Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 75–80.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 75–80.

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 519.67
DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-09

Асимптотический консенсус в модели коллективного принятия решений на конкурентном рынке

Дарья Геннадьевна Алгазина[1], Юлия Геннадьевна Алгазина[2], Николай Николаевич Шаховалов[3], Елена Геннадьевна Вдовкина[4], Светлана Анатольевна Поддубнова[5]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, darya.algazina@mail.ru
[2]Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, Россия, algazina@inbox.ru
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, snn_1979@mail.ru
[4]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, v_elen@mail.ru
[5]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, aspod@list.ru

MATHEMATICS AND MECHANICS

Original article

Asymptotic Consensus in the Model of Collective Decision Making in a Competitive Market

Darya G. Algazina[1], Yulia G. Algazina[2], Nikolai N. Shakhovalov[3], Elena G. Vdovkina[4], Svetlana A. Poddubnova[5]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, darya.algazina@mail.ru
[2]Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russia, algazina@inbox.ru
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, snn_1979@mail.ru
[4]Altai State University, Barnaul, Russia, v_elen@mail.ru
[5]Altai State University, Barnaul, Russia, aspod@list.ru

Аннотация. Рассматривается проблема достижения консенсуса на рынке олигополии при отсутствии общего знания среди агентов. Особенностью подхода к ее решению является применение рефлексивных повторяющихся игр и модели индикаторного коллективного поведения. Дается краткий обзор ряда моделей достижения консенсуса, близких по структуре принятия решений. В качестве объекта исследования рассматриваются взаимовлияющие процессы динамики действий агентов в олигополии Курно. Отмечаются особенности модели консенсуса для такого рынка. Показано, что асимптотический консенсус является статичным равновесием Нэша в соответствующей игре олигополии в нормальной форме. Показано также, что даже для классической линейной модели рынка, проблема достижения консенсуса пока не имеет аналитического решения в полной мере

Abstract. The paper considers the problem of reaching consensus in an oligopoly market in the absence of common knowledge among agents. The use of reflexive games and the indicative collective behavior model are the peculiarities of the approach to solve the problem. There is a brief overview of a number of consensus models with similar decision making structures. The object of study is the mutually affecting processes of the agents' actions dynamics in a Cournot oligopoly. The consensus model features for such a market are noted. It is shown that the asymptotic consensus is a static Nash equilibrium in the corresponding oligopoly game in normal form. The study also shows that the problem of reaching consensus yet has no complete analytical solution, even for the classical linear market model. There are no many applicable analytical results obtained for consensus models with similar structures.

и к ней применимы немногие аналитические результаты, полученные для схожих по структуре моделей консенсуса. Для многих конкретных динамик только вычислительные эксперименты позволяют дать ответ на вопрос о сходимости к консенсусу. Приведены и обсуждаются аналитические выводы и результаты численных экспериментов для ряда практически важных случаев модели. Приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: модель Курно, ограниченная рациональность, асимптотический консенсус, модель коллективного поведения, вычислительные эксперименты

Only computational experiments can provide the answers to the question of convergence to consensus for many specific dynamics. There are analytical conclusions and results of numerical experiments for a number of practically important cases of the model that presented and discussed with illustrative examples in the study.

Keywords: Cournot model, bounded rationality, asymptotic consensus, collective behavior model, computational experiments

Для цитирования: Алгазина Д.Г, Алгазина Ю.Г, Шаховалов Н.Н., Вдовкина Е.Г., Поддубнова С.А. Асимптотический консенсус в модели коллективного принятия решений на конкурентном рынке // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 75–80. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-09

For citation: AlgazinaD.G., Algazina Yu.G., Shakhovalov N.N., Vdovkina E.G., Poddubnova S.A. Asymptotic Consensus in the Model of Collective Decision Making in a Competitive Market. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 75–80. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-09

Введение

В организационных системах связь между принимаемым субъектом (агентом) решением и его результатами может иметь сложную природу. Как правило, для ее анализа используются как аналитические исследования, так и численное моделирование. Вместе с тем в теории принятия решений модели многих приложений имеют похожие структуры, что нередко позволяет результаты, полученные для одних приложений, успешно применять к анализу моделей других приложений. В большей мере это относится к качественным выводам и в меньшей мере — к математическим результатам или к результатам численного моделирования. Подобная ситуация достаточно типична для проблемы достижения асимптотического консенсуса в коллективном принятии решений [1, 2].

Достижение консенсуса является системообразующим фактором. Система не в состоянии решать поставленные перед ней задачи как для единого целого, она распадается, если агенты не способны достичь консенсуса. В настоящей статье проблема консенсуса рассматривается на конкурентном рынке.

Цель настоящей статьи — исследование взаимовлияющих процессов динамики действий агентов в олигополии Курно в условиях неполной информации как модели асимптотического консенсуса.

Модели достижения консенсуса

В этом разделе рассматривается ряд знаковых для настоящего исследования моделей.

К первой в этом ряду отнесем *модель цепи Маркова* [3]. В ней изучается распределение вероятностей $y = (y_1, \dots, y_n)$ на множестве состояний конечной цепи. Распределение вероятностей состояний цепи на t-м шаге $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t)$ задается формулой $y^t = (P)^t y^0$ ($t = 0$, $1, \dots$), где P — матрица переходов и $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ — начальное распределение вероятностей.

Модель цепи Маркова хорошо исследована, и многие полученные для нее математические результаты в последующем найдут применение к анализу моделей поиска асимптотического консенсуса.

Считается, что *асимптотический консенсус* реализуется, если при некотором $k \in R$ имеет место соотношение:

$$\lim_{t \to \infty} y_i^t = k,\ i \in N = \{1, \dots, n\}. \tag{1}$$

Для сближения мнений экспертов был предложен *метод Делфи* [4]. Экспертам предлагается на каждом шаге итерационного процесса скорректировать свои численные оценки с учетом средних оценок других членов группы экспертов. Процесс завершается, если эксперты смогут прийти к консенсусу или хотя бы их мнения стабилизируются. В модификациях этого метода допускается, что разные эксперты могут получать разную информацию, эксперты доверяют мнению только части экспертов и пр.

Математические свойства асимптотического консенсуса достаточно подробно исследовались на *модели Френча — Де Гроота* $y_i^{t+1} = \sum_{j \in N} p_{ij} y_j^t$ ($t = 0, 1, \dots$) [5].

В этой модели каждый эксперт оценивает некоторую величину: — ее оценка i-м экспертом на t-й итерации, p_{ij} — степень учета им мнения j-го эксперта и $\sum_{j \in N} p_{ij} = 1$. Модель представима в матричном виде как $y^{t+1} = Py^t$, где $P = \| p_{ij} \|$. Основные результаты итеративного преобразования набора субъективных распределений вероятностей в единое распределение (асимптотический консенсус) для этой модели можно найти в [6].

В [7] приведена *общая модель коллективного принятия решений* агентами как модель асимптотического консенсуса. В этой модели i-й агент в $(t + 1)$-й момент времени делает «шаг» от своего предыдущего действия y_i^t к *текущему положению цели* $y_i^*(y_{-i}^t, r_i^{t+1})$, которое является его наилучшим действием/ответом на обстановку $y_{-i}^t = (y_1^t, ..., y_{i-1}^t, y_{i+1}^t, ..., y_n^t)$, сложившуюся в t-й момент времени, по следующей процедуре:

$$y_i^{t+1} = (1-\gamma_i^{t+1})y_i^t + \gamma_i^{t+1} y_i^*(y_{-i}^t, r_i^{t+1}), t = 0, 1, ... \quad (2)$$

Величина шага задается выбором параметра $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$.

Параметр $r_i \in R_i$ определяет *состояние* агента, которое может быть интерпретировано как его *оценки, убеждение, мнение или отношение* к результатам коллективной деятельности. На состояние агента могут влиять: его предыдущее состояние, его предыдущее действие, предыдущие действия других агентов, результаты деятельности (коллективное решение) в предыдущий момент времени, внешнее управление (воздействие) на него и пр. Состояния агентов могут отличаться от действий или от принимаемого коллективного решения.

В модели (2) равновесие $y_i^*(a, ..., a) = r^*$ называется *унифицированным*. В нем у всех агентов итоговые состояния и итоговые действия одинаковы. Одинаковы также равновесные состояния и действия. Условия существования унифицированного равновесия (т. е. асимптотического консенсуса), его поиск и свойства — важная исследовательская задача. Ввиду ее сложности основные исследования ведутся для практически и/или содержательно важных частных случаев. Аналитические результаты, относящиеся к модели (2), можно найти в [7].

Модель конкурентного рынка как модель консенсуса

Рассмотрим классическую модель олигополии Курно.

Целевой функцией i-го агента является его прибыль:

$$F_i(y_{-i}, y_i) = (a - b\Sigma_{j \in N \setminus \{i\}} y_j - by_i)y_i - (c_i y_i + d_i) \to \max_{y_i}. \quad (3)$$

Здесь: y_i — объем выпуска (действие) i-го агента, спрос задан линейной функцией спроса (функцией цены) $p(y_{-i}, y_i) = a - b\Sigma_{j \in N \setminus \{i\}} y_j - by_i$ (a, b — параметры спроса), полные издержки агента заданы линейной функцией $c_i y_i + d_i$ (c_i, d_i — предельные и постоянные издержки) [8, 9].

В условиях полного знания среди агентов решение (3) может быть найдено как равновесие Нэша $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ в игре в нормальной форме. В условиях неполного знания для нахождения решения агенты вынуждены в рамках своей информированности в динамике уточнять собственные действия, основываясь на предсказании поведения конкурентов. Пусть динамика действий i-го агента следует процедуре индикаторного поведения (2) без учета его состояния r_i:

$$y_i^{t+1} = (1-\gamma_i^{t+1})y_i^t + \gamma_i^{t+1} y_i^*(y_{-i}^t), t = 0, 1, ... \quad (4)$$

В [10] показано, что заменой переменных $\varepsilon_i^t = y_i^* - y_i^t$ процедура (4) для модели (3) приводится к виду

$$\varepsilon_i^{t+1} = (1-\gamma_i^{t+1})\varepsilon_i^t + (-\gamma_i^{t+1} / 2)\, \Sigma_{j \neq i}\, \varepsilon_j^t, t = 0, 1, ... \quad (5)$$

Динамику (5) запишем в матричной форме $\varepsilon^{t+1} = S^{t+1} \varepsilon^t$, где $\varepsilon^t = (\varepsilon_1^t, ..., \varepsilon_n^t)^T$

и $S^{t+1} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1^{t+1} & -\gamma_1^{t+1}/2 \;...\; -\gamma_1^{t+1}/2 \\ ... & ... \qquad ... \\ -\gamma_n^{t+1}/2 & -\gamma_n^{t+1}/2 \;...\; 1-\gamma_n^{t+1} \end{pmatrix}$.

В зависимости от параметров γ равновесие Нэша y^* в модели (3)–(4) может быть как достижимо, так и недостижимо. Если $y_i^t \to y_i^*$ при $t \to \infty$, то $\varepsilon_i^t \to 0$, и наоборот, если в модели (5) агенты стремятся к консенсусу, т. е. $\varepsilon_i^t \to \varepsilon_i^*$, то существует результирующая матрица $S^* = \lim_{t\to\infty} S^t$, которая является нулевой матрицей, а также $y_i^t \to y_i^*$ в модели (3)–(4) [10]. Таким образом, проблема достижения равновесия в модели (3)–(4) сводится к проблеме достижения консенсуса в более простой модели (5).

Матрица перехода S^t имеет ряд существенных особенностей, несмотря на структурную схожесть модели (5) с рассмотренными в предыдущем разделе моделями консенсуса. Матрица S^t не является стохастической, все ее недиагональные элементы неположительны, могут встречаться нулевые диагональные и недиагональные элементы.

Рассмотрим два практически важных частных случая модели (3)–(4) и матрицы S^t. В обоих случаях каждый агент в каждый момент времени, полагая единичным параметр γ, тем самым выбирает свой лучший ответ на предполагаемый выбор конкурентов.

Пусть $n = 2$. Имеем $S^t = S = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 1,2, ...$.

Тогда $\varepsilon^t = (S)^t \varepsilon^0$. Нетрудно показать, что $(S)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1/2^t \\ -1/2^t & 0 \end{pmatrix}$, если t нечетно, и $(S)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2^t \\ 1/2^t & 0 \end{pmatrix}$, если t четно. Поэтому $S^* = \lim_{t\to\infty} S^t$ — нулевая матрица, а $\varepsilon^* = (0, 0)^T$ — достижимый консенсус.

Пусть теперь $n = 3$. Имеем $S^t = S = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

$t = 1,2, ...$. Нетрудно показать, что матрица $(S)^t$ обладает следующим свойством: если t нечетно, то все ее элементы отрицательны и сумма элементов по каждой строке и по каждому столбцу равна минус единице; если t четно, то все ее элементы строго положительны и сумма элементов по каждой строке и по каждому столбцу равна единице. Поэтому матрица $S^* = \lim_{t\to\infty}(S)^t$, если данный предел существует, не может быть нулевой матрицей, а единственно возможный консенсус $\varepsilon^* = (0, 0,0)^T$ не может быть достигнут при единичных значениях параметра γ.

В общем случае динамика (5) описывается матричным соотношением

$$\varepsilon^{t+1} = \prod\nolimits_{\tau=1}^{t+1} S^\tau \varepsilon^0. \qquad (6)$$

В зависимости от параметров γ динамика (6) может сходиться или не сходиться к консенсусу $\varepsilon^* = (0, \dots, 0)^T$. В частности (см., например, [10]), при $\gamma \equiv 1$ консенсус не будет достижим и при n > 3.

Для произвольных $\gamma_i^\tau \in [0; 1]$ проблема сходимости (6) пока не имеет аналитического решения в полной мере. В связи с особенностями матриц перехода S^t, к ней применимы немногие аналитические результаты, полученные для схожих по структуре моделей консенсуса. Для многих конкретных динамик только вычислительные эксперименты позволяют дать ответ на вопрос о сходимости динамик к консенсусу.

Вычислительные эксперименты

Пусть $n = 5$. На рисунке 1 приведен фрагмент динамики (5), сходящейся к консенсусу $\varepsilon^* = (0, \dots, 0)^T$ при $\gamma_1^t = 1$ (непрерывная линия с начальными условиями $\varepsilon_1^0 = -1500$) и $\gamma_2^t = 0{,}8$, $\gamma_3^t = 0{,}6$, $\gamma_4^t = 0{,}4$, $\gamma_5^t = 0{,}2$ (четыре пунктирных линии с начальными условиями $\varepsilon_2^0 = 0$, $\varepsilon_3^0 = -3000$, $\varepsilon_4^0 = 1500$, $\varepsilon_5^0 = 1000$) с различными по γ шагами и начальными условиями агентов. На рисунке 2 показан фрагмент динамики, которая не сходится к консенсусу. Здесь начальные условия прежние, но шаги агентов, начиная со второго, увеличены на 0,2. Видно, что траектории агентов с одинаковыми шагами, но с разными начальными условиями (это агенты 1 и 2, которые, делая шаги, равные единице, выбирают лучшие ответы на предполагаемый выбор конкурентов) со временем выравниваются. Эксперименты показывают, что при $\gamma_i^t = 1$, $i = \overline{1,3}$ динамика не сходится к консенсусу, даже при $\gamma_i^t \ge 0{,}01$, $i = \overline{4,5}$. При $\gamma_i^t = 1$, $i = \overline{1,4}$ динамика (5) не может сходиться к консенсусу ни при каких значениях параметров γ_5^t и ни при каких начальных, отличных от нулевых, условиях агентов.

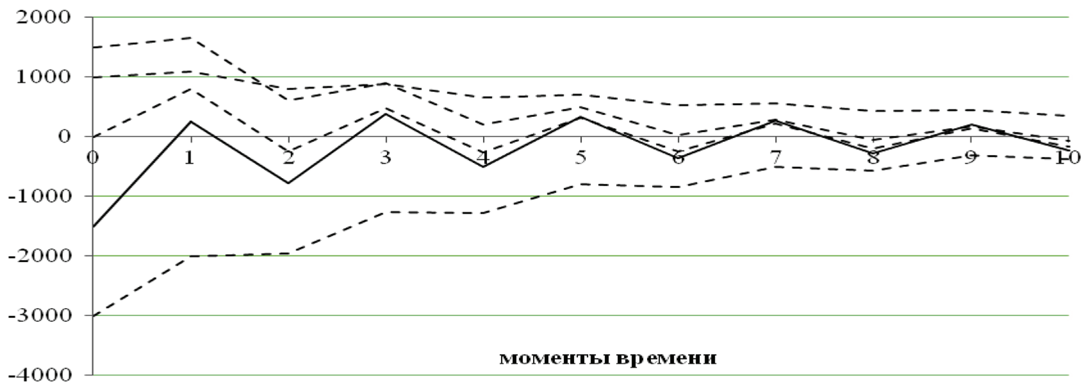

Рис. 1 Сходящаяся к консенсусу динамика (5) при $\gamma_1^t = 1$ и $\gamma_2^t = 0{,}8$, $\gamma_3^t = 0{,}6$, $\gamma_4^t = 0{,}4$, $\gamma_5^t = 0{,}2$

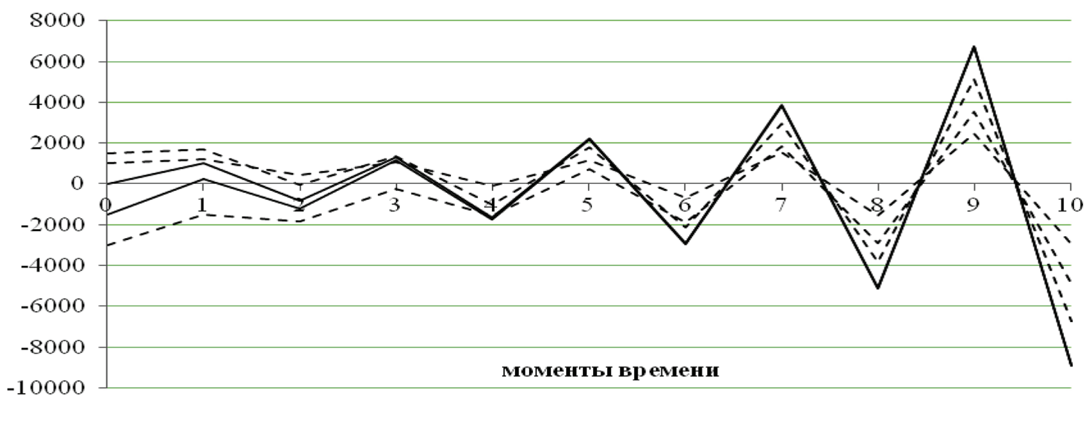

Рис. 2. «Расходящаяся» динамика (5) при $\gamma_1^t = \gamma_2^t = 1$, $\gamma_3^t = 0{,}8$, $\gamma_4^t = 0{,}6$, $\gamma_5^t = 0{,}4$

Заключение

Представляются перспективными дальнейшие аналитические и экспериментальные исследования соответствующих моделей консенсуса для различных известных типовых моделей рынка олигополии (Штакельберга, Бертрана и пр.). Также представляют интерес формализация, численное моделирование и анализ различных поведенческих компонент деятельности агентов («конкурентоспособность», «уровень притязаний» и пр.), которые влияют на динамику их действий и достижение консенсуса в условиях ограниченной рациональности.

Библиографический список

1. Wang Y., Ishii H., Bonnet F., Défago X. Resilient Consensus for Multi-Agent Systems under Adversarial Spreading Processes // IEEE Transactions on Network Science and Enginee-ring. 2022.Vol. 9. No 5. DOI: 10.1109/TNSE.2022.3176214

2. Проскурников А.В. Усредняющие алгоритмы и неравенства в задачах многоагентного управления и моделирования : дисс. … докт. физ.-мат. н. СПб., 2022. 384 с.

3. Марков А.А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Известия физико-математического общества при Казанском университете. 1906. Сер. 2. Т. 15. С. 135–156.

4. Linstone H.A., Turoff M. The Delphi Method: Techniques and Applications. Addison-Wesley Pub. Co., 1975. 620 p.

5. De Groot M.H. Reaching a Consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No 345. P. 118–121.

6. Теория управления (дополнительные главы) : учебное пособие / под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019. 552 с.

7. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами. 2020. Вып. 85. С. 206–237.

8. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 83. No 3. P. 367–388.

9. Geraskin M.I. A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games // Automation and Remote Control. 2023. Vol. 84. No. 6. P. 637–653.

10. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Агрегированные оценки динамики рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии Курно // Автоматика и телемеханика. 2024. № 9. С. 124–138.

References

1. Wang Y., Ishii H., Bonnet F., Défago X. Resilient Consensus for Multi-Agent Systems under Adversarial Spreading Processes. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering.* 2022.Vol. 9/ No 5. DOI:10.1109/TNSE.2022.3176214.

2. Proskurnikov A.V. *Averaging Algorithms and Inequalities in Multi-Agent Control and Modeling Problems.* Thesis of Doctoral Dissertation. St. Petersburg, 2022. 384 p. (In Russ.)

3. Markov A.A. Extension of the Law of Large Numbers to Quantities that Depend on each Other. *Izvestiya Physico-Mathematical Society at Kazan University*. 1906. 2nd series. Vol. 15. P. 135–156. (In Russ.)

4. Linstone H.A., Turoff M. *The Delphi Method: Techniques and Applications.* Addison-Wesley Pub. Co., 1975. 620 p.

5. De Groot M.H. Reaching a Consensus. *Journal of the American Statistical Association.* 1974. Vol. 69. No 345. P. 118–121.

6. *Management Theory (Additional Chapters):* textbook / edited by D.A. Novikov. M.: LENAND, 2019. 552 p. (In Russ.)

7. Novikov D.A. Models of Dynamics of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making. *Management of Large Systems.* 2020. Issue 85. P. 206–237. (In Russ.)

8. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models. *Automation and Remote Control.* 2022. Vol. 83. No 3. P. 367–388.

9. Geraskin M.I. A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games. *Automation and Remote Control.* 2023. Vol. 84. No. 6. P. 637–653.

10. Algazin G.I., Algazina D.G. Aggregated Estimates of Reflexive Collective Behavior Dynamics in a Cournot Oligopoly Model. *Automation and Telemechanics.* 2024. No 9. P. 124–138. (In Russ.)

Информация об авторах

Д.Г. Алгазина, кандидат технических наук, доцент кафедры цифровых технологий и бизнес-аналитики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Ю.Г. Алгазина, кандидат экономических наук, доцент кафедры информационных систем в экономике, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, Россия;

Н.Н. Шаховалов, кандидат педагогических наук, доцент кафедры цифровых технологий и бизнес-аналитики, заведующий кафедрой, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Е.Г. Вдовкина, кандидат экономических наук, доцент кафедры цифровых технологий и бизнес-аналитики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

С.А. Поддубнова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры цифровых технологий и бизнес-аналитики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

D.G. Algazina, Candidate of Sciences in Technology, Associate Professor of the Department of Digital Technologies and Business Analytics, Altai State University, Barnaul, Russia;

Yu.G. Algazina, Candidate of Sciences in Economics, Associate Professor of the Department of Information Systems in Ecoomics, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russia;

N.N. Shakhovalov, Candidate of Sciences in Pedagogy, Associate Professor of the Department of Digital Technologies and Business Analytics, Chief of Department, Altai State University, Barnaul, Russia;

E.G. Vdovkina, Candidate of Sciences in Economics, Associate Professor of the Department of Digital Technologies and Business Analytics, Altai State University, Barnaul, Russia;

S.A. Poddubnova, Candidate of Sciences in Pedagogy, Associate Professor of the Department of Digital Technologies and Business Analytics, Altai State University, Barnaul, Russia.