УДК 514.765

О симметрическом уравнении Эйнштейна трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью

А.А. Павлова[1], О.П. Хромова[1], Е.Д. Родионов[1], Д.В. Вылегжанин[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)

On the Symmetric Einstein Equation for Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Riemannian Metric and Semi-Symmetric Connection

A.A. Pavlova[1], O.P. Khromova[1], E.D. Rodionov[1], D.V. Vylegzhanin[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Belarusian State University (Minsk, Belarus)

Римановы многообразия со связностью Леви-Чивиты и постоянной кривизной Риччи, или многообразия Эйнштейна, изучались в работах многих математиков. Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае. В этом направлении наиболее известны результаты работ Д.В. Алексеевского, М. Вана, В. Зиллера, Г. Йенсена, Х. Лауре, Ю.Г. Никонорова, Е.Д. Родионова и других математиков. В то же время в случае произвольной метрической связности вопрос изучения многообразий Эйнштейна мало исследован. Это обусловлено прежде всего тем, что тензор Риччи метрической связности не является, вообще говоря, симметрическим.

В настоящей работе рассматриваются полусимметрические связности на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Для симметрической части тензора Риччи изучается уравнение Эйнштейна. В результате проведенных исследований получена классификация 3-мерных метрических групп Ли и соответствующих полусимметрических связностей в случае симметрического уравнения Эйнштейна.

Ранее в работах П.Н. Клепикова, Е.Д. Родионова и О.П. Хромовой изучалось классическое уравнение Эйнштейна и было доказано, что если для 3-мерной группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметрической связностью выполняется классическое уравнение Эйнштейна, то либо связность является связностью Леви-Чивиты, либо тензор кривизны связности равен нулю.

Ключевые слова: полусимметрические связности, метрики Эйнштейна, группы Ли, левоинвариантные римановы метрики.

DOI: 10.14258/izvasu(2022)4-21

Riemannian manifolds with a Levi-Civita connection and constant Ricci curvature, or Einstein manifolds, were studied in the works of many mathematicians. This question has been most studied in the homogeneous Riemannian case. In this direction, the most famous ones are the results of works by D.V. Alekseevsky, M. Wang, V. Ziller, G. Jensen, H. Laure, Y.G. Nikonorov, E.D. Rodionov and other mathematicians. At the same time, the question of studying Einstein manifolds has been little studied for the case of an arbitrary metric connection. This is primarily due to the fact that the Ricci tensor of metric connection is not, generally speaking, symmetric.

In this paper, we consider semisymmetric connections on 3-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric. For the symmetric part of the Ricci tensor, the Einstein equation is studied. As a result of the research carried out, a classification of 3-dimensional metric Lie groups and the corresponding semisymmetric connections in the case of the Einstein symmetric equation has been obtained.

Earlier in the works of P.N. Klepikov, E.D. Rodionov and O.P. Khromova, the classical Einstein equation was studied, and it was proved that if the classical

The Einstein equation holds for a 3-dimensional Lie group with left-invariant (pseudo) Riemannian metric and semi-symmetric connection. Then, either the connection is a Levi-Civita connection, or the curvature tensor of the connection is equal to zero.

Key words: semisymmetric connections, Einstein metrics, Lie groups, left-invariant Riemannian metrics.

Введение

Изучение многообразий с полусимметрической связностью является актуальным напавлением в исследовании многообразий. Впервые эти связности изучались Э. Картаном и описаны в работе [1]. Целью данной работы является изучение трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью.

1. Предварительные сведения. Пусть (M, g) — риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления) [2–5].

Тензор кривизны и тензор Риччи риманова многообразия (M, g) с использованием полусимметрической связности определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(U \to R(X,U)Y).$$

Отметим, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим.

Риманово многообразие (M, g) с полусимметрической связностью ∇ называется эйнштейновым, если тензор r_{ij} удовлетворяет одному из следующих уравнений [6, 7]:

$$\begin{array}{ll} Type\,\mathcal{A} & r_{ij} = \Lambda g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{B} & r_{ij} = \Lambda(x) g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{C} & r_{(ij)} = \Lambda g_{ij}; \\ Type\,\mathcal{D} & r_{(ij)} = \Lambda(x) g_{ij}, \end{array}$$

где $r_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора Риччи, Λ — константа, $\Lambda(x)$ — функция на многообразии.

Рассмотрим уравнение типа $\mathcal{C}$ на группах Ли. Пусть $M = G$ — трехмерная группа с левоинвариантной римановой метрикой Ли; LG — алгебра Ли группы Ли G. Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в алгебре LG и положим

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k,$$

где c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли.

Известно, что символы Кристофеля связности Леви-Чивиты ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(c_{ijs} - c_{jsi} + c_{sij}\right)$$

Пусть $V \in LG$, тогда символы Кристофеля связности ∇ с векторным кручением (1) задаются равенством:

$$\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta^k_i$$

Компоненты тензора кривизны и тензора Риччи можно вычислить с помощью соответствующих формул:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ij}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk}\right) g_{ps},$$

$$r_{ij} = R_{ijks} g^{js}$$

Переобозначим структурные константы алгебры Ли в соответствии со следующей теоремой [8].

Теорема 1. *Пусть (G, g) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*

- *если G унимодулярная, то в алгебре Ли $\mathcal{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:*

  $$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1;$$

- *если G неунимодулярная, то в алгебре Ли $\mathcal{NU}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид:*

  $$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3,$$

  где $\alpha + \delta = 2$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, удовлетворяющая уравнению*

$$r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}. \qquad (2)$$

Тогда

1) если группа Ли G унимодулярная, то ее алгебра Ли изоморфна $so(3)$ или $e(2)$, а структурные константы ее алгебры Ли и координаты векторного поля V входят в следующий список:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3^2 + v_3^2}{\lambda_3}, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   $V = \{0, 0, v_3\}, \Lambda = \lambda_3^2$.

2. $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}), \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$,
   $V = \{v_1, 0, 0\}, v_1^2 \le \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_1\lambda_3 - v_1^2$.

3. $\lambda_1 = \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2})$,
   $V = \{0, v_2, 0\}, v_2^2 < \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_2\lambda_3 - v_2^2$;

2) если группа Ли G неунимодулярная, то структурные константы ее алгебры Ли и координаты векторного поля V входят в следующий список:

1. $\alpha = -\gamma + 2, \beta = \delta = \pm\sqrt{-\gamma^2 + 2\gamma}$,
   $V = (-2, 0, 0), \gamma \in (0, 2)$, $\Lambda = 0$.

2. $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = -4$,
   $V = (0, 0, 0)$.

3. $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = 0$,
   $V = (-1, 0, 0)$.

2. Доказательство основной теоремы. Для доказательства теоремы 2 запишем систему уравнений (2) в базисе теоремы 1, используя формулы для нахождения компонент тензора Риччи через структурные константы алгебры Ли.

1. Унимодулярный случай. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned}
2\lambda_3\lambda_2 - \lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2(V^3)^2 - 2(V^2)^2 = \Lambda,\\
-\lambda_3^2 + 2\lambda_3\lambda_1 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2(V^3)^2 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
-\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - 2(V^2)^2 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
-V^3\lambda_2 + V^3\lambda_1 + 2V^1V^2 = 0,\\
\lambda_3V^2 - V^2\lambda_1 + 2V^1V^3 = 0,\\
-\lambda_3V^1 + V^1\lambda_2 + 2V^2V^3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему равенств, находим

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3^2 + v_3^2}{\lambda_3}, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   $V = \{0, 0, v_3\}, \Lambda = \lambda_3^2$.

2. $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_1^2}), \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$,
   $V = \{v_1, 0, 0\}, v_1^2 \leq \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_1\lambda_3 - v_1^2$.

3. $\lambda_1 = \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - 4v_2^2})$,
   $V = \{0, v_2, 0\}, v_2^2 < \frac{\lambda_3^2}{4}, \Lambda = \lambda_2\lambda_3 - v_2^2$.

2. Неунимодулярный случай. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned}
-2\alpha^2 - 2\alpha V^1 - \beta^2 - 2\beta\delta - \delta^2 - 2(V^3)^2 - 2\gamma^2 -\\
-2\gamma V^1 - 2(V^2)^2 = \Lambda,\\
-2\alpha^2 - 4\alpha V^1 - \beta^2 + \delta^2 - 2(V^3)^2 - 2\alpha\gamma - 2\gamma V^1 -\\
-2(V^1)^2 = \Lambda,\\
\delta^2 - 2\gamma^2 - 4\gamma V^1 + \beta^2 - 2(V^2)^2 - 2\alpha\gamma - 2\alpha V^1 -\\
-2(V^1)^2 = \Lambda,\\
V^3\delta + 2V^1v_2 + V^2\alpha = 0,\\
\beta\delta V^2 + 2V^1V^3 + V^3\gamma = 0,\\
-2\alpha\delta - 2\beta\gamma - \beta V^1 - V^1\delta + 2V^2V^3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему равенств, находим

1. $\alpha = -\gamma + 2, \beta = \delta = \pm\sqrt{-\gamma^2 + 2\gamma}$,
   $V = (-2, 0, 0), \gamma \in (0, 2)$, $\Lambda = 0$.

2. $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = -4$,
   $V = (0, 0, 0)$.

3. $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}, \gamma = 1, \delta = -\beta, \Lambda = 0$,
   $V = (-1, 0, 0)$.

Заключение. В данной работе для симметрической части тензора Риччи изучается уравнение Эйнштейна (уравнение Эйнштейна типа С) на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической метрической связностью. В результате проведенных исследований дана классификация трехмерных метрических групп Ли и соответствующих полусимметрических связностей для уравнения Эйнштейна типа С. Работа является естественным продолжением исследований П.Н. Клепикова, Е.Д. Родионова и О.П. Хромовой по изучению классического уравнения Эйнштейна (уравнения Эйнштейна типа А) на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметрической связностью [9–11].

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. Vol. 15.

3. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. Vol. 3, No 25.

4. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46.

5. Agricola I., Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion // Annals of Global Analysis and Geometry. 2004. Vol. 26.

6. Maralbhavi Y.B., Muniraja G. Semi-Symmetric Metric Connections, Einstein Manifolds and Projective Curvature Tensor // Int. J. Contemp. Math. Sciences, 5(20), 2010.

7. Klemm D.S., Ravera L. Einstein manifolds with torsion and nonmetricity // Phys. Rev. D., 101(4), 2020.

8. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. Vol. 21.

9. Klepikov P., Rodionov E., Khromova O. Einstein equation on 3-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion // Mathematical notes of NEFU, 2020. 26(4).

10. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 181. № 3. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-41-53.

11. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26. № 4. DOI: 10.25587/SVFU.2019.49.61.003.