

Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 35–40.
Izvestiya of Altai State University. 2025. No 1 (141). P. 35–40.

Научная статья

УДК 519.6+532.5

DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-04

**Моделирование течения тонкого слоя жидкости
по наклонной подложке на основе уравнений
Навье — Стокса в случае больших чисел Рейнольдса**

Екатерина Валерьевна Ласковец

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
katerezanova@mail.ru

Original article

**Modeling of Thin Liquid Layer Flow on an Inclined Substrate
Based on the Navier — Stokes Equations in the Case of Large
Reynolds Numbers**

Ekaterina V. Laskovets

Altai State University, Barnaul, Russia, katerezanova@mail.ru

Аннотация. Построена математическая модель для изучения течения тонкого слоя жидкости по наклоненной неравномерно нагретой подложке. В качестве основных уравнений выбраны система уравнений Навье — Стокса и переноса тепла и соотношения, представляющие собой обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия на границе с учетом массопереноса. Рассматривается постановка задачи для случая больших чисел Рейнольдса. Длинноволновое приближение позволяет получить аналитические решения для главных членов разложения по степеням малого параметра задачи. Проведен параметрический анализ, позволяющий выявить факторы, влияющие на характер течения наибольшим образом. Получено эволюционное уравнение для определения положения границы раздела сред. Построен алгоритм численного решения для задачи о периодическом стекании жидкости по наклонной твердой подложке. Численная схема решена с помощью метода прогонки и прогонки с параметром. Изучено влияние угла наклона твердой подложки на течение жидкого слоя.

Ключевые слова: тонкий слой, обобщенные условия, параметрический анализ, эволюционное уравнение, численный алгоритм

Для цитирования: Ласковец Е.В. Моделирование течения тонкого слоя жидкости по наклонной подложке на основе уравнений Навье — Стокса в случае больших чисел Рейнольдса // Известия Алтайского государственного университета. 2025. № 1 (141). С. 35–40. DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-04

Abstract. The paper deals with the mathematical model constructed to study the flow of a thin liquid layer on an inclined, unevenly heated solid substrate. The system of Navier — Stokes and heat transfer equations representing the generalized kinematic, dynamic, and energy conditions at the boundary, including mass transfer, are selected as the governing equations. The paper considers a two-dimensional formulation of the problem at large Reynolds numbers. The long-wave approximation allows one to obtain analytical solutions for the main terms of the expansion in powers of the small parameter of the problem. The conducted parametric analysis helps identify the factors that influence the nature of the flow the most. Then, the evolution equation to determine the position of the liquid-gas interface is obtained. The presented developed algorithm is capable to solve numerically the problem of periodic liquid flow down an inclined solid substrate. The solution is obtained using the sweeping and parameter sweeping methods. The influence of solid substrate inclination angle on the liquid layer flow is investigated.

Keywords: thin layer, generalized conditions, parametric analysis, evolution equation, numerical algorithm

For citation: Laskovets E.V. Modeling of Thin Liquid Layer Flow on an Inclined Substrate Based on the Navier — Stokes Equations in the Case of Large Reynolds Numbers. *Izvestiya of Altai State University*. 2025. No 1 (141). P. 35–40. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2025)1-04

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (2024-26) (гос. задание FZMW-2024-0003).

Funding: the work was supported by the State Assignment of the Russian Ministry of Science and Higher Education entitled «Modern models of hydro-dynamics for environmental management, industrial systems and polar mechanics» (2024-26) (Govt. contract code: FZMW-2024-0003).

Введение

Теоретическое изучение динамики процессов течения тонких слоев жидкостей связано с их широкой применимостью в наукоемкой промышленности. Часто подобные течения сопровождаются газовыми потоками, оказывающими влияние на характеристики жидких слоев. Изучению таких процессов посвящен ряд экспериментальных работ (см., например, [1, 2]).

Важным вопросом при изучении течений с границами раздела является формулировка условий на этих границах. Характеристики жидких слоев зависят от большого количества эффектов, что затрудняет математическое моделирование процессов. В работах [3–6] моделируются испаряющиеся пленки. В работе [7] для получения граничных условий были применены интегральные законы сохранения без предположения о неразрывности касательных скоростей и температуры. Аналогичные условия независимо выведены в [8] в предположении о диффузионном потоке пара на границе раздела. Часто для моделирования тонких слоев жидкостей используются уравнения Навье — Стокса [9, 10]. В приведенных работах моделирование осуществлялось для случая умеренных чисел Рейнольдса порядка $O(1)$.

В настоящей работе рассматривается одностронняя математическая модель, описывающая течение тонкого слоя жидкости с учетом массопереноса на границе раздела. Также принимаются во внимание действие дополнительных касательных напряжений со стороны сопутствующего потока газа, гравитационные силы, капиллярный и термокапиллярный эффекты. Моделирование основано на уравнениях Навье — Стокса и переноса тепла, а также обобщенных условий на границе раздела. Рассматривается случай больших чисел Рейнольдса.

1. Математическая модель течения тонкого слоя жидкости

Рассмотрим процесс стекания жидкого слоя по твердой непроницаемой подложке, наклоненной под углом α к линии горизонта. Движение сопровождается спутным потоком газа и испарением жидкости на деформируемой термокапиллярной границе раздела. Динамические процессы в газовой среде при этом не учитываются, однако касательные напряжения, возникающие под действием газового потока, могут влиять на структуру

течения. Система координат выбрана следующим образом: ось Ox направлена вдоль твердой нижней границы, заданной уравнением $z = 0$, положение границы раздела определяется соотношением $z = h(x, t)$. Вектор силы тяжести $\mathbf{g}$ имеет следующий вид: $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$, $g = |\mathbf{g}|$.

В рассматриваемом процессе характерная амплитуда деформации поверхности раздела существенно меньше длины деформации. Таким образом при математическом моделировании течения следует задавать два масштаба длины: l — продольную характерную длину и d — поперечную характерную длину. При этом выполняется соотношение $l \gg d$. Таким образом, может быть введен малый параметр задачи $\varepsilon = d/l$.

В качестве математической модели рассматриваемого процесса используются система Навье — Стокса и уравнение переноса тепла. В безразмерном виде модель может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Re} \varepsilon^2 (u_t + uu_x + wu_z) - \varepsilon^2 u_{xx} = \\ = u_{zz} - \text{Re} \varepsilon^2 p_x + \frac{\gamma}{\text{Re} \varepsilon} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \varepsilon^4 (w_t + uw_x + ww_z) - \varepsilon^4 w_{xx} - \varepsilon^2 w_{zz} = \\ = -\text{Re} \varepsilon^2 p_z - \frac{\gamma}{\text{Re}} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_x + w_z = 0, \quad (3)$$

$$\text{Re} \text{Pr} \varepsilon^2 (T_t + uT_x + wT_z) - \varepsilon^2 T_{xx} = T_{zz}, \quad (4)$$

где $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости жидкости, p — давление, T — температура, ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, соответственно, ρ — плотность жидкости, $\text{Re} = u_* l / \nu$ — число Рейнольдса, $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля, $\gamma = g d^3 / \nu^2$ — число Галилея. Также отметим, что характерные продольная и поперечная скорости u_* и w_* связаны между собой с помощью ε : $w_* = \varepsilon u_*$. Характерное время процесса t_* должно удовлетворять соотношению: $l = u_* t_*$. Характерное давление в данной постановке выбрано следующим образом: $p_* = \rho u_*^2$. Пусть характерная продольная скорость в системе определяется как $u_* = \nu / d$. Тогда число Рейнольдса имеет порядок $O(1/\varepsilon)$, т.е. дальнейшее моделирование будет осуществляться для случая больших чисел Рейнольдса.

Вектор нормали $\mathbf{n}$ и касательный вектор $\mathbf{s}$ к границе $z = h(x, t)$ имеют координаты (n_1, n_2) и $(n_2, -n_1)$, соответственно $(n_1 = -\varepsilon h_x / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}, n_2 = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2})$. Кривизна свободной границы и скорость ее перемещения по направлению внешней нормали имеют вид:

$$2H = \varepsilon h_{xx} / \sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}, \quad D_n = -\varepsilon h_t / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}.$$

На границе $z = h(x, t)$ кинематическое условие в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$-\varepsilon(h_t + h_x u - w) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} = J_{ev} \bar{J}. \quad (5)$$

Здесь J_{ev} — величина локального потока массы пара, определяемая с помощью уравнения Герца — Кнудсена (см. [4]):

$$J_{ev} = \alpha_J T|_{z=h(x,t)}. \quad (6)$$

Коэффициент α_J определяется следующим образом:

$$\alpha_J = \alpha \rho_s \lambda_U \frac{T_*}{J_*} \left(\frac{M}{2\pi R_g T_s} \right)^{1/2}$$

(см. [4, 11]). Здесь введены следующие обозначения: α — коэффициент аккомодации, M — молекулярный вес, ρ_s — плотность пара, R_g — универсальная газовая постоянная, T_s — температура насыщенного пара, λ_U — скрытая теплота парообразования.

Проекция динамического условия на касательный вектор и нормаль в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] = \\ = -p^g + \frac{\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{v}}{\bar{h}} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x^g + w_z^g - \varepsilon h_x(u_z^g + \\ + w_x^g)] + \left(1 - \frac{1}{\bar{\rho}}\right) J_{ev}^2 \bar{J}^2 + \sigma \frac{\varepsilon^2}{\text{Ca}} \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \left[-\varepsilon^2 h_x u_x + \varepsilon^2 h_x w_z - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 h_x) \cdot \right. \\ \left. \cdot (u_z + \varepsilon^2 w_x) \right] - \frac{\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{v}}{\bar{h}} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \cdot \\ \cdot \left[-\varepsilon h_x u_x^g + \varepsilon h_x w_z^g + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_z^g + w_x^g) \right] = \\ = -\frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (T_x + h_x T_z). \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{v} = u_x^g / u_*$, u_x^g — характерная продольная скорость газа, T_* — характерный перепад температуры, $\bar{\nu}$ и $\bar{\rho}$ — отношение коэффициентов кинематической вязкости и плотностей газа и жидкости соответственно, $\bar{h}$ — отношение характерного размера слоя газа к l , p^g — давление в газе, $\text{Ma} = \sigma_T T_* l / (\rho \nu \chi)$ — число Марангони, $\text{Ca} =$

$u_* \rho \nu / \sigma_0$ — капиллярное число, $\bar{J} = J_{ev}^* / (\rho u_*)$, $J_{ev}^* = \kappa T_* / (d \lambda_U)$ — характерная величина потока массы пара, κ — коэффициент теплопроводности жидкости. В данной работе предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры: $\sigma = 1 - \alpha_\sigma T$, где $\alpha_\sigma = \text{Ma} \text{Ca} \varepsilon / \text{Pr}$, σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения при некотором относительном значении температуры, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения.

Энергетическое условие в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} + \beta_2 \{T \text{div}_\Gamma \mathbf{v}\} = \beta_3 \bar{J} J_{ev} + \beta_4 \bar{J} J_{ev} \left\{ -p + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \beta_5 \bar{J}^3 J_{ev}^3 + \beta_6 \bar{J} \varepsilon \sigma \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}} J_{ev}. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\partial T}{\partial n}$ и $\text{div}_\Gamma \mathbf{v}$ вычисляются согласно формулам

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (-\varepsilon^2 h_x T_x + T_z),$$

$$\begin{aligned} \text{div}_\Gamma \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 n_i (\mathbf{n} \cdot \nabla v_i) = (u_x + w_z)|_\Gamma - \\ - \left\{ \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_x - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_z - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_x + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_z \right\}. \end{aligned}$$

Введенные здесь безразмерные комплексы имеют следующий вид: $\beta_2 = \text{Ma} \varepsilon^2 / (\text{Pr} E \bar{U})$, $\beta_3 = 1/E$, $\beta_4 = (1/\bar{\rho} - 1)/(E \bar{U})$, $\beta_5 = (1 - 1/\bar{\rho})^2/(E \bar{U})$, $\beta_6 = (1 - 1/\bar{\rho})\varepsilon/(\text{Ca} E \bar{U})$, $\bar{U} = \lambda_U / u_*$, $E = \kappa T_* / (\lambda_U \rho \nu)$ — параметр испарения [3, 8, 12].

На твердой подложке $z = 0$ выполняются условия прилипания (равенство нулю функций u и w) и задано распределение температуры:

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x, t). \quad (10)$$

Компоненты вектора скорости u , w , температура T , давление p и функция, определяющая положение термокапиллярной границы, h могут быть найдены в длинноволновом приближении. Решение ищется в виде разложений по степеням малого параметра задачи ε . Система уравнений (1)–(4), записанная только для главных членов разложения, имеет вид:

$$u_{zz}^0 = -\gamma \sin \alpha, \quad p_z^0 = -\gamma \cos \alpha, \quad (11)$$

$$u_x^0 = -w_z^0, \quad T_{zz}^0 = 0. \quad (12)$$

Для проведения параметрического анализа задачи должны быть определены значения всех безразмерных комплексов задачи. В формулах 7 и 8 формируются следующие параметры: $\alpha_{Ca} = \varepsilon^2/\text{Ca}$ имеет порядок $10^4\varepsilon^2$, $\alpha_D = ((1/\bar{\rho}) - 1)\bar{J}^2$ — порядок 10^{-1} , $\alpha_\tau = \bar{\rho}\bar{\nu}\varepsilon/\bar{h}$ — порядок $10^{-2}\varepsilon$, $\alpha_{Ma} = \varepsilon^2\text{Ma}/\text{Pr}$ — порядок $10^3\varepsilon^2$, α_σ — порядок $10^{-1}\varepsilon$ (в качестве жидкости выбран этанол, в качестве газа — азот). Характерный перепад температуры T_* выбран 10 K (см. также работы [11, 13]). Тогда следствия условия 7 и 8 для главных членов разложения принимают вид

$$p^0 = p^g - \alpha_{Ca}h_{xx}(1 - \alpha_\sigma\Theta^0) + \alpha_D\alpha_J^2(\Theta^0)^2, \\ u_z^0 = \alpha_{Ma}\tilde{\Theta}.$$

Энергетическое условие в ходе параметрического анализа в длинноволновом приближении записывается следующим образом:

$$-T_z^0 + \beta_2\{\Theta^0(u_x^0)\} = \bar{\beta}_3J_0 - \bar{\beta}_4p^0J_0 + \bar{\beta}_6h_{xx}J_0.$$

Здесь $\Theta^0 = T^0|_\Gamma$, $\tilde{\Theta} = (T_x^0 + h_xT_z^0)|_\Gamma$, $J_0 = \alpha_J\Theta^0$. Параметр β_2 имеет порядок $10^5\varepsilon^2$, $\bar{\beta}_3 = \beta_3\bar{J}$ — порядок 1, $\bar{\beta}_4 = \beta_4E$ — порядок 10^{-1} , $\bar{\beta}_5 = \beta_5\bar{J}^3$ — порядок 10^{-3} , $\bar{\beta}_6 = \varepsilon\beta_6E$ — порядок $-10^3\varepsilon^2$. Параметр α_J есть величина порядка 10.

Длинноволновые приближения искомых функций u^0, w^0, p^0, T^0 могут быть найдены в ходе интегрирования уравнений (11)–(12):

$$u^0 = -\gamma \sin \alpha \frac{z^2}{2} + C_1z, \quad w^0 = -(C_1)_x \frac{z^2}{2}, \quad (13)$$

$$p^0 = -\gamma \cos \alpha z + C_0(x, t), \quad (14)$$

$$T^0 = A(x, t)z + \Theta_0(x, t). \quad (15)$$

Коэффициенты $C_0(x, t)$, $C_1(x, t)$, $A(x, t)$ удовлетворяют следующим формулам:

$$C_0(x, t) = p^g - \alpha_{Ca}h_{xx}(1 - \alpha_\sigma(Ah + \Theta_0)) + \gamma \cos \alpha h + \\ + \alpha_D\alpha_J^2(Ah + \Theta_0)^2,$$

$$C_1(x, t) = \alpha_{Ma}(A_xh + (\Theta_0)_x + h_xA) + \gamma \sin \alpha h,$$

$$A(x, t) = \frac{[-\beta_2(C_1)_xh + \alpha_J(\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_6h_{xx})]\Theta_0}{\beta_2(C_1)_xh^2 + 1 - \alpha_Jh(\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_6h_{xx})}.$$

Таким образом, с учетом кинематического условия (5) и формул (13) может быть получено уравнение для определения положения границы раздела сред:

$$h_t + h_x \left\{ -\gamma \sin \alpha \frac{h^2}{2} + C_1h + (C_1)_x \frac{h^2}{2} \right\} + EJ_{ev} = 0, \\ J_{ev} = \alpha_J[A(x, t)h + \Theta_0(x, t)]. \quad (16)$$

Для замыкания постановки задачи необходимо определить начальное положение термокапиллярной границы $h(x, 0) = h_0(x)$ и условия на бесконечности.

2. Численное моделирование процесса

В рамках построения численного алгоритма исследования процесса стекания тонкого слоя жидкости рассмотрим периодическую задачу об определении толщины жидкого слоя h , удовлетворяющей уравнению (16) на некотором заданном промежутке $[-L; L]$. В качестве периодических условий на границах $x = \pm L$ рассматриваемой области выбраны следующие соотношения: $h|_{x=-L} = h|_{x=L}$ и $h_x|_{x=-L} = h_x|_{x=L}$. Начальное положение термокапиллярной границы задается формулой $h_0(x) = 1 - \delta_0 \cos kx$. Нагрев твердой подложки определяется с помощью некоторой заданной функции $\Theta_0(x, t)$.

С учетом соотношения, определяющего функцию $C_1(x, t)$, уравнение (16) может быть записано в следующем виде:

$$h_t + A_2h_{xx} + A_1h_x + A_0h + D = 0. \quad (17)$$

Коэффициенты A_2, A_1, A_0, D представляют собой функции, зависящие от A, h, Θ_0 и их производных (см. [13]).

Численное решение уравнения (17) проводится с помощью неявной конечно-разностной схемы:

$$\frac{h^{k+1} - h^k}{\tau} + A_2^kh_{xx}^{k+1} + A_1^kh_x^{k+1} + A_0^kh^{k+1} + D^k = 0. \quad (18)$$

Для реализации схемы (18) должна быть введена равномерная разностная сетка по продольной переменной: $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$, $x_n = -L + (n-1)\Delta x$, $n = 1, 2, \dots, N+1$, с шагом $\Delta x = 2L/N$. Для производных по x в формуле (18) используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации.

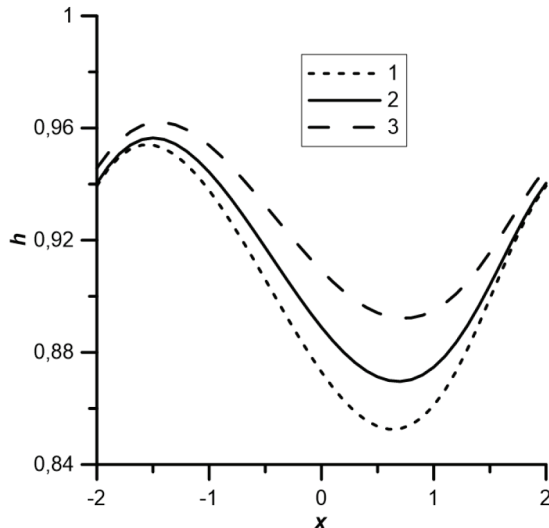
Схема (18) может быть записана в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_1^kh_1^{k+1} + c_1^kh_2^{k+1} = d_1^k, \quad n = 1;$$

$$a_n^kh_{n-1}^{k+1} + b_n^kh_n^{k+1} + c_n^kh_{n+1}^{k+1} = d_n^k, \quad n = 2, 3, \dots, N;$$

$$a_{N+1}^kh_N^{k+1} + b_{N+1}^kh_{N+1}^{k+1} = d_{N+1}^k, \quad n = N+1. \quad (19)$$

Здесь коэффициенты $a_n^k, b_n^k, c_n^k, d_n^k$ зависят от A_2, A_1, A_0, D . Периодические условия на торцах $x = \pm L$ также аппроксимируются со вторым порядком по переменной x (см. [14]). Дальнейшее решение задачи сводится к решению системы (19) с помощью метода трехточечной прогонки и прогонки с параметром. Поиск значений толщины жидкого слоя h_n осуществляется в следующем виде: $h_n = \alpha_n h_{n+1} + \beta_n h_N + \gamma_n$.



Зависимость положения границы раздела от угла наклона твердой подложки:

1 — $\alpha = \pi/8$, 2 — $\alpha = \pi/6$, 3 — $\alpha = \pi/4$

В роли неизвестного параметра задачи выступает значение h . Обратный ход прогонки реализуется с помощью соотношения $h_n = \tilde{\alpha}_n h_{n+1} + \tilde{\beta}_n$.

На рисунке представлены результаты численного исследования зависимости динамики тонко-

го слоя этанола, сопровождаемого потоком азота, от угла наклона подложки. Физико-химические параметры рассматриваемых веществ приведены в работах [11, 13]. С увеличением значений α наблюдается снижение толщины слоя жидкости. Данное явление возникает, возможно, вследствие увеличения скорости жидкости с ростом угла наклона подложки и, следовательно, более слабым прогревом среды. При этом сохраняется характер течения, наличие локальных экстремумов.

Заключение

Представленная математическая модель позволяет изучать различные физические и геометрические параметры задачи на характер течения тонких слоев жидкости. В ходе параметрического анализа задачи могут быть определены эффекты, оказывающие наибольшее влияние на изучаемые процессы. В рамках представленной работы построены аналитические решения для главных членов разложения искомых функций по степеням малого параметра задачи, получено эволюционное уравнение для нахождения толщины жидкого слоя. С помощью предложенной численной схемы для решения эволюционного уравнения изучено влияние угла наклона твердой подложки на характер периодического стекания жидкости.

Библиографический список

1. Kabov O.A., Zaitsev D.V., Cheverda V.V. Evaporation and Flow Dynamics of Thin, Shear-driven Liquid Films // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011. Vol. 35. No 5. P. 825–831. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.001
2. Реутов В.П., Езерский А.Б., Рыбушкина Г.В., Чернов В.В. Конвективные структуры в тонком слое испаряющейся жидкости, обдуваемого воздушным потоком // *Прикладная механика и техническая физика*. 2007. Т. 48. № 4. С. 3–14.
3. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Longscale Evolution of Thin Liquid Films // *Reviews of Modern Physics*. 1997. Vol. 69. No 3. P. 931–980. DOI: 10.1103/RevModPhys.69.931
4. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-wave Instabilities of Nonuniformly Heated Falling Films // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 453. P. 153–175. DOI: 10.1017/S0022112001006814
5. Кабов О.А., Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // *Доклады академии наук*. 2007. Т. 446. № 5. С. 522–526.
6. Kuznetsov V.V., Fominykh E.Yu. Evaporation of a Liquid Film in a Microchannel Under the Action of a Co-current Dry Gas Flow // *Microgravity Science and Technology*. 2020. Vol. 32. P. 245–258. DOI: 10.1007/s12217-019-09765-z
7. Das K.S., Ward C.A. Surface Thermal Capacity and its Effects on the Boundary Conditions at Fluid-fluid Interface // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75. P. 065303-1–065303-4. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.065303
8. Кузнецов В.В. Тепломассообмен на поверхности раздела жидкость — пар // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2011. № 5. С. 97–107.
9. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Математическая модель течений тонкого слоя жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела // *Известия Алтайского государственного университета*. 2014. № 81 (1/2). С. 21–25. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.2-02
10. Laskovets E.V. Numerical Modeling of an Inclined Thin Liquid Layer Flow Based on Generalized Boundary Conditions // *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 267. No 4. P. 501–510. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06155-6>
11. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // *Известия Алтайского государственного университета*. 2012. № 73 (1/2). С. 12–18.
12. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. № 2. С. 219–260.
13. Laskovets E.V. Numerical Simulation of Convective Flows in a Thin Liquid Layer at Large Reynolds Numbers // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024. Vol. 64. No 6. P. 1342–1352. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554252470056>
14. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 91 с.

References

1. Kabov O.A., Zaitsev D.V., Cheverda V.V. Evaporation and Flow Dynamics of Thin, Shear-driven Liquid Films. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011. Vol. 35. No 5. P. 825–831. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.001
2. Reutov V.P., Ezersky A.B., Rybushkina G.V., Chernov V.V. Convective Structures in a Thin Layer of Evaporating Liquid Blown by an Air Flow. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007. Vol. 48. No 4. P. 3–14. (In Russ.).
3. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale Evolution of Thin Liquid Films. *Reviews of Modern Physics*. 1997. Vol. 69. No 3. P. 931–980. DOI: 10.1103/RevModPhys.69.931
4. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-wave Instabilities of Non-uniformly Heated Falling Films. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 453. P. 153–175. DOI: 10.1017/S0022112001006814
5. Kabov O.A., Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V. Evaporation of a Non-isothermal Liquid Film in a Microchannel With a Co-current Gas Flow. *Reports of the Academy of Sciences*. 2007. Vol. 446. No 5. P. 522–526. (In Russ.).
6. Kuznetsov V.V., Fominykh E.Yu. Evaporation of a Liquid Film in a Microchannel Under the Action of a Co-current Dry Gas Flow. *Microgravity Science and Technology*. 2020. Vol. 32. P. 245–258. DOI: 10.1007/s12217-019-09765-z
7. Das K.S., Ward C.A. Surface Thermal Capacity and its Effects on the Boundary Conditions at Fluid-fluid Interface. *Physical Review E*. 2007. Vol. 75. P. 065303-1–065303-4. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.065303.
8. Kuznetsov V.V. Heat and Mass Transfer at the Liquid-vapor Interface. *News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Liquid and Gas*. 2011. No 5. P. 97–107. (In Russ.).
9. Goncharova O.N., Rezanova E.V. A Mathematical Model of Thin Liquid Layer Flows with Evaporation on a Thermocapillary Interface. *Izvestiya of Altai State University*. 2014. No 81 (1/2). P. 21–25. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.2-02.
10. Laskovets E.V. Numerical Modeling of an Inclined Thin Liquid Layer Flow Based on Generalized Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 267. No 4. P. 501–510. DOI: 10.1007/s10958-022-06155-6.
11. Goncharova O.N. Modeling of Flows Under Conditions of Heat and Mass Transfer at the Interface. *Izvestiya of Altai State University*. 2012. No 73 (1/2). P. 12–18. (In Russ.).
12. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Problems of Evaporative Convection (Review). *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 82. No 2. P. 219–260. (In Russ.).
13. Laskovets E.V. Numerical Simulation of Convective Flows in a Thin Liquid Layer at Large Reynolds Numbers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024. Vol. 64. No 6. P. 1342–1352. DOI: 10.1134/S096554252470056.
14. Samarsky A.A. *Methods for Solving Grid Equations*. M.: Nauka, 1978. 591 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Е.В. Ласковец, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the author

E.V. Laskovets, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Computer Science, Altai State University, Barnaul, Russia.