

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 88–94
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 88–94.

Научная статья

УДК 517.95

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-11

Пример точного решения задачи о фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде

Павел Вячеславович Гилев¹, Александр Алексеевич Папин²

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, pavel.gilev.2000@mail.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, papin@math.asu.ru

Original article

An Example of Exact Solution to the Problem of Two Immiscible Liquids Filtration in a Poroelastic Medium

Pavel V. Gilev¹, Aleksandr A. Papin²

¹Altai State University, Barnaul, Russia, pavel.gilev.2000@mail.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, papin@math.asu.ru

Аннотация. В работе строятся примеры точных решений для модели двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Такие модели используются при моделировании геофизики (газо- и нефтедобыча), снежно-ледовых покровов, движения магмы в земной коре.

Примеры точных решений важны при исследовании систем дифференциальных уравнений: такие решения проще исследовать на физичность. Также они полезны при разработке и проверке алгоритмов для численного исследования. На данный момент для рассматриваемой модели существует не так много примеров точных решений. Связано это с новизной и трудностью системы дифференциальных уравнений, лежащих в ее основе.

Первым примером является стационарное решение. Оно обеспечивается отсутствием действия сил тяжести, капиллярного скачка и движения на границе. Динамика среды, соответствующая данному решению, физична: в указанных условиях основные характеристики среды не изменяются со временем. Вторым пример — точное классическое автомодельное решение. Оно обладает свойством конечной скорости распространения возмущений, что также демонстрирует его физичность.

Ключевые слова: закон Дарси, пороупругость, фильтрация, пористость, стационарное решение

Abstract. The paper presents the examples of exact solutions for two-phase filtration model of immiscible incompressible liquids in a poroelastic medium. Such model is used to simulate the geophysics of snow and ice covers and the magma movement in the earth's core (for gas and oil production cases).

Examples of exact solutions are important when studying systems of differential equations because it is much easier to study their physical aspects. They are also useful for developing and testing the numerical algorithms. At the moment, there are quite few examples of exact solutions for the considered model. This is due to the novelty and complexity of the underlying system of differential equations.

The first example is a stationary solution that is supported by excluding the effects of gravity, capillary jump, and movement at the boundaries. The corresponding environment dynamics of the solution is physical, which means no change of the main environment properties over time. The second example is the exact classic self-similar solution with a property of a finite speed phenomenon propagation associated with its physical aspect.

Keywords: Darcy's law, poroelasticity, filtration, porosity, stationary solution

Для цитирования: Гилев П.В., Папин А.А. Пример точного решения задачи о фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 88–94. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-11

Финансирование: работа Гилева Павла Вячеславовича поддержана в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2024-0003). Работа Папина Александра Алексеевича выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>

1. Постановка задачи

Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде описывается следующей квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\frac{\partial(s_i \phi \rho_i^0)}{\partial t} + \operatorname{div}(s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) = 0, \quad (1)$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\vec{u}_3 \rho_3^0) = 0, \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (4)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_3) = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} + \operatorname{div} \left(\frac{\eta}{2} (1-\phi) \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) = \rho_{tot} \vec{g}. \quad (6)$$

Здесь $\rho_i^0, \vec{u}_i, s_i$ и p_i — соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i -ой фазы ($i = 1$ — смачивающая фаза, $i = 2$ — несмачивающая фаза, $s_1 + s_2 = 1$, $i = 3$ — твердый деформируемый скелет), ϕ — пористость (доля объема среды, приходящейся на пустоты), $p_e \equiv p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1-\phi)p_3$ — общее давление, $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$ — давление жидкой фазы, $\rho_{tot} \equiv \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0) + (1-\phi)\rho_3^0$ — общая плотность; $\eta(\phi), \xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и объемной сжимаемости среды, $\vec{g}$ — плотность массовых сил; кроме того, $K_0(\phi)$ — тензор проницаемости, μ_i — динамическая вязкость i -ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ — относительная фазовая проницаемость, $p_c(s_1)$ — капиллярное давление есть заданные функции (модельные зависимости: $p_c = \bar{p}_c(1-s_1)/s_1$, $\xi(\phi) = \eta/\phi^b$, $\beta_t(\phi) =$

For citation: Gilev P.V., Papin A.A. An Example of Exact Solution to the Problem of Two Immiscible Liquids Filtration in a Poroeastic Medium. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 88–94. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-11

Funding: the study of P.V. Gilev was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project: “Modern models of hydrodynamics for problems of environmental management, industrial systems and polar mechanics”, project No: FZMW-2024-0003). The study of A.A. Papin was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045/>

$\phi^m \beta_\phi$, $k_{0i} = \bar{k}_{0i} s_i^{n_i}$, $K_0(\phi) = \phi^3 \bar{K}/(1-\phi)^2$, где $\bar{p}_c, m, b, \beta_\phi, \bar{k}_{0i}, \bar{K}, n_i$ — положительные параметры [2], [3]).

Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$ и t , $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ — оператор градиента, t — время. Истинные плотности принимаются постоянными, неизвестными функциями являются 14 скалярных величин: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, p_1, p_2, p_3, s_1, \phi$. Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: три уравнения неразрывности (1), (3), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (4), реологическое соотношение типа Максвелла (5) и три уравнения баланса сил системы в целом (6).

На сегодняшний день существует не так много работ, посвященных обоснованию моделей двухфазной фильтрации в деформируемых пороупругих средах. В работах [4], [5] рассматриваются задачи двухфазной фильтрации в деформируемой среде с известной пористостью. В работах [6], [7] рассматриваются модельные задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Численное исследование проводилось в [8] – [11].

В данной работе рассматривается движение, происходящее в трехфазной среде в области $\Omega_T = \Omega \times (0; T)$, где Ω — связное, ограниченное подмножество R^N с достаточно гладкой односвязной границей Γ_T при отсутствии действия сил тяжести и движения на границе. Система (1) – (6) дополняется следующими гипотезами:

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_T} = 0, \quad \vec{u}_i \Big|_{\Gamma_T} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\vec{g} = 0, \quad p_1 = p_2, \quad \beta_t(\phi) = 0, \quad \eta = 0. \quad (7)$$

С учетом сделанных предположений исходная система (1)–(6) переписывается следующим образом

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_i s_i \phi) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i} \nabla p_i, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_3(1-\phi)) = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_3) = -a_1(\phi)p_e, \quad (11)$$

$$\nabla p_{tot} = 0. \quad (12)$$

Складывая уравнения (8) и (10), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, \quad \vec{v}|_{\Gamma_T} = 0, \\ \vec{v} &= s_1 \phi \vec{u}_1 + s_1 \phi \vec{u}_2 s_1 + (1-\phi) \vec{u}_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений (9) и (13) следует [3]

$$\vec{v} - \vec{u}_3 = -K_0(\phi) k(s_1) \nabla p_1, \quad (14)$$

$$k(s_1) = \frac{k_{01}(s_1)}{\mu_1} + \frac{k_{02}(1-s_1)}{\mu_2}.$$

Из того, что $p_f = p_1 s_1 + p_2 s_2 = p_1 = p_2$, и уравнения (12) следует, что

$$\nabla p_e = -\nabla p_1. \quad (15)$$

С учетом всех сделанных замечаний и введенных обозначений система (8)–(12) сводится к следующей системе четырех уравнений:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{div}(K(\phi) k(s_1) \nabla p_e) = a_1(\phi) p_e, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1 \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(s_1 \phi \vec{v}) + \\ + \operatorname{div}(K_0(\phi)(-k(s_1)s_1\phi + k_{01}(s_1))\nabla p_e) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\vec{v}) - \\ - \operatorname{div}((1-\phi)(K_0(\phi)k(s_1)\nabla p_e) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

для которой верны следующие краевые

$$\frac{\partial p_e}{\partial n} = 0, \quad \vec{v} = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \Gamma_T \quad (20)$$

и начальные условия

$$s_1 = s_1^0(\vec{x}), \quad \phi = \phi^0(\vec{x}). \quad (21)$$

Введем пространства Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, где k натуральное число, а $\alpha \in (0, 1]$ с нормой

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha, \Omega} = |f|_{0, \Omega} + H_{x,y,z}^\alpha(f),$$

$$|f|_{0, \Omega} = \max_{(x,y,z) \in \bar{\Omega}} |f(x, y, z)|,$$

$$\begin{aligned} H_{x,y,z}^\alpha(f) = \\ = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} \frac{|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)|}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{-\frac{\alpha}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} &\equiv |f|_{k+\alpha, \Omega} = \\ &= \sum_{i=0}^k \left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}} \right\|_{0, \Omega} + \\ &+ \sum_{i_1+i_2+i_3=k} H_{x,y,z}^\alpha \left(\frac{\partial^i f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}} \right), \end{aligned}$$

здесь i_1 , i_2 и i_3 – неотрицательные целые числа. А также $C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)$, где k, m натуральные и $(\alpha, \beta) \in (0, 1]$, с нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)} &\equiv |f|_{k+\alpha, m+\beta, \Omega_T} = \\ &= \sum_{i=0}^k \left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}} \right\|_{0, \Omega} + \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \right\|_{0, \Omega} + \\ &+ \sum_{i_1+i_2+i_3=k} H_{x,y,z}^\alpha \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}} \right) + \\ &+ \sum_{i_1+i_2+i_3=k} H_t^\beta \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}} \right) + \\ &+ H_{x,y,z}^\alpha \left(\frac{\partial^m f}{\partial t^m} \right) + H_t^\beta \left(\frac{\partial^m f}{\partial t^m} \right), \end{aligned}$$

для всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} H_t^\beta(f(x, y, z, t)) = \\ = \sup_{t_1, t_2 \in (0, T)} |f(x, y, z, t_1) - f(x, y, z, t_2)| |t_1 - t_2|^{-\beta} \end{aligned}$$

для всех $(x, y, z) \in \Omega$.

Функции $s_1, \phi, \vec{v}$ и p_e назовем решением (16)–(21), если

1) для достаточно малого ε , $0 < \varepsilon < s_1, \phi < 1 - \varepsilon < 1$;

2) $s_1, \phi \in C^{1+\beta, 1+\alpha}(\Omega_T), p_e \in C^{2+\alpha}(\Omega_T), \vec{v} \in C^{1+\alpha}(\Omega)$;

3) выполнены условия (20) – (21);

4) $s_1, \phi, \vec{v}$ и p_e удовлетворяют уравнениям (16)–(19) как непрерывные функции.

Теорема 1. Если $\phi^0(\vec{x})$ и $s^0(\vec{x}) \in C^{1+\beta, 1+\alpha}(\Omega_T)$, то решение, в смысле данного определения, существует и имеет следующий вид:

$$\phi \equiv \phi^0(\vec{x}), \quad s_1 \equiv s^0(\vec{x}), \quad \vec{v} \equiv 0, \quad p_e \equiv 0.$$

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Если s_1 и ϕ – решения в смысле данного определения, то $p_e = 0$

Доказательство.

Домножим (17) на p_e и после интегрирования по частям, пользуясь условием (20), получаем следующее равенство:

$$\int_{\Omega_T} K_0(\phi)k(s_1)|\nabla p_e|^2 d\Omega_T + \int_{\Omega_T} a_1(\phi)p_e^2 d\Omega_T = 0.$$

Так как на указанных s_1 и ϕ выражение

$$K_0(\phi)k(s_1)$$

непрерывно, дифференцируемо и строго положительно, справедливо равенство:

$$\|p_e\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|\sqrt{K_0(\phi)k(s_1)}\nabla p_e\|_{L^2(\Omega_T)}^2 = 0,$$

из которого и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Стоит заметить, что если $\vec{v}$ – решение в смысле данного определения, то $\vec{v} = 0$ [12, с. 9].

В силу леммы 1 и представления для $\vec{v}$ уравнения (18), (19) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(s_1\phi)}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, $s_1 = s^0(\vec{x})$, $\phi = \phi^0(\vec{x})$.

3. Восстановление искомых функций исходной системы

С учетом найденных функций, система (8) – (12) переписывается в следующем виде

$$\operatorname{div}(\vec{u}_i s_i \phi) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$s_i \phi(\vec{u}_i - \vec{u}_3) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_3(1 - \phi)) = 0, \quad (24)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}_3) = 0, \quad (25)$$

$$\nabla p_e = -\nabla p_1 = 0. \quad (26)$$

По аналогии с $\vec{v}$ находим, что $\vec{u}_3 = 0$. Тогда из уравнения (23) следует, что $\vec{u}_i = 0$, $i = 1, 2$

4. Пример точного автомодельного решения

Для системы уравнений (8)–(12) примем следующие модельные зависимости: $n = 1$ (одномерный случай), $a_1(\phi) = \frac{\alpha\phi}{1-\phi}$, $s = s_1$. Коэффициенты проницаемости k_{0i} берутся следующим образом:

$$k_{0i}(s_i) = \begin{cases} 0 & s_i \leq 0, \\ \bar{k}_{0i}s_i & 0 < s_i < 1, \\ \bar{k}_{0i} & s_i \geq 1. \end{cases}$$

Для системы (1)–(6) с учетом сделанных предположений поставим следующую задачу: две

несмешивающиеся жидкости занимают область $(\tau t, -\infty)$, $t > 0$. При $x = -\infty$ известна скорость и насыщенность первой и второй жидкости ($u_1 = u_1^-, u_2 = u_2^-, u_2^- > u_1^-, s_1 = s_1^-$), при $x = \tau t$ известна скорость и насыщенность первой ($u_1 = 0$, $s_1 = s_1^0 > 0.5$, $s_1^- < s_1^0$) и второй ($u_2 = u_2^-$) жидкости, а также их и общее полное давление ($p_1 = p_2 = p_1^0$, $p_{tot} = p_{tot}^0$), пористость среды ($\phi = \phi^0$). Пусть все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - \tau t$ (τ — неизвестная постоянная).

В соответствии со сделанными предположениями система (8)–(12) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi}(s_i \phi(u_i - \tau)) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

$$s_i \phi(u_i - u_3) = K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} \frac{dp_i}{d\xi}, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 = p_1, \quad (29)$$

$$\frac{d}{d\xi}((1 - \phi)(u_3 - \tau)) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{du_3}{d\xi} = -\frac{\alpha\phi}{1-\phi} p_e, \quad \frac{dp_{tot}}{d\xi} = 0. \quad (31)$$

При этом краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} s_1|_{\xi=0} &= s_1^0, & s_1|_{\xi=-\infty} &= s_1^-, & u_1|_{\xi=0} &= 0, \\ u_1|_{\xi=-\infty} &= u_1^-, & u_2|_{\xi=0} &= u_2^0, & u_2|_{\xi=-\infty} &= u_2^-, \\ p_1|_{\xi=0} &= p_1^0, & \phi|_{\xi=0} &= \phi^0 \end{aligned} \quad (32)$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} s_1^0 &> 0.5, & u_2^- &> u_1^-, & 0 < s_1^- < s_1^0 < 1, \\ u_2^0, u_1^- &> 0, & 0 < \phi^0 < 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Под решением системы (27)–(31) будем понимать совокупность функций

$(u_1, u_2, u_3, s_1, \phi, p_1) \in C^1(-\infty, 0]$ таких, что $0 < (s, \phi) < 1$. Эти функции удовлетворяют соотношениям (27)–(31) и краевым условиям (33).

Теорема 2. [13]. Пусть для системы (27)–(31) поставлены краевые условия, которые удовлетворяют (33), и известно, что $\frac{ds_1}{d\xi} = 0$ в $\xi \rightarrow -\infty$, $\frac{\bar{k}_{01}}{\mu_1} > \frac{\bar{k}_{02}}{\mu_2}$. Тогда задача (27)–(33) имеет решение в смысле данного определения.

Доказательство.

Проинтегрируем (27) и (30):

$$s_i \phi(u_i - \tau) = A_i, \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

$$(1 - \phi)(u_3 - \tau) = A_3, \quad (35)$$

где A_i , $i = 1, 2, 3$ неизвестные константы. Из (27)–(30) и (34)–(35) вытекает следующее соотношение:

$$\frac{\phi A_3}{1 - \phi} = \frac{A_1 k_{02} \mu_1 - A_2 k_{01} \mu_2}{s_1 k_{02} \mu_1 - s_2 k_{01} \mu_2}. \quad (36)$$

Равенство (36) с учетом (34) позволяет найти u_3^0 и u_3^- :

$$u_3^0 = -\frac{\bar{k}_{01}u_2^0\mu_2}{\mu_1\bar{k}_{02} - \mu_2\bar{k}_{01}} > 0,$$

$$u_3^- = \frac{u_1^- \bar{k}_{02}\mu_1 - u_2^- \bar{k}_{01}\mu_2}{\mu_1\bar{k}_{02} - \mu_2\bar{k}_{01}} > 0.$$

Из (34) следует:

$$\tau^2(s_1^0 s_1^- - s_2^0 s_1^-) - \tau(u_2^- s_1^- s_1^0 + s_1^- s_2^0 + s_2^0 u_1^- s_1^-) - s_1^- u_1^- s_2^0 u_2^0 = 0.$$

Из последнего квадратного уравнения следует существование искомого числа $\tau < 0$. После чего можно найти A_1 и A_2 . Из (34)–(36) получим:

$$\frac{A_3}{1 - \phi^-} = \frac{\mu_1 \bar{k}_{02} u_1^- - \mu_2 \bar{k}_{01} - \tau(\bar{k}_{02} \mu_1 - \bar{k}_{01} \mu_2)}{\bar{k}_{02} \mu_1 - \bar{k}_{01} \mu_2} > 0,$$

из чего делаем вывод, что $\phi^- < 1$.

Лемма 2. Если ϕ и s – решения задачи (27)–(31), то в условиях теоремы $0 < \phi$, $s < 1$.

Оценка на ϕ получается из уравнений (31) и (36):

$$\frac{\phi}{1 - \phi} = \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \exp\left(-\frac{A_3}{\alpha} \int_0^\xi p_e dt\right), \quad (37)$$

откуда следует, что $0 \leq \phi \leq 1$. Оценка для s получается из (34). Предположим, что $s < 0$, тогда (34) примет вид: $\frac{A_1}{s} < 0$. Предположим, что $s > 1$, тогда (34) примет вид: $\frac{A_2}{1-s} < 0$, что противоречит оценке на ϕ . Данное противоречие доказывает предполагаемую оценку. Лемма доказана.

В частности, получаем, что $0 < \phi^- < 1$.

Пусть $\delta = \ln(\phi/(1 - \phi))$. Из (34) следует, что δ зависит явным образом только от s . С учетом (28)–(31) уравнение для s в таком случае примет следующий вид:

$$A_1 - A_3 s e^\delta = -\frac{K_0 k_{01} A_3}{\alpha \mu_1} \left(\frac{d^2 \delta}{ds^2} \left(\frac{ds}{d\xi} \right)^2 + \frac{d\delta}{ds} \frac{d^2 s}{d\xi^2} \right).$$

Полученное уравнение для s имеет второй порядок и является автономным. Последнее позволяет понизить порядок при помощи замены $y = \frac{ds}{d\xi}$. Решим уравнение для s относительно y^2 :

$$y^2 = \left(\frac{d\delta}{ds} \right)^{-2} \frac{2\alpha \mu_1}{K_0 k_{01} A_3} \int_{s_1^-}^s (A_3 e^\delta - \frac{A_1}{\zeta}) \frac{d\delta}{d\zeta} d\zeta \equiv F(s).$$

Функция $F(s)$ непрерывна на интервале (s_1^-, s_1^0) и неотрицательна на нем. Построим решение задачи (27)–(31). Заметим, что s – монотонно возрастает. Таким образом, $\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{F(s)}$ и, следовательно,

$$\xi = - \int_s^{s_1^0} \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} = I(s).$$

Этот интеграл имеет особенность в s_1^- , однако $F(s)$ ведет себя как $s - s_1^-$ в точке s_1^- и, как следствие, сходится на отрезке $[s_1^-, s_1^0]$. Однако ξ не ограничена. Следовательно, начиная с некоторой точки, доопределим $\frac{ds}{d\xi} = 0$, а $s = s_1^-$. Так как $\frac{ds}{d\xi} = 0$ при $\xi \rightarrow \xi^* - 0$, непрерывность производной не нарушается.

Таким образом, данная задача имеет следующее решение:

$$s(\xi) = \begin{cases} I^{-1}(\xi), & \text{если } \xi \geq \xi^*, \\ s_1^-, & \text{если } \xi < \xi^*, \end{cases}$$

где

$$\xi^* = - \int_{s_1^-}^{s_1^0} \frac{dt}{\sqrt{F(t)}}.$$

$s(\xi)$ гладкая и непрерывная. Остальные функции восстанавливаются из системы (27)–(31).

Выводы

В данной работе были построены примеры точных гладких решений для системы уравнений (1)–(6).

Библиографический список

1. Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2015. No 1–2. С. 131–135. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-24
2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow in Viscoelasticrock // Geodinamica Acta. 1998. Vol. 11. P. 55–84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: изд-во Наука, 1983. С. 315.
4. Shelukhin V.V. A Poroelastic Medium Saturated by a Two-Phase Capillary Fluid // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2014. Vol. 26. No 5. P. 619–638. DOI: 10.1007/s00161-013-0321-x
5. Jardani A. Revisiting Seismoelectric Couplings in a Poroelastic Material Containing Two Immiscible Fluid Phases //

Geophysical Journal International. 2015. Vol. 202. No 2. P. 850–870. DOI: 10.1093/gji/ggv176

6. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2016. № 1. С. 152–155. DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-27

7. Гилев П.В., Папин А.А. Существование слабого решения двумерной задачи фильтрации в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского государственного университета. 2022. No 4. С. 93–97. DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-13

8. Saad A.S., Saad B., Saad M. Numerical Study of Compositional Compressible Degenerate Two-Phase Flow In Saturated Unsaturated Heterogeneous Porous Media // Computers & Mathematics with Applications. 2016. Vol. 71. No 2. P. 565–584. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.12.010

9. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A Numerical Model for Coupled Fluid Flow and Matrix Deformation with Application to Disequilibrium Compaction and Delta Stability. Agupubs.com: Journal of Geophysical

Research. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/toc/21562202b/2007/112/B10>. DOI: 10.1029/2006JB004701

10. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A Multi-Layer SPH Method for Generic Water–Soildynamic Coupling Problems. Part I: Revisit, Theory, and Validation. www.sciencedirect.com: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/computer-methods-in-applied-mechanics-and-engineering/vol/396/suppl/C>. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115106

11. Бочаров О.Б., Рудяк В.Я., Серяков А.В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физикотехнические проблемы разработки полезных ископаемых. 2014. No 2. С. 54–68.

12. Боговский М.Е. Аналитико-численные методы для уравнений Навье — Стокса. М., 2008. С. 231.

13. Гилев П.В. Пример точного решение одной задачи двухфазной фильтрации // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. Барнаул: изд-во АлтГУ, 2021. № 18. С. 89–92.

References

1. Papin A.A., Podladchikov Y.Y. Isothermal Motion of Two Immiscible Fluids in a Poroelastic Medium. *Izvestiya of Altai State University*. 2015. No 1-2. P. 131–135. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-24. (In Russ.)

2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow In Viscoelastic Rock. *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. P. 55–84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5

3. Antoncev S.N., Kazhihov A.V., Monahov V.N. *Boundary Value Problems of Mechanics of Inhomogeneous Fluids*. Novosibirsk: Publishing House "Science", 1983, 315 p. (In Russ.)

4. Shelukhin V.V. A Poroelastic Medium Saturated By a Two-Phase Capillary Fluid. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2014. Vol. 26. No 5. P. 619–638. DOI: 10.1007/s00161-013-0321-x

5. Jardani A. Revil. Seismoelectric Couplings In a Poroelastic Material Containing Two Immiscible Fluid Phases. *Geophysical Journal International*. 2015. Vol. 202. No 2. P. 850–870. DOI: 10.1093/gji/ggv176

6. Papin A.A., Sibin A.N. Self-Similar Solution to the Problem of Piston Displacement of Liquids in a Poroelastic Medium. *Izvestiya of Altai State University*. 2016. No 1. P. 152–155. DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-27 (In Russ.)

7. Gilev P.V., Papin A.A. Existence of a Weak Solution to a Two-Dimensional Filtration Problem in a Thin Poroelastic Layer. *Izvestiya of Altai State University*. 2016. № 1. P. 93–97. DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-27 (In Russ.)

8. Saad A.S., Saad B., Saad M. Numerical Study of Compositional Compressible Degenerate Two-Phase Flow In Saturated

Unsaturated Heterogeneous Porous Media. *Computers Mathematics with Applications*. 2016. Vol. 71. No 2. P. 565–584. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.12.010

9. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. A Numerical Model for Coupled Fluid Flow and Matrix Deformation with Application to Disequilibrium Compaction and Delta Stability. *Agupubs.com: Journal of Geophysical Research*. URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/toc/21562202b/2007/112/B10>. DOI: 10.1029/2006JB004701

10. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A Multi-Layer SPH Method for Generic Water–Soildynamic Coupling Problems. Part I: Revisit, Theory, and Validation. www.sciencedirect.com: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. URL: <https://www.sciencedirect.com/journal/computer-methods-in-applied-mechanics-and-engineering/vol/396/suppl/C>. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115106

11. Bocharov O.B., Rudyak V.YA., Seryakov A.V. The Simplest Models of Deformation of a Porous-Elastic Medium Saturated With Fluids. *Physicotechnical Problems of Mineral Resource Development*. 2014. No 2. P. 54–68. (In Russ.)

12. Bogovskij M.E. *Analytical-Numerical Methods for the Navier — Stokes Equations*. М., 2008. 231 p. (In Russ.)

13. Gilev P.V. An Example of an Exact Solution to One Two-Phase Filtering Problem. *Works of Young Scientists of Altai State University*. Barnaul: Publishing House of Altai State University, 2021. № 18. P. 89–92. (In Russ.)

Информация об авторах

П.В. Гилев, аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

А.А. Папин, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

P.V. Gilev, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

A.A. Papin, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Differential Equations. Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia.