов различных длин рассматривалась в работах [6, 7], где находится приемлемое приближенное решение на основе гибридного алгоритма.

Для описания модели примем обозначения:

x_{ij} — количество единиц материала j, раскраиваемых по способу i;

b_i — число изделий i-го типа, необходимое по заданию;

l_j — длина изделия i-го типа;

d_j — количество материала вида j;

e_j — длина материала j-го типа;

τ_j — число исходных вариантов раскроя j-го материала;

y_j — количество неиспользованных хлыстов j-го материала;

s — количество видов материалов;

n_j — число способов раскроя j-го материала;

c_{ij} — величина остатка материала j при разрезании способом i;

a_{jk}^{i} — число заготовок i-го типа в k-ом варианте раскроя j-го материала.

Разработка математической модели оптимального одномерного раскроя профилей пластиковых окон

Рассмотрим ограничения в задаче раскроя профилей пластиковых окон.

1. Ограничения на неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

2. Ограничения на количество используемого материала:

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} \leq d_j, j = 1, 2. \dots, s \tag{2}$$

Перейдем от неравенств к равенствам, добавив слева количество неиспользованных в будущем оптимальном плане материалов y_j:

$$x_{1j} + \dots + x_{nj} + y_j = d_j, j = 1, 2. \dots, s. \tag{3}$$

3. Ограничения на комплектность:

$$\sum_{j=1}^{s}(a_{1k}^{j}x_{1j} + \dots + a_{nk}^{j}x_{nj}) = b_k, \mathrm{k} = 1, 2, \dots, m. \tag{4}$$

В описанной постановке нужно минимизировать остатки всех материалов. Таким образом, целевая функция имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{n_s}\sum_{j=1}^{s}(c_{ij}x_{ij}) + \sum_{j=2}^{s}e_j y_j \to min,$$

где первая компонента — суммарные остатки материалов, а вторая — сумма длин неиспользованных хлыстов. Величина y_1 исключена из целевой функции.

Также есть смысл игнорировать ограничение (3) для стандартных материалов, полагая их число большим (y_1 можно вычислить по оптимальному плану).

Заметим, что из (3) можно выразить переменные y_j и получить следующее:

$$f = \sum_{i=1}^{n_s}\sum_{j=1}^{s}(c_{ij}x_{ij}) + \sum_{j=2}^{s}e_j(d_j - \sum_{i=1}^{n_s}x_{ij}).$$

Итоговый вид целевой функции для математической модели оптимального одномерного раскроя профилей может быть записан в виде:

$$f(x_{ij}, y_j) = \sum_{i=1}^{n_s}\sum_{j=1}^{s}p_{ij}x_{ij} + f_0 \to min,$$

где коэффициенты функции $f_0 = \sum_{j=2}^{s}e_j d_j$, $p_{ij} = \{c_{ij}$, при $j = 1$; $c_{ij} - e_j$, при $j \neq 1\}$, и задача дополняется ограничениями (1), (3), (4).

Анализ и выбор методов решения задачи

Вычислительные мощности портативных устройств на данный момент времени находятся на достойном уровне, тем не менее ряд методов попросту не подойдет для реализации алгоритма построения плана линейного раскроя. Отметим, что размер реальной задачи достаточно большой, но, однако, позволяет использовать затратные по памяти и времени выполнения алгоритмы, дающие точное решение.

Очевидно, что описанная выше задача не позволяет использовать метод полного перебора вариантов раскроя, который даже на относительно небольших входных данных требует неприемлемого времени, а динамическое программирование требует сильно больших затрат ресурсов оперативной памяти [8]. Эвристические методы не дают оптимального решения. В условиях реального производства было отмечено, что при их использовании со временем идет накопление «неиспользованных остатков».

Метод ветвей и границ (МВГ), реализованный с использованием симплекс-метода, для получения плана линейного раскроя в рассматриваемом случае является наиболее подходящим. Поскольку его результат является оптимальным, сам вычислительный процесс не особо сложный, и при правильной реализации можно сохранить достаточно большой объем оперативной памяти. Для решения задачи был использован матричный вариант симплекс-метода, описанный в работе [9, с. 25–29]. Такой вариант удобен, поскольку на определенной итерации необходимо знание лишь базисных столбцов матрицы ограничений (на каждой итерации данные берутся из исходной задачи), что существенно экономит память при реализации.

Общее решение модели, включая этапы, описанные ниже, реализовано на языке программирования C++. Для реализации МВГ использована библиотека BNB-Solver, которая позволяет распараллелить процесс, тем самым дополнительно ускоряя решение [10].

Этапы подготовки матрицы и выбора опорного решения

I ЭТАП. Чтобы перейти к решению методом ветвей и границ, требуется множество «карт раскроя», которое можно перебирать. Каждая единица материала j может быть раскроена n способами, причем использование способа k дает a_{ik}^{j} единиц i-х изделий. Итак, ограничение (4) можно составить, используя матрицу «карт раскроя», которая генерируется следующим алгоритмом:

Отсортировать все изделия по убыванию длины.

Для каждого материала:

пока не получен нулевой вектор:

пока хватает длины материала, для каждого изделия, где не был достигнут максимум длины отрезанных деталей:

увеличивать количество текущего изделия в раскрое.

Уменьшить количество самых длинных материалов на 1.

Для того чтобы снизить размер задачи, нужно исключить из множества «карт раскроя» те способы, при которых остаток материала попадает в интервалы, которые заведомо не встретятся в следующих заказах в качестве изделия.

II ЭТАП. Матрица $A_{sm} = (a_{ik}^{j})$, если ее разложить по способам разреза, примет вид нижнего-левого блока матрицы $\hat{A}$ симплекс-таблицы для описанной модели. Эту матрицу с количеством столбцов $(n_s * s)$ можно дополнить единичной матрицей E_{s-1}, соответствующей переменным y_j. Таким образом, верхний прямоугольник матрицы $\hat{A}$ в описанной математической модели оптимального одномерного раскроя выражает ограничения на материалы, а нижний — на изделия. Пример матрицы представлен на рисунке. Здесь столбцы характеризуют количество деталей, последний столбец — остатки, а строка — «карту раскроя» для одного из материалов. Так как ограничения на количество самых больших стандартных материалов не налагались, то первое ограничение, соответствующее первой строке таблицы, из модели удалено.

Описанный выше процесс составления матрицы для математической модели одномерного раскроя профилей пластиковых окон автоматизирован в разработанном авторами API сервисе.

x_{11}	...	$x_{n_1 1}$	x_{12}	...	$x_{n_2 2}$		...		x_{1s}	...	$x_{n_s s}$	y_2	...	y_s	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	d_1
			1	1	1							1			d_2
						...	...	...					...		...
									1	1	1			1	d_s
															b_1
					A_{sm}								0		...
															b_m
p_{11}	...	$p_{n_1 1}$	p_{12}	...	$p_{n_2 2}$		...		p_{1s}	...	$p_{n_s s}$	e_2	...	e_s	f_0

Общий вид матрицы для модели и схема выбора базисных столбцов:
желтые блоки в точности содержат единицы,
зеленые и голубые блоки — нули,
персиковый блок содержит единичные столбики

III ЭТАП. Следующий момент касается выбора начального опорного плана. Заметим, что столбцы $y_2 - y_s$ однозначно составляют часть базисных столбцов. Далее заметим, что среди способов разреза первого самого большого материала существует m способов, с помощью которых получается только один вид изделия. Им соответствуют еще m базисных столбцов. Очевидно, что из указанных столбцов можно составить начальный опорный план для решения симплекс-методом (на рисунке базисные столбцы выделены красной рамкой). Кроме того, по смыслу задачи очевидно, что этот план не является оптимальным.

После выполнения указанных трех этапов запускается метод ветвей и границ.

Тестирование сервиса

Работоспособность сервиса была протестирована на реальных данных компании «ОКСОФТ» (на двух десятках примеров). Входные данные и характеристики результатов тестирования для двух наиболее типичных тестов представлены в таблице. Результаты проведенных тестов показали, что сервис работает адекватно и вычисления по алгоритму дают точное решение.

Примеры входных данных и характеристики результатов тестирования

Данные				Результаты тестирования
материалы		требуемые детали		
длина	количество	длина	количество	
6000 4000 2000 1500	999 7 4 10	1700 1500 1400 1000 700	4 5 5 5 6	Время работы: 2,5 сек. Сумма длин материалов: 51000 Сумма длин деталей: 30500 Затраты: 20500 мм Количество колонок «матрицы раскроя»: 248 Стандартные материалы (6000) не были использованы!!
6000 4000 4003 2000 2002 1500 1400	999 7 4 10 2 3 2	1700 1500 1400 1000 1200 700	4 5 5 5 6 6	Время работы: 3,1 сек. Сумма длин материалов: 75316 Сумма длин деталей: 34000 Затраты: 24400 мм Количество колонок «матрицы раскроя»: 322 Стандартные материалы (6000) не были использованы!!

Заключение

Таким образом, для типичных случаев сервис выполняет расчет за приемлемое время, в среднем около 3 секунд. Предельный размер задачи ограничивается емкостью оперативной памяти и требуемым оператором временем вычисления. В случае превышения максимально допустимого времени расчета задача может быть разбита на две подзадачи и более.

Разработанный сервис используется при оптимизации производства в компании «ОКСОФТ».

Библиографический список

1. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Новосибирск: Наука, 1971. 301 с.

2. Gilmore P.C., Gomory R.E. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem // Operations Research. 1961. No 9. P. 849–859.

3. Belov G.N. A Cutting Plane Algorithm for the One-dimensional Cutting Stock Problem with Multiple Stock Lengths // European Journal of Operational Research. 2002. No 141. P. 274–294.

4. Folkenauer E.A. A Hybrid Grouping Genetic Algorithm for Bin Packing // Journal of Heuristics. 1998. No 2. P. 5–30.

5. Dykhoff H. A Typology of Cutting and Packing Problems // European Journal of Operational Research. 1990. No 44. P. 145–149.

6. Тарасов А.Е. Решение задачи одномерного раскроя материала различных длин на базе гибридизации эволюционных алгоритмов // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9. № 4 (22). С. 111–115.

7. Нгуен М.Х. Применение генетического алгоритма для решения задачи планирования производства // Динамика неоднородных систем. 2007. Т. 29. Вып. 11. С. 160–167.

8. Мухачева Э.А. Методы локального поиска оптимума в задачах ортогонального раскроя и упаковки: аналитический обзор и перспективы развития // Информационные технологии. 2004. № 5. С. 2–17.

9. Журавлева В.В., Оскорбин Н.М., Алгазин Г.И., Маничева А.С. Математические модели и методы исследования систем управления : учебное пособие в 2 ч. Ч. 2. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2023. 80 с.

10. Посыпкин М.А. Архитектура и программная организация библиотеки для решения задач оптимизации методом ветвей и границ на многопроцессорных вычислительных комплексах // Труды ИСА РАН. 2006. Т. 25. С. 18–25.

References

1. Kantorovich L.V., Zalgaller V.A. A *Rational Cutting of Industrial Materials.* Novosibirsk: Nauka, 1971. 301 p. (In Russ.)

2. Gilmore P.C., Gomory R.E. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem. *Operations Research.* 1961. No 9. P. 849–859.

3. Belov G.N. A Cutting Plane Algorithm for the One-dimensional Cutting Stock Problem with Multiple Stock Lengths. *European Journal of Operational Research.* 2002. No 141. P. 274–294.

4. Folkenauer E.A. A Hybrid Grouping Genetic Algorithm for Bin Packing. *Journal of Heuristics.* 1998. No 2. P. 5–30.

5. Dykhoff H. A Typology of Cutting and Packing Problems. *European Journal of Operational Research.* 1990. No 44. P. 145–149.

6. Tarasov A.E. A Solving the Problem of One-dimensional Cutting of Material of Various Lengths Based on Hybridization of Evolutionary Algorithms. *Bulletin of UGATU.* 2007. Vol. 9. No 4(22). P. 111–115. (In Russ.)

7. Nguyen M.H. Application of a Genetic Algorithm to Solve the Problem of Production Planning. *Dynamics of Heterogeneous Systems.* 2007. Vol. 29. No 11. P. 160–167. (In Russ.).

8. Mukhacheva E.A. Methods of Local Optimum Search in Problems of Orthogonal Cutting and Packaging: Analytical Review and Prospects of Development. *Information Technologies.* 2004. No 5. P. 2–17. (In Russ.)

9. Zhuravleva V.V., Oskorbin N.M., Algazin G.I., Manicheva A.S. *The Mathematical Models and Methods of Research of Management Systems.* Texbook in 2 parts: Part 2. Barnaul: Publishing House of the Alt. University, 2023. 80 p. (In Russ.)

10. Posypkin M.A. Architecture and Software Organization of the Library for Solving Optimization Problems by the Method of Branches and Boundaries on Multiprocessor Computing Complexes. *Proceedings of the ISA RAS.* 2006. Vol. 25. P. 18-25. (In Russ.)

Информация об авторах

В.В. Журавлева, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

А.В. Кожевников, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

А.С. Маничева, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

V.V. Zhuravleva, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical Cybernetics and Applied Mathematics, Altai State University, Barnaul, Russia;

A.V. Kozhevnikov, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

A.S. Manicheva, Candidate of Sciences in Technology, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.