

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 95–98.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 95–98.

Научная статья

УДК 514.765

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-12

О симметричном потоке Риччи на группе Гейзенберга

Данила Сергеевич Григорьев¹, Дмитрий Николаевич Оскорбин²,
Евгений Дмитриевич Родионов³, Олеся Павловна Хромова⁴

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
danila.grigoryev.2019@mail.ru

²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия,
oskorbin@yandex.ru

³Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru

⁴Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
khromova.olesya@gmail.com

Original article

About Symmetric Ricci Flow On the Three-Dimensional Heisenberg Group

Danila S. Grigoryev¹, Dmitry N. Oskorbin², Evgeny D. Rodionov³,
Olesya P. Khromova⁴

¹Altai State University, Barnaul, Russia, danila.grigoryev.2019@mail.ru

²Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia,
oskorbin@yandex.ru

³Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru

⁴Altai State University, Barnaul, Russia, khromova.olesya@gmail.com

Аннотация. Уравнение потока Риччи впервые исследовалось Р. Гамильтоном для связности Леви-Чивиты и играет важную роль в римановой геометрии. Класс полусимметрических связностей описан Э. Картаном и содержит связность Леви-Чивиты. Поэтому естественным является рассмотрение потока Риччи на римановых многообразиях с полусимметрической связностью.

Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим, поэтому необходимо рассматривать симметрическую часть тензора Риччи и симметрический поток Риччи относительно этого тензора.

В данной работе изучается симметрический поток Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической связностью. Уравнение потока в системе координат Дж. Милнора приводится к системе алгебраических и дифференциальных уравнений. Решая последовательно сначала подсистему из алгебраических уравнений и после подставляя полученное решение в систему дифференциальных уравнений, мы находим симметрический поток Риччи на трехмерной унимодулярной группе с метрикой

Abstract. The Ricci flow equation was first studied by R. Hamilton for the Levi-Civita connection. It plays an important role in Riemannian geometry. The class of semi-symmetric connections, described first by E. Cartan, contains the Levi-Civita connection. Thus, it is natural to consider the Ricci flow on Riemannian manifolds with a semi-symmetric connection.

It is known that the Ricci tensor of a semi-symmetric connection is, generally speaking, not symmetric. Therefore, it is necessary to consider the symmetric part of the Ricci tensor and the symmetric Ricci flow with respect to this tensor.

This paper studies the symmetric Ricci flow on three-dimensional unimodular Lie groups with a semi-symmetric connection. The flow equation in the J. Milnor coordinate system is reduced to a system of algebraic and differential equations. The symmetric Ricci flow on a three-dimensional unimodular group with the J. Milnor metric with respect to a semi-symmetric connection is found by sequentially solving the subsystem of algebraic equations and then substituting the obtained solution into the system of differential equations.

Дж. Милнора относительно полусимметрической связности. В качестве тестового примера рассматривается трехмерная группа Гейзенберга.

Ключевые слова: симметрический поток Риччи, трехмерные унимодулярные группы Ли, группа Гейзенберга

Для цитирования: Григорьев Д.С., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. О симметрическом потоке Риччи на группе Гейзенберга // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 95–98. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-12

Введение

В данной работе симметрические потоки Риччи определяются на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой с полусимметрической связностью.

Пусть M — риманово многообразие размерности n . Определим на M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты, $g(X, Y)$ — метрический тензор. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1].

Определим на M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Ric(g(t)). \quad (1)$$

Уравнение (1) впервые исследовалось Р. Гамильтоном для связности Леви-Чивиты в [2]. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -Sym(Ric(g(t))). \quad (2)$$

Рассмотрен случай, когда G — трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Дж. Милнора [3].

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных римановых метрик Дж. Милнора, которые ранее изучались К. Онда и Д. Кнопфом — К. Мак'Леодом, при изучении потоков Риччи в случае связности Леви-Чивиты [4, 5].

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

The three-dimensional Heisenberg group is considered as a test example.

Keywords: symmetric Ricci flow, three-dimensional unimodular Lie groups, Heisenberg group

For citation: Grigoryev D.S., Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. About Symmetric Ricci Flow On the Three-Dimensional Heisenberg Group. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 95–98. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-12

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$ и $A, B, C > 0$.

Определим компоненты тензора Риччи в базисе Дж. Милнора метрики $g(t)$ в случае полусимметрической связности. Тогда система уравнений симметрического потока Риччи преобразуется в систему, содержащую три алгебраических и три дифференциальных уравнения (более подробно см.: [6, 7]). В качестве тестового примера рассмотрим группу Гейзенберга H_3 . Случаи других унимодулярных групп Ли рассматриваются аналогично.

Случай H_3

С учетом формул для компонент тензора Риччи система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{aligned} 2Bv_2Av_1 &= 0, \\ C(v_2 + 2v_1Av_3) &= 0, \\ C(-v_1 + 2Bv_2v_3) &= 0, \\ \frac{C + 2Av_3^2BC + 2B^2v_2^2A}{C + 2Av_3^2BC + 2A^2v_1^2B} &= \frac{2dA}{2dB} \frac{dt}{dt}, \\ \frac{C(-C + 2B^2v_2^2A + 2A^2v_1^2B)}{AB} &= \frac{2dC}{dt}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что подсистема алгебраических уравнений данной системы имеет решение только при векторном поле $V = (0, 0, v_3)$. При этом уравнение симметрического потока Риччи примет вид

$$\begin{aligned} \frac{C + 2Av_3^2BC}{C + 2Av_3^2BC} &= \frac{2dA}{2dB} \frac{dt}{dt}, \\ \frac{C^2}{AB} &= -\frac{2dC}{dt}. \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{\sqrt{2v_3^2 + \frac{1}{AB}}} \right) = 0.$$

Введем обозначения:

$$\frac{A}{B} = \varphi_0 = \frac{A_0}{B_0},$$

$$\frac{C}{\sqrt{2v_3^2 + \frac{1}{AB}}} = \psi_0 = \frac{C_0}{\sqrt{2v_3^2 + \frac{1}{A_0B_0}}}$$

Рассмотрим производную вида:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{AB} \right) = -\frac{\psi_0}{AB} \left(2v_3^2 + \frac{1}{AB} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Введем замену $z^2 = 2v_3^2 + \frac{1}{AB}$ и, разделяя переменные, получим решение дифференциального уравнения:

$$t = -\frac{1}{\psi v_3^2 \sqrt{2v_3^2}} \left(\sqrt{\frac{2v_3^2 AB}{1 + 2v_3^2 AB}} + \ln \left(\sqrt{1 + 2v_3^2 AB} + \sqrt{2v_3^2 AB} \right) \right) + \lambda_0,$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1}{\psi v_3^2 \sqrt{2v_3^2}} \left(\sqrt{\frac{2v_3^2 A_0 B_0}{1 + 2v_3^2 A_0 B_0}} + \ln \left(\sqrt{1 + 2v_3^2 A_0 B_0} + \sqrt{2v_3^2 A_0 B_0} \right) \right).$$

Введя замену $x = 2v_3^2 AB$, исследуем функцию:

$$t(x) = -\frac{1}{\psi v_3^2 \sqrt{2v_3^2}} \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \ln \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \right) \right) + \lambda_0.$$

Производные первого и второго порядка имеют вид:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{2v_3^2 \sqrt{2v_3^2}} \times \frac{x+2}{(1+x)\sqrt{x(1+x)}},$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -\frac{1}{2v_3^2 \sqrt{2v_3^2}} \times \frac{2x^2 + 7x + 2}{2x(1+x)^2 \sqrt{x(1+x)}}.$$

Таким образом, $\forall x > 0 : \frac{\partial t}{\partial x} < 0, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} > 0$. Следовательно, функция $t(x)$ монотонно убывает и является строго выпуклой вниз. Вертикальных асимптот нет. Найдём наклонные асимптоты вида $t = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t(x)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{t(x)}{x} - kx \right) = +\infty.$$

Наклонных асимптот нет. Следовательно, $t \in [0; T)$, где $T = \lambda_0$. Получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{t \rightarrow T} B(t) = 0,$$

но

$$\lim_{t \rightarrow T} C(t) = \lim_{t \rightarrow T} \left(\psi_0 \sqrt{2v_3^2 + \frac{1}{AB}} \right) = +\infty.$$

Заключение

В работе исследован симметрический поток Риччи на трехмерной группе Гейзенберга с метрикой Дж. Милнора относительно полусимметрической связности. В результате в неявном виде получено решение системы дифференциальных уравнений, определяющей решение данного потока. Анализ данного решения показывает, что поток Риччи упирается в сингулярность, а именно: одна из компонент метрического тензора имеет особенности. Полученные на группе Гейзенберга результаты обобщают известные результаты К. Онда и Д. Кнопфа — К. Мак'Леода.

Данная тематика исследовалась в работах [8–10].

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les Variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée (Deuxième Partie) // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1925. Vol. 42. P. 17–88.
2. Hamilton R.S. Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature // Journal of Differential Geometry. 1982. Vol. 17. No 2. P. 255–306.
3. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
4. Onda K. Ricci Flow on 3-Dimensional Lie Groups and 4-Dimensional Ricci-Flat Manifolds // arXiv:0906.1035. 2010. P. 1–25.
5. Knopf D., McLeod K. Quasi-Convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow // Communications in Analysis and Geometry. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.
6. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Einstein's Equation on Three-Dimensional Metric Lie Groups with Vector Torsion // Journal of Mathematical Sciences: Springer Publishing House. November 2023. Vol. 276. No 6. P. 733–745.

7. Павлова А.А., Хромова О.П. О симметрических потоках Риччи полусимметричных связок числа в трехмерных метрических группах Ли // Материалы международных конференций «Лобачевские чтения». Казань: Изд-во КФУ, 2022 С. 96–97.

8. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметричной связностью // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематическое обзоры. М.: ВИНТИ РАН, 2023. С. 19–29. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20. № 1. С. 48–61. DOI: 10.33048/semi.2023.20.005

10. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметричной метрической связностью // Известия вузов. Математика. 2022. № 5. С. 80–85. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85

References

1. Cartan E. On the Varieties with Affine Connection and the Theory of Generalized Relativity (Second Part). *Scientific Annals of the Ecole Normale Supérieure*. 1925. Vol. 42. P. 17–88. (In French).

2. Hamilton R.S. Three-manifolds with Positive Ricci Curvature. *Journal of Differential Geometry*. 1982. Vol. 17. No 2. P. 255–306.

3. Milnor J. Curvature of Left Invariant Metric On Lie Groups. *Advances in Mathematics*. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

4. Onda K. Ricci Flow On 3-Dimensional Lie Groups And 4-Dimensional Ricci-flat Manifolds. Arxiv:0906.1035. 2010. P. 1–25.

5. Knopf D., McLeod K. Quasi-convergence of Model Geometries Under the Ricci Flow. *Communications in Analysis and Geometry*. 2001. Vol. 9. No 4. P. 879–919.

6. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Einstein's Equation On Three-Dimensional Metric Lie Groups with Vector Torsion. *Journal of Mathematical Sciences: Springer Publishing House*. 2023. Vol. 276. No 6. P. 733–745.

7. Pavlova A.A., Khromova O.P. On Symmetric Ricci Flows of Semisymmetric Connections On Three-Dimensional Met-

ric Lie Groups. *Proceedings of the International Conference «Lobachevsky Readings»*. Kazan: KFU Publishing House. 2022. Vol. 62. P. 96–97. (In Russ.).

8. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons On Metric Lie Groups with Semisymmetric Connection. Results of Science And Technology. *Modern Mathematics And it's Applications*. Thematic Reviews, M.: VINITI RAS, 2023, P. 19-29. (In Russ.). DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

9. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons On Three-Dimensional Non-Unimodular Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric And Semi-Symmetric Connection. *Siberian Electronic Mathematical News*. 2023. Vol. 20. No 1. P. 48–61. (In Russ.). DOI: 10.33048/semi.2023.20.005

10. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Three-Dimensional Non-Unimodular Lie Groups with Riemannian Metric of Invariant Ricci Soliton And Semi-Symmetric Metric Connection. *News of Universities. Mathematics*. 2022. No 5. P. 80–85. (In Russ.). DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85

Информация об авторах

Д.С. Григорьев, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.Н. Оскорбин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия;

Е.Д. Родионов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

О.П. Хромова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

D.S. Grigoriev, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.N. Oskorbin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;

E.D. Rodionov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

O.P. Khromova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.