

Научная статья

УДК 538.9

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-07

Делокализованные нелинейные колебательные моды ОЦК решетки

Денис Сергеевич Рябов¹, Игорь Витальевич Косарев²,

Дина Ураловна Абдуллина³, Сергей Владимирович Дмитриев⁴

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия, dryabov@yandex.ru

²Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия, igor.v.kosarev@gmail.com

³Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия, dina.abdullina25@gmail.com

⁴Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН; Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия, dmitriev.sergey.v@gmail.com

Original article

Delocalized Nonlinear Vibrational Modes of BCC Lattice

Denis S. Ryabov¹, Igor V. Kosarev², Dina U. Abdullina³, Sergey V. Dmitriev⁴

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia, dryabov@yandex.ru

²Institute of Molecule and Crystal Physics UFRC RAS; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia, igor.v.kosarev@gmail.com

³Institute of Molecule and Crystal Physics UFRC RAS, Ufa, Russia, dina.abdullina25@gmail.com

⁴Institute of Molecule and Crystal Physics UFRC RAS; Institute for Metals Superplasticity Problems, Ufa, Russia, dmitriev.sergey.v@gmail.com

Аннотация. Представлен ряд точных решений уравнений движения атомов в ОЦК кристалле, называемых делокализованными нелинейными колебательными модами (ДНКМ). Точные решения получены из анализа только точечной группы симметрии ОЦК решетки, а следовательно, они существуют для любого типа межатомных взаимодействий и для любой амплитуды. Все рассмотренные ДНКМ являются колебательными модами с одной степенью свободы. Рассчитаны зависимости частоты от амплитуды ДНКМ при описании взаимодействия между атомами потенциалом Ферми — Паста — Улама с жестким типом нелинейности с учетом взаимодействий до четвертого соседа. 34 исследованных ДНКМ разбиты на семь групп, внутри каждой группы колебательные моды имеют одинаковую частоту в пределе малых амплитуд. Тот факт, что различные ДНКМ могут иметь одинаковую частоту при малых амплитудах колебаний, объясняется тем, что некоторые из них могут быть представлены как суперпозиция других после наложения на них преобразования точечной симметрии. Полученные результаты могут

Abstract. The article presents several exact solutions of the equations of motion of atoms in a BCC crystal, called delocalized nonlinear vibrational modes (DNVMs). The exact solutions are obtained by analyzing the BCC lattice point symmetry group only, therefore, they exist for any type of interatomic interactions and for any amplitudes. All studied DNVMs are vibrational modes with one degree of freedom. The dependence between frequency and amplitude of DNVMs is calculated using the Fermi-Pasta-Ulam potential with hard type nonlinearity when considering interatomic interactions up to the fourth neighbor. There are seven groups among the 34 studied DNVMs with the same frequency of vibrational modes in the small amplitude limit within each group. This fact is explained by some DNVMs being superpositions of others after applying point symmetry transformations. The obtained results can be to test the interatomic potentials of BCC crystals.

быть использованы для тестирования межатомных потенциалов ОЦК кристаллов.

Ключевые слова: ОЦК решетка, дальнедействующие взаимодействия, дисперсионное соотношение, нелинейная динамика, делокализованная нелинейная колебательная мода, точное решение

Для цитирования: Рябов Д.С., Косарев И.В., Абдуллина Д.У., Дмитриев С.В. Делокализованные нелинейные колебательные моды ОЦК решетки // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 58–66. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-07

Финансирование: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 24-11-00139.

Введение

Кристаллические решетки допускают точные динамические решения в виде делокализованных нелинейных колебательных мод (ДНКМ). Такие решения могут быть получены с учетом только пространственной группы симметрии решетки [1–5] и, таким образом, существуют для любого типа межатомных взаимодействий даже при больших амплитудах.

ДНКМ хорошо изучены для нелинейных цепочек [2–6]. Большинство ДНКМ являются стоячими волнами, но волна с тремя частицами на период является бегущей волной [7], которая связана с локализованными движущимися возбуждениями с «магическим» числом волны [8–10].

В большинстве случаев ДНКМ изучаются в решетках с взаимодействием ближайших соседей или с учетом первых и вторых соседей, например, для квадратной решетки, поскольку эта решетка нестабильна, если не задействованы связи вторых соседей. Существует тесная связь между ДНКМ и пространственно локализованными нелинейными колебательными модами, называемыми дискретными бризерами, или внутренними локализованными модами [11–16].

Взаимодействия дальнего радиуса действия были включены во многие работы, анализирующие нелинейную динамику решеток. В частности, дальнедействующие взаимодействия были учтены при в ДНК

Keywords: bcc lattice, long-range interactions, dispersion relation, nonlinear dynamics, delocalized nonlinear vibrational mode, exact solution

For citation: Ryabov D.S., Kosarev I.V., Abdullina D.U., Dmitriev S.V. Delocalized Nonlinear Vibrational Modes of BCC Lattice. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 58–66. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-07

Funding: the study was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-11-00139.

[17–22], в цепях с кулоновскими силами [23, 24] и дисперсионными взаимодействиями [25]. Влияние дальнедействующих взаимодействий на перенос тепла в цепочках рассматривалось в работах [26–29]. Подвижность дискретных дыхательных аппаратов увеличивается в решетках с дальнедействующими взаимодействиями [30, 31].

Материалы и методы исследования

Здесь представлен класс диктуемых симметрией решетки точных решений нелинейных уравнений движения ОЦК решетки. В пионерских работах такие решения назывались *кусты нелинейных нормальных мод* (КННМ) [32], но в контексте кристаллических решеток часто используется термин ДНКМ. Размер вычислительной ячейки для исследования зонально-граничных ДНКМ равен $2h \times 2h \times 2h$. Координаты 16 атомов в ячейке приведены на рисунке 1.

Зонально-граничные ДНКМ возбуждаются путем придания частицам начальных смещений в соответствии с определенными схемами, показанными на рисунках 2–8. Начальные скорости частиц равны нулю. Траектории колеблющихся частиц показаны черным цветом. Для частиц, изображенных пустыми кружками, w -компонента начального смещения равна нулю, и она положительна (отрицательна), если частица отмечена точкой (крестиком).

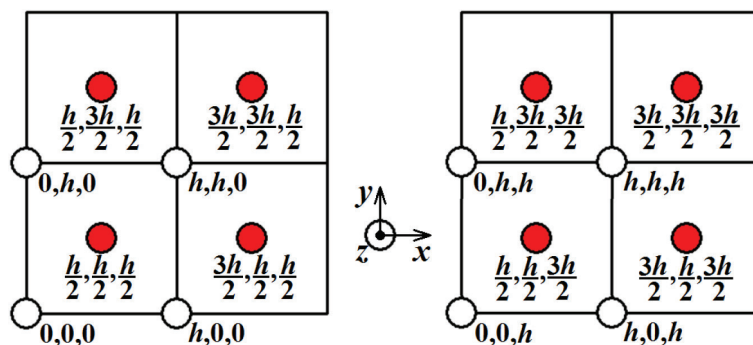


Рис. 1. Координаты атомов в кубической трансляционной ячейке, имеющей размеры $2h \times 2h \times 2h$. Ячейка включает 16 атомов

Все ДНКМ являются колебательными модами с одной степенью свободы. Это означает, что длина вектора начального смещения равна либо нулю либо A , причем последняя величина является амплитудой

ДНКМ. Частицы с нулевым начальным смещением остаются в состоянии покоя, в то время как другие частицы колеблются.

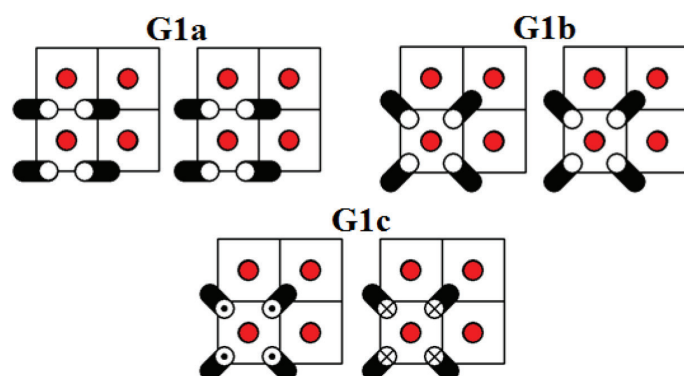


Рис. 2. Три ДНКМ группы G1

Все ДНКМ разделены на семь групп, обозначенных с G1 по G7. Численно определенные частотные характеристики для ДНКМ показаны на рисунке 9 (группы G1, G2 и G3), рисунке 10 (группы G4 и G5) и рисунке 11 (группы G6 и G7). Как видно из рисунков 9, 10 и 11, ДНКМ, принадлежащие к одной группе, имеют одинаковую частоту колебаний в пределе малых амплитуд. При больших амплитудах частота мод одной группы различна. Различные ДНКМ од-

ной группы имеют одинаковые частоты колебаний при малых амплитудах, поскольку более сложные ДНКМ являются суперпозициями простых ДНКМ. Например, ДНКМ G1b на рисунке 2 является суперпозицией ДНКМ G1a и ее вращения на $\pi/2$ вокруг оси z ; ДНКМ G1c — это сумма G1b и G1a, повернутых на $\pi/2$ вокруг оси y . Все ДНКМ демонстрируют ангармоничность жесткого типа, которая заключается в увеличении частоты с ростом амплитуды.

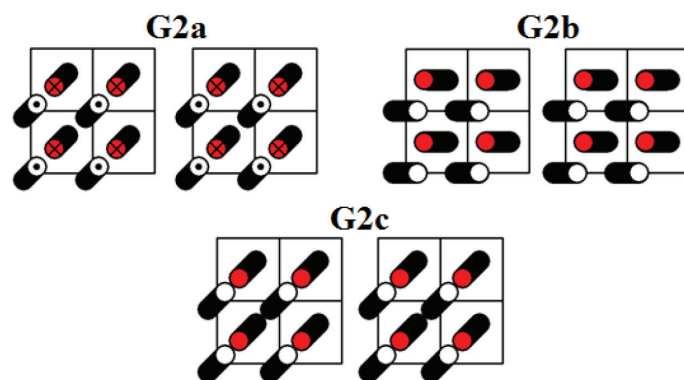


Рис. 3. Три ДНКМ группы G2

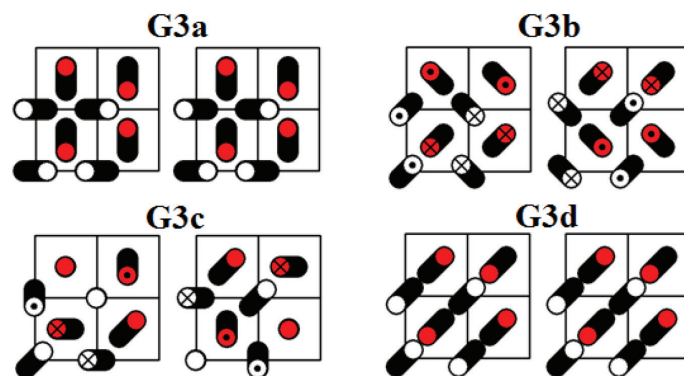


Рис. 4. Четыре ДНКМ группы G3

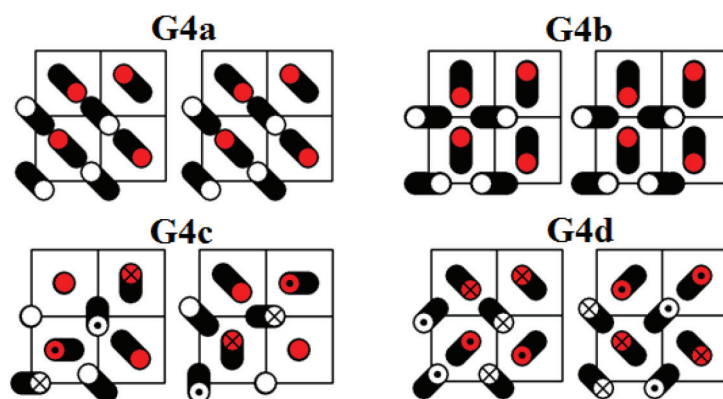


Рис. 5. Четыре ДНКМ группы G4

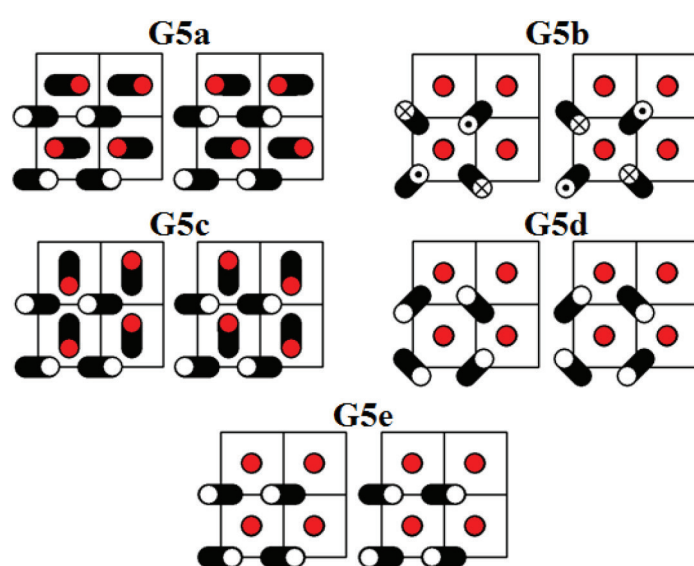


Рис. 6. Пять ДНКМ группы G5

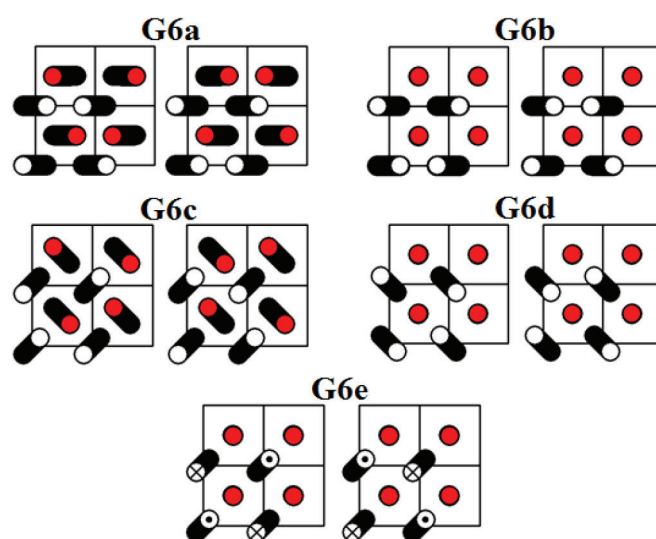


Рис. 7. Пять ДНКМ группы G6

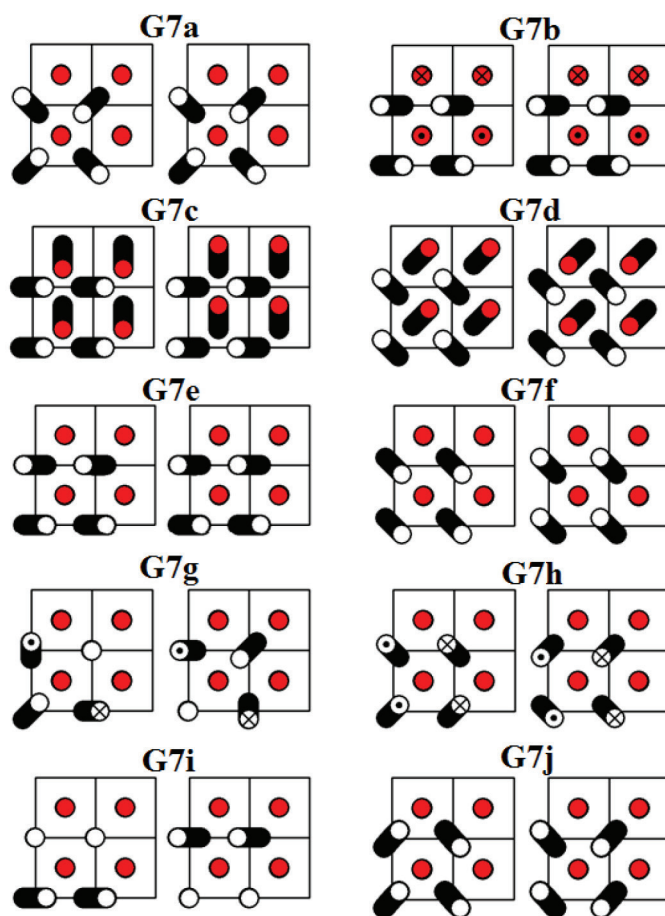


Рис. 8. Десять ДНКМ группы G7

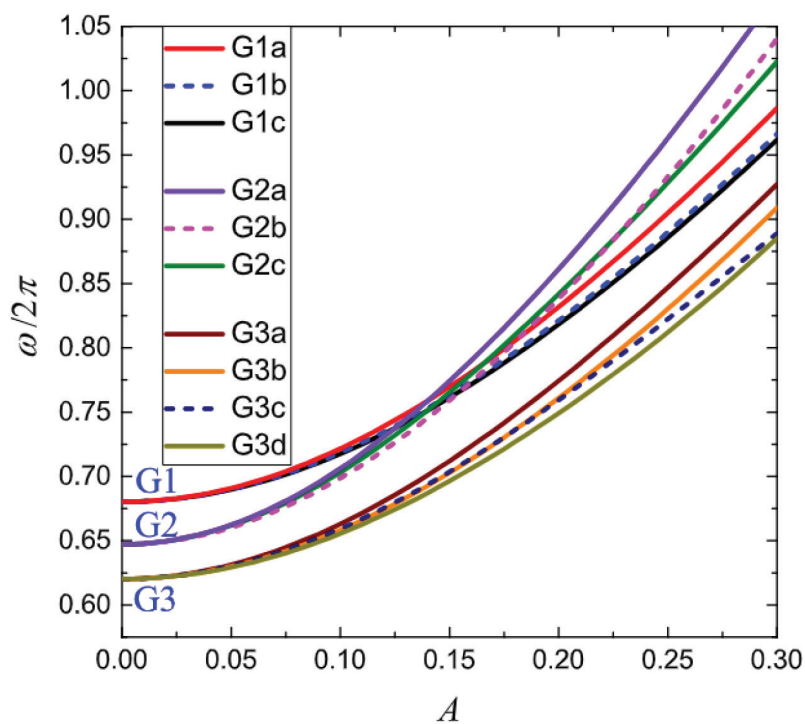


Рис. 9. Частотные характеристики ДНКМ групп G1, G2 и G3

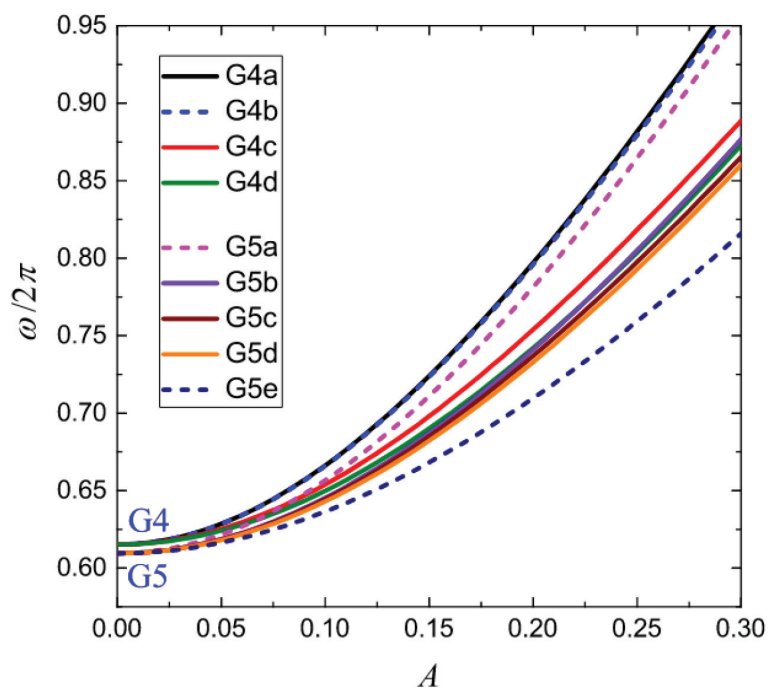


Рис. 10. Частотные характеристики ДНКМ групп G1, G2 и G3

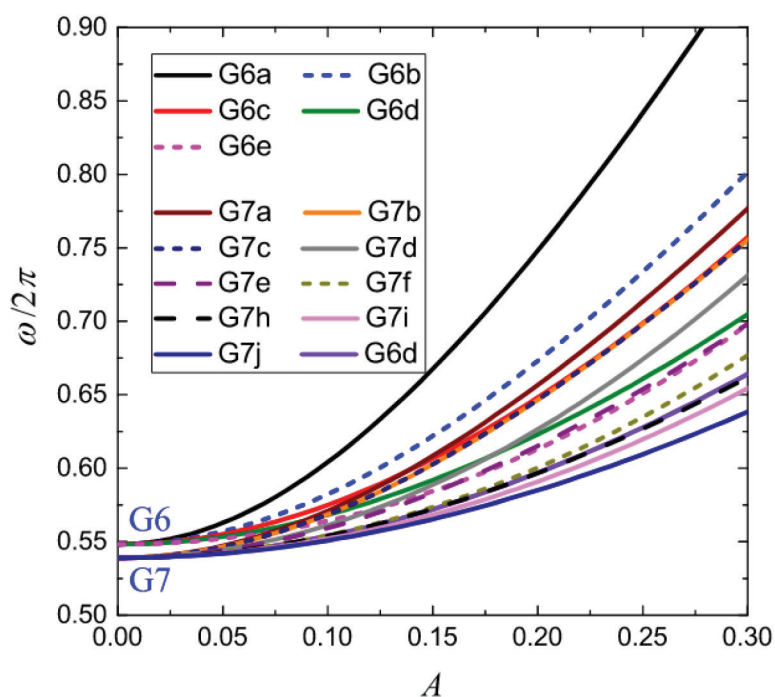


Рис. 11. Частотные характеристики ДНКМ групп G6 и G7

Заключение

Проанализированы точные решения уравнений движения решетки β -FPUT в виде ДНКМ с учетом дальнедействующих взаимодействий. Картины начальных смещений атомов для 34 исследованных ДНКМ показаны на рисунках 2–8. Атомы с такими

начальными смещениями и нулевыми начальными скоростями будут колебаться, сохраняя паттерн, независимо от используемого межатомного потенциала и при любой амплитуде A (при больших A может развиваться модуляционная неустойчивость ДНКМ). С другой стороны, частотная характеристика ДНКМ

зависит от межатомного потенциала. Частотные характеристики ДНКМ в широком диапазоне амплитуд колебаний были рассчитаны численно и построены на рисунках 9–11.

Частоты ДНКМ в малоамплитудном пределе были получены аналитически. ДНКМ делятся на семь групп в соответствии с их частотой в малоамплитудном пределе. ДНКМ, принадлежащие к одной группе, одинаково деформируют межатомные связи разной длины в гармоническом приближении, но когда в дело всту-

пает ангармоничность, потенциальные энергии, запасенные связями разной длины, становятся различными для ДНКМ одной группы.

Частотные характеристики ДНКМ, рассчитанные методом первопринципного моделирования, обеспечивают строгую проверку межатомных потенциалов. Исследуемые ДНКМ являются естественными нелинейными колебательными модами бислойной решетки, поэтому любой надежный межатомный потенциал должен воспроизводить частотный отклик ДНКМ.

Библиографический список

1. Chechin G., Ryabov D., Shcherbinin S. Large-Amplitude Periodic Atomic Vibrations in Diamond // *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2018. Vol. 3. No 01n02. P. 1850002.
2. Chechin G.M., Dzhelauhova G.S. Discrete Breathers and Nonlinear Normal Modes in Monoatomic Chains // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322. No 3. P. 490–512.
3. Chechin G., Bezuglova G. Resonant Excitation of the Bushes of Nonlinear Vibrational Modes in Monoatomic Chains // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 126. P. 107509.
4. Chechin G.M., Sizintsev D.A., Usoltsev O.A. Nonlinear Atomic Vibrations and Structural Phase Transitions in Strained Carbon Chains // *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 353–367.
5. Chechin G.M., Shcherbinin S.A. Delocalized Periodic Vibrations in Nonlinear LC and LCR Electrical Chains // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 22. No 1–3. P. 244–262.
6. Chechin G.M., Ryabov D.S. Stability of Nonlinear Normal Modes in the Fermi-Pasta-Ulam β Chain in the Thermodynamic Limit // *Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2012. Vol. 85. No 5. P. 056601.
7. Chechin G.M., Ryabov D.S., Zhukov K.G. Stability of Low-Dimensional Bushes of Vibrational Modes in the Fermi — Pasta — Ulam Chains // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 203. No 3–4. P. 121–166.
8. Kosevich Y.A. Charged Ultradiscrete Supersonic Kinks and Discrete Breathers in Nonlinear Molecular Chains with Realistic Interatomic Potentials and Electron-Phonon Interactions // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. Vol. 833. Vol. 1. P. 012021.
9. Archilla J.F.R., Kosevich Y.A., Jiménez N., Sánchez-Morcillo V J., García-Raffi L.M. Ultradiscrete Kinks with Supersonic Speed in a Layered Crystal with Realistic Potentials // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91. No 2. P. 022912.
10. Kosevich Y.A., Khomeriki R., Ruffo S. Supersonic Discrete Kink-Solitons and Sinusoidal Patterns with “Magic” Wave Number in Anharmonic Lattices // *Europhysics Letters*. 2004. Vol. 66. No 1. P. 21.
11. Bezuglova G.S., Chechin G.M., Goncharov P.P. Discrete Breathers on Symmetry-Determined Invariant Manifolds for Scalar Models on the Plane Square Lattice // *Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2011. Vol. 84. No 3. P. 036606.
12. Bachurina O.V., Kudreyko A.A. Two-Dimensional Discrete Breathers in Fcc Metals // *Computational Materials Science*. 2020. Vol. 182. P. 109737.
13. Bachurina O.V., Murzaev R.T., Bachurin D.V. Molecular Dynamics Study of Two-Dimensional Discrete Breather in Nickel // *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2019. Vol. 4. No 02. P. 1950001.
14. Bachurina O.V. Plane and Plane-Radial Discrete Breathers in Fcc Metals // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 27. No 5. P. 055001.
15. Bachurina O.V. Linear Discrete Breather in Fcc Metals // *Computational Materials Science*. 2019. Vol. 160. P. 217–221.
16. Bachurina O.V., Murzaev R.T., Shcherbinin S.A., et al. Delocalized Nonlinear Vibrational Modes in Ni_3Al // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2024. Vol. 132. P. 107890.
17. Cuevas J., Archilla J.F.R., Gaididei Y.B., Romero F.R. Moving Breathers in a DNA Model with Competing Short- and Long-Range Dispersive Interactions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 163. No 1–2. P. 106–126.
18. Kavitha L., Mohamadou A., Parasuraman E., et al. Modulational Instability and Nano-Scale Energy Localization in Ferromagnetic Spin Chain with Higher Order Dispersive Interactions // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2016. Vol. 404. P. 91–118.
19. Gorbach A.V., Flach S. Compactlike Discrete Breathers in Systems with Nonlinear and Nonlocal Dispersive Terms // *Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2005. Vol. 72. No 5. P. 056607.
20. Koukoulouyannis V., Kevrekidis P.G., Cuevas J., Rotos V. Multibreathers in Klein–Gordon Chains with Interactions beyond Nearest Neighbors // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 242. No 1. P. 16–29.
21. Gninzanlong C.L., Ndjomatchoua F.T., Tchawoua C. Forward and Backward Propagating Breathers in a DNA

Model with Dipole-Dipole Long-Range Interactions // *Physical Review E*. 2020. Vol. 102. No 5. P. 052212.

22. Christodoulidi H., Bountis A., Drossos L. The Effect of Long-Range Interactions on the Dynamics and Statistics of 1D Hamiltonian Lattices with On-Site Potential // *The European Physical Journal Special Topics*. 2018. Vol. 227. P. 563–573.

23. Bonart D. Intrinsic Localized Modes in Linear Chains with Coulomb Interaction // *Physics Letters A*. 1997. Vol. 231. No 3–4. P. 201–207.

24. Bonart D., Rössler T., Page J.B. Intrinsic Localized Modes in Complex Lattice Dynamical Systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 113. No 2–4. P. 123–128.

25. Kevrekidis P.G., Gaididei Y.B., Bishop A.R., Saxena A. Effects of Competing Short- and Long-Range Dispersive Interactions on Discrete Breathers // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64. No 66606. P. 1–8.

26. Bagchi D. Energy Transport in the Presence of Long-Range Interactions // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. No 4. P. 042121.

27. Iubini S., Di Cintio P., Lepri S., Livi R., Casetti L. Heat Transport in Oscillator Chains with Long-Range Interactions Coupled to Thermal Reservoirs // *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. No 3. P. 032102.

28. Xiong D., Dmitriev S.V. Slow Energy Relaxation in Anharmonic Chains with and without On-Site Potentials: Roles of Distinct Types of Discrete Breathers // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2024. P. 129902.

29. Wang J., Dmitriev S.V., Xiong D. Thermal Transport in Long-Range Interacting Fermi-Pasta-Ulam Chains // *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2. No 1. P. 013179.

30. Doi Y., Yoshimura K. Construction of Nonlinear Lattice with Potential Symmetry for Smooth Propagation of Discrete Breather // *Nonlinearity*. 2020. Vol. 33. No 10. P. 5142.

31. Yamaguchi Y.Y., Doi Y. Low-Frequency Discrete Breathers in Long-Range Systems without On-Site Potential // *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. No 6. P. 062218.

32. Chechin G.M., Sakhnenko V.P. Interactions between Normal Modes in Nonlinear Dynamical Systems with Discrete Symmetry. Exact Results // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 117. No 1–4. P. 43–76.

References

1. Chechin G., Ryabov D., Shcherbinin S. Large-Amplitude Periodic Atomic Vibrations in Diamond. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2018. Vol. 3. No 01n02. P. 1850002.

2. Chechin G.M., Dzhelauhova G.S. Discrete Breathers and Nonlinear Normal Modes in Monoatomic Chains. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322. No 3. P. 490–512.

3. Chechin G., Bezuglova G. Resonant Excitation of the Bushes of Nonlinear Vibrational Modes in Monoatomic Chains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 126. P. 107509.

4. Chechin G.M., Sizintsev D.A., Usoltsev O.A. Nonlinear Atomic Vibrations and Structural Phase Transitions in Strained Carbon Chains. *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 353–367.

5. Chechin G.M., Shcherbinin S.A. Delocalized Periodic Vibrations in Nonlinear LC and LCR Electrical Chains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 22. No 1–3. P. 244–262.

6. Chechin G.M., Ryabov D.S. Stability of Nonlinear Normal Modes in the Fermi-Pasta-Ulam β Chain in the Thermodynamic Limit. *Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2012. Vol. 85. No 5. P. 056601.

7. Chechin G.M., Ryabov D.S., Zhukov K.G. Stability of Low-Dimensional Bushes of Vibrational Modes in the Fermi-Pasta-Ulam Chains. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 203. No 3–4. P. 121–166.

8. Kosevich Y.A. Charged Ultradiscrete Supersonic Kinks and Discrete Breathers in Nonlinear Molecular Chains with Realistic Interatomic Potentials and Electron-Phonon Interactions. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. Vol. 833. Vol. 1. P. 012021.

9. Archilla J.F.R., Kosevich Y.A., Jiménez N., Sánchez-Morcillo V.J., García-Raffi L.M. Ultradiscrete Kinks with Supersonic Speed in a Layered Crystal with Realistic Potentials. *Physical Review E*. 2015. Vol. 91. No 2. P. 022912.

10. Kosevich Y.A., Khomeriki R., Ruffo S. Supersonic Discrete Kink-Solitons and Sinusoidal Patterns with “Magic” Wave Number in Anharmonic Lattices. *Europhysics Letters*. 2004. Vol. 66. No 1. P. 21.

11. Bezuglova G.S., Chechin G.M., Goncharov P.P. Discrete Breathers on Symmetry-Determined Invariant Manifolds for Scalar Models on the Plane Square Lattice. *Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2011. Vol. 84. No 3. P. 036606.

12. Bachurina O.V., Kudreyko A.A. Two-Dimensional Discrete Breathers in Fcc Metals. *Computational Materials Science*. 2020. Vol. 182. P. 109737.

13. Bachurina O.V., Murzaev R.T., Bachurin D.V. Molecular Dynamics Study of Two-Dimensional Discrete Breather in Nickel. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2019. Vol. 4. No 02. P. 1950001.

14. Bachurina O.V. Plane and Plane-Radial Discrete Breathers in Fcc Metals. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 27. No 5. P. 055001.

15. Bachurina O.V. Linear Discrete Breather in Fcc Metals. *Computational Materials Science*. 2019. Vol. 160. P. 217–221.

16. Bachurina O.V., Murzaev R.T., Shcherbinin S.A., et al., Delocalized Nonlinear Vibrational Modes in Ni_3Al . *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2024. Vol. 132. P. 107890.

17. Cuevas J., Archilla J.F.R., Gaididei Y.B., Romero F.R. Moving Breathers in a DNA Model with Competing Short-

and Long-Range Dispersive Interactions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 163. No 1–2. P. 106–126.

18. Kavitha L., Mohamadou A., Parasuraman E., et al. Modulational Instability and Nano-Scale Energy Localization in Ferromagnetic Spin Chain with Higher Order Dispersive Interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2016. Vol. 404. P. 91–118.

19. Gorbach A.V., Flach S. Compactlike Discrete Breathers in Systems with Nonlinear and Nonlocal Dispersive Terms. *Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2005. Vol. 72. No 5. P. 056607.

20. Koukoulouyannis V., Kevrekidis P.G., Cuevas J., Rothos V. Multibreathers in Klein–Gordon Chains with Interactions beyond Nearest Neighbors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 242. No 1. P. 16–29.

21. Gninzanlong C.L., Ndjomatchoua F.T., Tchawoua C. Forward and Backward Propagating Breathers in a DNA Model with Dipole-Dipole Long-Range Interactions. *Physical Review E*. 2020. Vol. 102. No 5. P. 052212.

22. Christodoulidi H., Bountis A., Drossos L. The Effect of Long-Range Interactions on the Dynamics and Statistics of 1D Hamiltonian Lattices with On-Site Potential. *The European Physical Journal Special Topics*. 2018. Vol. 227. P. 563–573.

23. Bonart D. Intrinsic Localized Modes in Linear Chains with Coulomb Interaction. *Physics Letters A*. 1997. Vol. 231. No 3–4. P. 201–207.

24. Bonart D., Rössler T., Page J. B. Intrinsic Localized Modes in Complex Lattice Dynamical Systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 113. No 2–4. P. 123–128.

25. Kevrekidis P.G., Gaididei Y.B., Bishop A.R., Saxena A. Effects of Competing Short- and Long-Range Dispersive Interactions on Discrete Breathers. *Physical Review E*. 2001. Vol. 64. No 66606. P. 1–8.

26. Bagchi D. Energy Transport in the Presence of Long-Range Interactions. *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. No 4. P. 042121.

27. Iubini S., Di Cintio P., Lepri S., Livi R., Casetti L. Heat Transport in Oscillator Chains with Long-Range Interactions Coupled to Thermal Reservoirs. *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. No 3. P. 032102.

28. Xiong D., Dmitriev S.V. Slow Energy Relaxation in Anharmonic Chains with and without On-Site Potentials: Roles of Distinct Types of Discrete Breathers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2024. P. 129902.

29. Wang J., Dmitriev S.V., Xiong D. Thermal Transport in Long-Range Interacting Fermi–Pasta–Ulam Chains. *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2. No 1. P. 013179.

30. Doi Y., Yoshimura K. Construction of Nonlinear Lattice with Potential Symmetry for Smooth Propagation of Discrete Breather. *Nonlinearity*. 2020. Vol. 33. No 10. P. 5142.

31. Yamaguchi Y.Y., Doi Y. Low-Frequency Discrete Breathers in Long-Range Systems without On-Site Potential. *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. No 6. P. 062218.

32. Chechin G.M., Sakhnenko V.P. Interactions between Normal Modes in Nonlinear Dynamical Systems with Discrete Symmetry. Exact Results. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 117. No 1–4. P. 43–76.

Сведения об авторах

Д.С. Рябов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;

И.В. Косарев, аспирант, инженер-исследователь, Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН; инженер-исследователь, Научно-исследовательская лаборатория «Металлы и сплавы при экстремальных воздействиях», Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

Д.У. Абдуллина, аспирант, младший научный сотрудник, Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа, Россия;

С.В. Дмитриев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Нелинейная динамика молекул и кристаллов, Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН; главный научный сотрудник, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия.

Information about the authors

D.S. Ryabov, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Theoretical and Computational Physics, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia;

I.V. Kosarev, Postgraduate Student, Research Engineer, Institute of Molecular and Crystal Physics UFRC RAS; Research Engineer at the Research Laboratory of ‘Metals and Alloys under Extreme Effects’, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;

D.U. Abdullina, Postgraduate Student, Junior Researcher, Institute of Molecular and Crystal Physics UFRC RAS, Ufa, Russia;

S.V. Dmitriev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Laboratory Nonlinear Dynamics of Molecules and Crystals, Institute of Molecular and Crystal Physics UFRC RAS; Chief Researcher, Institute of Metals Superplasticity Problems, RAS, Ufa, Russia.