УДК 514.76

# Паракэлеровы и параэрмитовы структуры на шестимерных неразрешимых алгебрах Ли

*Н.К. Смоленцев, А.Ю. Соколова*

Кемеровский государственный университет (Кемерово, Россия)

# Para-Kahler and Para-Hermitian Structures on Six-Dimensional Unsolvable Lie Algebras

*N.K. Smolentsev, A.Yu. Sokolova*

Kemerovo State University (Kemerovo, Russia)

В представленной работе исследован вопрос о существовании паракэлеровых и параэрмитовых структур на шестимерных неразрешимых алгебрах Ли, являющихся полупрямыми произведениями. В соответствии с классификационными результатами существует четыре алгебры Ли, которые являются полупрямыми произведениями алгебр Ли $so(3)$, $sl(2, \mathbf{R})$ и трех разрешимых алгебр Ли $A_{3.1}=\mathbf{R}^3$, $A_{3.3}$ и $A_{3.5}$. В работе показано, что только на $A_{3.5}\ltimes sl(2, \mathbf{R})$ существует симплектическая структура и она допускает паракэлерову структуру нулевой кривизны Риччи. Представлен способ для нахождения других паракэлеровых структур, основанный на деформациях некоторой начальной паракэлеровой структуры. Вычислены характеристики кривизны. Другие алгебры Ли допускают параэрмитовы структуры, т.е. интегрируемые паракомплексные структуры, согласованные с естественной невырожденной 2-формой. Из результатов работы следует, что шестимерная симплектическая алгебра Ли $\mathbf{g}$ должна быть разрешимой за исключением одного случая, когда $\mathbf{g}=A_{3.5}\ltimes sl(2, \mathbf{R})$, что дополняет известный результат Chu Bon-Yao о том, что четырехмерная симплектическая алгебра Ли должна быть разрешимой.

***Ключевые слова:*** шестимерные неразрешимые группы Ли, паракомплексные структуры, симплектические алгебры Ли.

In this paper, we investigate into the matter of the existence of para-Kählerian and para-Hermitian structures on six-dimensional unsolvable Lie algebras that are semidirect products. According to the classification results, there are four Lie algebras that are semidirect products of the Lie algebras $so(3)$, $sl(2, \mathbf{R})$ and three soluble Lie algebras $A_{3.1}=\mathbf{R}^3$, $A_{3.3}$ and $A_{3.5}$. We show that only $\mathbf{g}=A_{3.5}\ltimes sl(2, \mathbf{R})$ has a symplectic structure, and it admits a para-Kählerian structure of zero Ricci curvature. The paper presents calculated curvature characteristics and the method to find other para-Kähler structures based on deformations of some initial para-Kähler structure. Other Lie algebras admit para-Hermitian structures, i.e. integrable paracomplex structures consistent with the natural non-degenerate 2-form. It follows from the results of the paper that the sixdimensional symplectic Lie algebra must be solvable except for one case when $\mathbf{g}=A_{3.5}\ltimes sl(2, \mathbf{R})$. It complements the well-known result of Chu Bon-Yao that a four-dimensional symplectic Lie algebra must be solvable.

***Keywords:*** six-dimensional unsolvable Lie groups, paracomplex structures, symplectic Lie algebras.

**DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-15**

**Введение**

Геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях являются классическими объектами изучения. Наиболее известными и изученными являются римановы, комплексные и симплектические структуры, которые широко используются в математике, механике и физике [1]. В последнее время наблюдается значительный интерес к паракомплексным структурам, согласованным с симплектическими [2]. Такие структуры называются паракэлеровыми. Наиболее полное исследование можно получить в случае левоинвариантных структур на группах Ли [2, 3, 4]. Это позволяет все вычисления производить на алгебре Ли группы Ли. В настоящее время вопрос о симплектических и паракэлеровых структурах на группах Ли до конца не иссследован, даже в шестимерном случае. В работе Chu [3] доказано, что не существует симплектических структур на полупростых группах Ли, а симплектическая четырехмерная группа Ли обязана быть разрешимой. В шестимерном случае симплектические структуры могут существовать и на неразрешимых группах Ли, приведен пример такого случая. В работе [5] проведено исследование симплектических структур на шестимерных разрешимых алгебрах Ли. В данной работе мы исследуем вопрос о существовании симплектических и паракомплексных структур на шестимерных неразрешимых группах Ли. Как известно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет разложение Леви — Мальцева $\mathfrak{g} = N \oplus S$ в виде прямой суммы радикала $N$ и полупростой подалгебры $S$. В работе [3] показано, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ симплектической группы Ли $G$ имеет разложение Леви в виде прямого произведения $\mathfrak{g} = N \times S$, тогда на $G$ не существует левоинвариантных симплектических структур. Поэтому мы будем рассматривать неразрешимые шестимерные алгебры Ли, для которых разложение Леви является полупрямым произведением $\mathfrak{g} = N \ltimes S$. Мы будем использовать классификацию таких групп, приведенную в работах [6] и [7]. Из результатов нашей работы следует, что шестимерная симплектическая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ должна быть разрешимой за исключением одного случая, когда $\mathfrak{g} = A_{3.5} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$.

## 1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия, используемые в работе. Более подробные сведения можно найти в [1] и [2]. Многообразие $M$ называется симплектическим, если на нем задана замкнутая невырожденная кососимметричная 2-форма $\omega$. Риманова структура на $M$ определяется заданием скалярного произведения $g(x)$ в каждом касательном пространстве $T_xM$, $x \in M$. Почти паракомплексной структурой на $2n$-мерном многообразии $M$ называется поле $J$ эндоморфизмов касательного расслоения $TM$, таких, что $J^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^{\pm}M = ker(Id \mp J)$ равны. Почти паракоплексная структура $J$ называется интегрируемой, если кручение Нейенхейса

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

обращается в нуль для всех векторных полей $X, Y$ на $M$. Почти параэрмитовой структурой на $2n$-мерном многообразии $M$ называется пара $(g, J)$, которая состоит из псевдоримановой метрики $g$ и почти паракомплексной структуры $J$, которые удовлетворяют свойству согласованности $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. Если почти паракомплексная структура $J$ интегрируема и фундаментальная 2-форма $\omega(X, Y) = g(X, JY)$ является симплектической, то $(g, J, \omega)$ называется паракэлеровой структурой.

Таким образом, для нахождения левоинвариантной паракэлеровой структуры $(g, J, \omega)$ на группе Ли нужно решить следующую систему уравнений, в которых $g$, $J$ и $\omega$ представлены матрицами в некотором базисе алгебры Ли, а символами $C_{ij}^k$ обозначены структурные константы алгебры Ли, где $i, j, k = 1, \ldots, 2n$:

1. Условие замкнутости формы $\omega$,
$$\omega_{sk} C_{ij}^s + \omega_{si} C_{jk}^s + \omega_{sj} C_{ki}^s = 0.$$
2. Условие согласованности $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$, $J_i^k \omega_{kj} + \omega_{ik} J_j^k = 0$.
3. Условие $J^2 = Id$, $J_k^i J_j^k = \delta_j^i$.
4. Условие интегрируемости паракомплексной структуры $J$,
$$J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_j^m C_{im}^l J_l^k - J_i^l C_{lj}^m J_m^k - C_{ij}^k = 0.$$

## 2. Шестимерные неразрешимые алгебры Ли

Пусть $A_{3.1}$, $A_{3.3}$, $A_{3.5}$ — трехмерные разрешимые алгебры Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и со следующими ненулевыми скобками Ли:

$$A_{3.1} = \mathbb{R}^3, \qquad A_{3.3}: \ [e_2, e_3] = e_1,$$

$$A_{3.5}: \ [e_1, e_2] = e_2, \ [e_1, e_3] = e_3.$$

Пусть $so(3)$ — алгебра Ли группы ортогональных матриц и $sl(2, \mathbb{R})$ — алгебра Ли матриц порядка 2 с нулевым следом. На данных алгебрах Ли выберем обычный базис $\{e_4, e_5, e_6\}$. Как известно [6], [7], существует четыре шестимерных неразрешимых алгебры Ли, которые являются полупрямыми произведениями трехмерных алгебр Ли. Они определяются следующими скобками Ли:

1. $A_{3.5} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ : $[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_3, [e_4, e_5] = 2e_5, [e_4, e_6] = -2e_6, [e_5, e_6] = e_4, [e_2, e_4] = e_2, [e_2, e_5] = e_3, [e_3, e_4] = -e_3, [e_3, e_6] = e_2$.
2. $A_{3.1} \ltimes so(3)$ : $[e_4, e_5] = e_6, [e_4, e_6] = -e_5, [e_5, e_6] = e_4, [e_4, e_2] = e_3, [e_5, e_1] = -e_3, [e_6, e_1] = e_2, [e_4, e_3] = -e_2, [e_5, e_3] = e_1, [e_6, e_2] = -e_1$.
3. $A_{3.1} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ : $[e_4, e_5] = 2e_5, [e_4, e_6] = -2e_6, [e_5, e_6] = e_4, [e_4, e_1] = 2e_1, [e_5, e_2] = 2e_1, [e_6, e_1] = e_2, [e_4, e_3] = -2e_3, [e_5, e_3] = e_2, [e_6, e_2] = 2e_3$.
4. $A_{3.3} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ : $[e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_5] = 2e_5, [e_4, e_6] = -2e_6, [e_5, e_6] = e_4, [e_4, e_1] = e_1, [e_5, e_2] = e_1, [e_6, e_1] = e_2, [e_4, e_2] = -e_2$.

**Теорема.** *Из алгебр $A_{3.5} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$, $A_{3.1} \ltimes so(3)$, $A_{3.1} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ и $A_{3.3} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ только одна $A_{3.5} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ имеет симплектическую структуру. Алгебра Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ допускает также паракэлерову структуру. Алгебры Ли $A_{3.1} \ltimes$*

*$so(3)$, $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ и $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ не допускают симплектических структур, однако на них существуют многопараметрические семейства параэрмитовых структур.*

*Доказательство.* Рассмотрим алгебру Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$. Пусть $e^1, \ldots, e^6$ — дуальный базис. Для нахождения симплектической структуры $\omega$ на $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ рассмотрим общую 2-форму $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} e^i \wedge e^j$ и решим указанное выше условие замкнутости:

$$(d\omega)_{ijk} = \omega_{sk} C^s_{ij} + \omega_{si} C^s_{jk} + \omega_{sj} C^s_{ki} = 0.$$

Данная система уравнений легко решается. Например, $(d\omega)_{126} = \omega_{s6} C^s_{12} + \omega_{s1} C^s_{26} + \omega_{s2} C^s_{61} = \omega_{26} C^2_{12} = \omega_{26} = 0$. Решая эту систему уравнений, легко находим следующий общий вид замкнутой 2-формы:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ -\omega_{13} & 0 & 0 & -\omega_{13} & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} & 0 & \omega_{45} & \omega_{46} \\ 0 & -\omega_{13} & 0 & -\omega_{45} & 0 & \omega_{56} \\ 0 & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{46} & -\omega_{56} & 0 \end{pmatrix}$$

Полученная замкнутая форма является симплектической структурой при условии невырожденности: $\det(\omega) \neq 0$. Этому семейству принадлежит симплектическая структура

$$\omega_0 = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5, \qquad (1)$$

найденная в работе Chu [3] при доказательстве того, что в шестимерном случае симплектическая группа Ли не обязана быть разрешимой.

Отметим, что для всех остальных случаев групп Ли выполнение условия замкнутости 2-формы приводит к вырожденной 2-форме.

Для нахождения паракэлеровых структур на алгебре Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ мы должны найти интегрируемую паракомплексную структуру $J$, согласованную с формой $\omega$: $\omega(JX, JY) = -\omega(X,Y)$. Будем рассматривать указанную выше симплектическую форму $\omega_0$. Как известно, если $J$ — интегрируемая паракомплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы собственных $\pm 1$-подпространств: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{+1}$, причем каждое из них является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что для алгебры Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ векторы $\{e_2, e_3, e_5\}$ и $\{e_1, e_4, e_6\}$ порождают подалгебры. Поэтому возьмем паракомплексную структуру на $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ в виде диагональной матрицы $J_0 = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,1,-1,1\}$. Легко видеть, что она согласована с формой $\omega_0$. Тогда соответствующая метрика $g_0$ имеет следующий вид: $g_0 = -2e^1 \cdot e^2 + 2e^2 \cdot e^4 + 2e^3 \cdot e^6 + 2e^4 \cdot e^5$. Мы получили паракэлерову структуру $(\omega_0, J_0, g_0)$ на $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$.

Для остальных алгебр Ли $A_{3.1} \ltimes so(3)$, $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ и $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ не существует симплектических структур. Поэтому для них мы выберем невырожденную (но не замкнутую) 2-форму

$$\Omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6.$$

Легко видеть, что паракомплексная структура $J_0 = \mathrm{diag}\{-1,-1,-1,1,1,1\}$ является интегрируемой и согласованной с $\Omega_0$. Поэтому $(\Omega_0, J_0, g_0 = \Omega_0 \cdot J_0)$ является параэрмитовой структурой. *Теорема доказана.*

**Вывод.** По теореме Леви — Мальцева для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с радикалом $N$ существует полупростая подалгебра $S$, такая, что $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = N \oplus S$. Поэтому алгебры Ли делятся на 3 категории: полупростые, разрешимые и прямые суммы полупростой и разрешимой алгебр Ли. В работе [3] показано, что в случае прямого произведения $\mathfrak{g} = N \times S$ на $\mathfrak{g}$ не существует симплектической структуры. Остается одна возможность, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является полупрямым произведением $\mathfrak{g} = N \ltimes S$. Поэтому из теоремы следует, что шестимерная симплектическая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ должна быть разрешимой за исключением одного случая, когда $\mathfrak{g} = A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ и состоит из матриц $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & -a_4 \end{pmatrix}$. Отметим, что четырехмерная симплектическая алгебра Ли всегда должна быть разрешимой [3].

Обратимся снова к алгебре Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ с симплектической формой $\omega_0$ и найдем на ней паракэлеровы структуры $J$, отличные от $J_0$. Применим способ, предложенный в работе [8], который позволяет найти $J$, удовлетворяющую условию согласованности $\omega_0(JX, JY) = -\omega_0(X,Y)$ и условию $J^2 = Id$.

Предположим, что известна некоторая паракомплексная структура $J_0$, которую будем называть начальной. Тогда соответствующая начальная псевдориманова метрика имеет вид $g_0(X,Y) = \omega_0(X, J_0 Y)$. Почти паракомплексная структура $J$, согласованная с $\omega_0$, находится по формуле [8]:

$$J = J_0(1+P)(1-P)^{-1} = (1-P)J_0(1-P)^{-1},$$

где $P$ — оператор, обладающий свойствами:

1. $P$ антикоммутирует с $J_0$: $P^i_s J^s_{0j} + J^i_{0s} P^s_j = 0$.
2. $P$ симметричен относительно метрики $g_0$: $g_{0sj} P^s_i - g_{0is} P^s_j = 0$.

Выберем начальную паракомплексную структуру на $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ в виде диагональной матрицы $J_0 = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,1,-1,1\}$. Легко видеть, что она согласована с формой $\omega_0$. Мы имеем (начальную) паракэлерову структуру $(\omega_0, J_0, g_0)$.

Удобно выбрать новый базис на $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$:

$$E_1 = -e_2,\ E_2 = e_3,\ E_3 = e_5,$$

$$E_4 = e_1,\ E_5 = e_6,\ E_6 = e_1 + e_4.$$

Тогда форма $\omega_0$ принимает вид $\omega_0 = E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^5 + E^3 \wedge E^6$, а оператор $J_0$ паракомплексной задается диагональной матрицей вида $J_0 = \mathrm{diag}\{-1,-1,-1,1,1,1\}$. Метрический тензор принимает вид $g_0 = 2E^1 \cdot E^4 + 2E^2 \cdot E^5 + 2E^3 \cdot E^6$. В этом случае оператор $P$ имеет блочный вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_4^1 & p_5^1 & p_6^1 \\ 0 & 0 & 0 & p_5^1 & p_5^2 & p_6^2 \\ 0 & 0 & 0 & p_6^1 & p_6^2 & p_6^3 \\ p_1^4 & p_2^4 & p_3^4 & 0 & 0 & 0 \\ p_2^4 & p_2^5 & p_3^5 & 0 & 0 & 0 \\ p_3^4 & p_3^5 & p_3^6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исследуем вопрос об интегрируемости почти паракомплексной структуры $J = (1-P)J_0(1-P)^{-1}$. В общем случае такая почти паракомплексная структура имеет слишком сложный вид вследствие трудностей с вычислением обратной матрицы оператора $1-P$. Однако можно рассмотреть частные случаи, когда часть параметров обращается в нуль. Рассмотрим в качестве примера случай, когда правый верхний блок оператора $P$ обращается в нуль. В этом случае почти паракомплексная структура имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_1^4 & 2p_2^4 & 2p_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ 2p_2^4 & 2p_2^5 & 2p_3^5 & 0 & 1 & 0 \\ 2p_3^4 & 2p_3^5 & 2p_3^6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решая условие интегрируемости $N_{ij}^k = J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_j^m C_{im}^l J_l^k - J_i^l C_{lj}^m J_m^k - C_{ij}^k = 0$ паракомплексной структуры $J$, получаем три решения:

1. $p_2^4 = p_3^4 = p_2^5 = p_3^5 = 0$.
2. $p_1^4 = -2p_3^4$, $p_2^4 = -2(p_3^4)^2$, $p_2^5 = -2p_3^5 p_3^4$, $p_3^6 = -((p_3^4)^2 + p_3^5)/(2p_3^4)$.
3. $p_1^4 = 2p_3^4$, $p_2^4 = 0$, $p_2^5 = 0$, $p_3^5 = 0$. $p_3^6 := p_3^4/2$.

Для каждого решения легко вычислить тензор кривизны и тензор Риччи. Например, для третьего решения мы имеем паракомплексную структуру и ассоциированную метрику $g_J(X,Y) = \omega_0(X, JY)$ в виде:

$$g_J = \begin{pmatrix} 4p_3^4 & 0 & 2p_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2p_3^4 & 0 & p_3^4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор Риччи $Ric$ и скалярная кривизна $S$ метрики $g_J$:

$$Ric = \begin{pmatrix} 32(p_3^4)^2 & 0 & 16(p_3^4)^2 & 8p_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8p_3^4 & 0 \\ 16(p_3^4)^2 & 0 & 8(p_3^4)^2 & 0 & -2 & 8p_3^4 \\ 8p_3^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8p_3^4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8p_3^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = 16p_3^4.$$

Для остальных алгебр Ли $A_{3.1} \ltimes so(3)$, $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ и $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ для невырожденной 2-формы $\Omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$ и начальной интегрируемой паракомплексная структуры $J_0 = \mathrm{diag}\{-1,-1,-1,1,1,1\}$ совершенно аналогично по формуле $J = J_0(1+P)(1-P)^{-1} = (1-P)J_0(1-P)^{-1}$ можно найти другие интегрируемые паракомплексные структуры, согласованные с $\Omega_0$, и вычислить их характеристики кривизны.

**Заключение**

В работе исследован вопрос о существовании паракэлеровых и параэрмитовых структур на шестимерных неразрешимых алгебрах Ли, являющихся полупрямыми произведениями. Существует четыре таких алгебры Ли: $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$, $A_{3.1} \ltimes so(3)$, $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ и $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$. В работе показано, что только на $\mathfrak{g} = A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ существует симплектическая структура, найден ее общий вид. Показано, что $\mathfrak{g} = A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbb{R})$ допускает паракэлерову структуру нулевой кривизны Риччи. Найдены другие паракэлеровы структуры в виде $J = (1-P)J_0(1-P)^{-1}$, где $(\omega_0, J_0, g_0)$ — некоторая начальная паракэлерова структура, $P$ — симметричный оператор, антикоммутирующий с $J_0$. В этом случае вычислены характеристики кривизны. Показано, что другие алгебры Ли допускают параэрмитовы структуры, т. е. интегрируемые паракомплексные структуры, согласованные с естественной невырожденной 2-формой $\Omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$. Из результатов работы следует, что шестимерная симплектическая алгебра Ли должна быть разрешимой за исключением одного случая, когда алгебра Ли состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & -a_4 \end{pmatrix}$.

## Библиографический список


1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Москва. 1998.
2. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные паракэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 1998. Т. 64. Вып. 1 (385).
3. Chu Bon-Yao. Symplectic homogeneous spaces. // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 197.
4. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups. // Diff. Geom. Appl. 2004. Vol. 21. № 1.
5. Campoamor-Stursberg R. Symplectic forms on six dimensional real solvable Lie algebras I // Algebra Colloquium. 2009. Vol. 16. № 2.
6. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. 2001. Vol. 69.
7. Turkowski P. Low–dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. 1988. Vol. 29.
8. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Тематические обзоры. ВИНИТИ РАН. Серия: «Современная математика и ее приложения». 2003. Т. 31.