

УДК 517:551.3

## Об одной задаче движения внешней нагрузки по вязкому битому льду в канале

*К.Н. Завьялова, К.А. Шишимарев*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

## On The Problem of the Viscous Broken Ice Response to a Load Moving Along a Channel

*K.N. Zavyalova, K.A. Shishmarev*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается задача определения колебаний битого льда в канале в результате движения внешней нагрузки.

В пункте 1 приведен обзор литературы.

В пункте 2 приведена постановка задачи. Приводится прямоугольный канал с конечными глубиной и шириной. Жидкость в канале идеальная и покрыта битым льдом. Битый лед моделируется тонкой упругой пластиной с нулевой жесткостью. Внешняя нагрузка моделируется гладким локализованным давлением и движется по верхней поверхности битого льда с постоянной скоростью. Рассматривается модельная задача с учетом вязкости битого льда. Течение, вызванное прогибом битого льда, является потенциальным. Прогибы битого льда и потенциал течения жидкости удовлетворяют условию затухания в отдалении от нагрузки.

В пункте 3 приведен алгоритм решения задачи. Решение ищется в виде бегущей волны в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Задача решена с использованием преобразования Фурье вдоль канала и методом разделения переменных. Решение получено в виде интегралов от образа Фурье прогиба битого льда. Данные интегралы решаются численно для некоторых заданных параметров задачи.

В заключение приведены основные результаты работы.

**Ключевые слова:** битый лед, идеальная жидкость, гидроупругость, движущаяся нагрузка, канал.

The problem of the broken ice response to a moving external load in a channel is considered.

The review of the well-known results is presented in paragraph 1.

The formulation of the problem is given in paragraph 2.

The channel has a rectangular cross section with finite depth and width. The fluid in the channel is ideal and covered with broken ice. The broken ice is modeled by a thin elastic plate with zero rigidity. The external load is modeled by a smooth localized pressure and moves along the upper surface of the broken ice at a constant speed. The case taking into account the viscosity of broken ice is considered. The flow caused by the deflection of the broken ice is potential. The broken ice deflection and the potential of the flow satisfy the damping condition at a distance from the load.

The method of the solution is described in paragraph 3. The solution is sought in the form of a traveling wave in a coordinate system moving together with the load. The problem is solved using the Fourier transform along the channel and the method of separation of variables. The solution is obtained in the form of integrals from the Fourier image of the deflection of the broken ice. These integrals are solved numerically for some given parameters of the problem.

The results are discussed in conclusion.

**Key words:** broken ice, potential flow, hydroelasticity, moving load, channel.

DOI 10.14258/izvasu(2019)4-11

**1. Введение.** Рассматривается движение судна по битому льду в канале. Предполагается, что лед был предварительно разрушен резонансным методом с помощью судна на воздушной подушке, которое движется вдоль замороженной части реки на определенной скорости и создает напряженно-деформированное состояние ледового покрова. Вызванные напряжения могут быть достаточными для ломки льда ([1], [2], [3]). При движении судна по битому льду

основной прикладной задачей является определение параметров, гарантирующих безопасное движение. При отсутствии упругих сил в битом льду могут возникать волны большой амплитуды как в области движения судна, так и в отдалении от него, в частности — на стенках канала и возле речных сооружений.

Хорошо изученной является задача о движении внешней нагрузки по замороженному ледовому покрову в канале. Существует несколько

основных подходов к изучению этой задачи. В первом подходе задача исследуется в рамках модели Кельвина-Фойгта вязкоупругого материала. Рассматривается установившееся решение в системе координат, движущейся совместно с нагрузкой. Данный подход не требует начальных условий. Задача решается численно. В рамках вязкоупругой модели прогибы и деформации в ледовом покрове быстро затухают с увеличением расстояния от нагрузки.

Другой подход к изучению поведения ледового покрова при движении внешней нагрузки представлен в [4] для задачи с неограниченным ледовым покровом. В этом случае вязкость льда не учитывается, что является менее физичным. В рассматриваемой модели стационарный прогиб льда получен как предел нестационарного решения при больших временах. Данный подход требует формулировки начальных условий при  $t = 0$ . Нагрузка, покоящаяся в начальный момент времени, движется с постоянной скоростью  $U$  вдоль канала. Прогибы и деформации льда затухают в отдалении от нагрузки при конечных временах. В отличие от задачи с неограниченным ледовым покровом [4], исследование прогибов льда в канале требует поиска профиля колебаний поперек канала с учетом краевых условий. Для этого используется метод нормальных мод [5, 6].

Прогрессивные волны в замороженном канале исследованы в [7, 8, 9, 10]. Колебания неограниченной тонкой ледовой пластины исследованы в [1, 11, 12], колебания полубесконечного ледового покрова в [13]. Рассмотренные задачи решались в рамках линейной теории гидроупругости. Показано, что стенки канала имеют важную роль в формировании прогибов ледового покрова. Исследование колебаний ледового покрова проведено в [14, 15]. Оценка влияния периодической нагрузки на ледовый покров получена в [16, 17]. Вопросы корректности начально-краевых задач динамики пороупругого льда рассмотрены в [18, 19].

В данной работе рассматривается модельная задача движения гладкого локализованного пятна давления вдоль битого льда в канале. Битый лед имеет постоянную толщину и моделируется поверхностью, обладающей массой, но с нулевой жесткостью. Вязкость битого льда моделируется добавлением слагаемого с  $\tau$  в уравнение колебаний битого льда, где  $\tau$  — время запаздывания. Жидкость в канале предполагается идеальной и несжимаемой [20]. Движение жидкости в канале является потенциальным и вызвано отклонением битого льда от состояния покоя. Краевые условия на битый лед на стенках канала отсутствуют. Основное внимание в статье уделено формированию колебаний битого льда для заданной скорости движения нагрузки [21].

**2. Постановка задачи.** Рассматривается задача определения колебаний битого льда в канале в результате движения внешней нагрузки. Канал имеет прямоугольное сечение с заданными глубиной  $H$  ( $-H < z < 0$ ) и шириной  $2L$  ( $-L < y < L$ ). Вдоль  $x$  канал неограничен ( $Oxyz$  — декартова система координат). Жидкость в канале идеальная. Течение, вызванное колебанием битого льда, считается потенциальным. Схема задачи показана на рисунке 1.

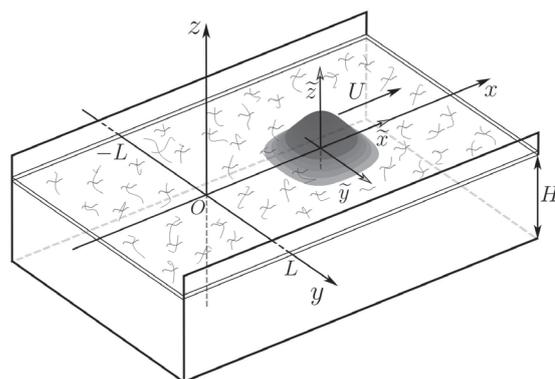


Рис. 1. Схема задачи

Затухание волн учитывается на основе коэффициента запаздывания реологического закона Кельвина-Фойгта для вязкоупругого материала. В этом случае прогибы битого льда  $w$  удовлетворяют следующему уравнению:

$$Mw_{tt} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho_l g w + \rho_l g w + \rho_l \varphi_t = P(x, y, t) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, z = 0). \quad (1)$$

Внешнее давление движется вдоль центральной линии канала и моделируется гладкой функцией  $P(x, y, t)$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left( \frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left( \frac{y}{L} \right) \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L), \quad (2)$$

$$P_1(\tilde{x}) = \frac{\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1}{2} \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1), \\ P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1), \quad \tilde{x} = \frac{x - Ut}{L}, \\ P_2(\tilde{y}) = \frac{\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1}{2} \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1), \\ P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = \frac{y}{L},$$

где  $c_1, c_2$  — безразмерные параметры внешней нагрузки, характеризующей размер зоны давления. Пример функции  $P$  представлен на рисунке 2.

Гидродинамическое давление на границе лед — жидкость удовлетворяет линеаризованному уравнению Коши-Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_t - \rho_l g w \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L). \quad (3)$$

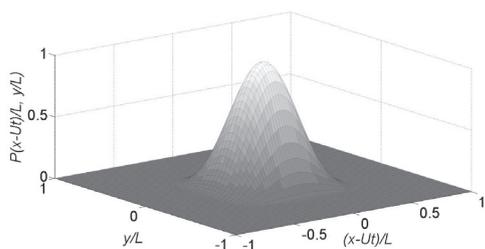


Рис. 2. Пример функции  $P(x, y, t)$  для параметров  $c_1 = c_2 = 2$

Потенциал скорости течения удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -L < y < L)$$

и следующим граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H), \\ \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматривается решение в виде бегущей волны. Вводится система безразмерных переменных по формулам

$$\tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{x} = \frac{x - Ut}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}.$$

Предполагается, что искомые функции  $w$  и  $\varphi$  имеют следующую зависимость:

$$w(x, y, t) = w(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, t) = w_{sc}\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(\tilde{x}L + Ut, L\tilde{y}, t) = \varphi_{sc}\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

где  $w_{sc} = \frac{P_0}{\rho \ell g}$  и  $\varphi_{sc} = \frac{UP_0}{\rho \ell g}$ , масштабы прогиба битого льда и потенциала скорости течения соответственно. В безразмерных переменных задача (1) – (4) примет следующий вид (знак  $\sim$  опускается):

$$\alpha h Fr^2 w_{xx} + w = h Fr^2 \varphi_x - P_1(x)P_2(x) + \varepsilon w_x \quad (-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, z = 0), \quad (5)$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -h < z < 0), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_z = -w_x \quad (z = 0), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -h), \\ \varphi_y = 0 \quad (y = \pm 1), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $Fr = U/\sqrt{gH}$  – число Фруда,  $\alpha = \frac{\rho_i h_i}{\rho \ell L}$  – безразмерная масса,  $h = \frac{H}{L}$  – отношение сторон канала,  $\varepsilon = \frac{\tau U}{L}$  – безразмерное время запаздывания.

**3. Метод решения.** Сформулированная задача (5)–(7) решается с помощью преобразования Фурье в направлении оси  $x$ . Уравнение пластины (5) дает

$$\begin{aligned} w^F(\xi, y)(1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - i\xi\varepsilon) = \\ = i\xi h Fr^2 \varphi^F(\xi, y, z) - P_2(y)P_1^F(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$w^F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) e^{-i\xi x} dx,$$

$$\varphi^F(\xi, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) e^{-i\xi x} dx,$$

$$P_1^F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Здесь  $\xi$  – параметр преобразования Фурье,  $\xi \in (-\infty, \infty)$ . В уравнении пластины (8) после применения преобразования Фурье появляется мнимое слагаемое. Представим функцию  $\varphi^F(\xi, y, z)$  в виде

$$\varphi^F(\xi, y, z) = -i\xi J(\xi, y, z),$$

тогда уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} w^F(\xi, y)(1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - i\xi\varepsilon) = \\ = \xi^2 h Fr^2 J(\xi, y, z) - P_2(y)P_1^F(\xi), \end{aligned} \quad (9)$$

Функцию  $w^F$  будем искать в виде разложения на одномерные колебания  $\psi_j(y)$  битого льда в канале

$$w^F = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi)\psi_j(y), \quad (10)$$

где  $\psi_j(y) = \cos(\pi j y)$ . Краевая задача (6)–(7) решается методом Фурье. В результате функция  $J(\xi, y, z)$  примет вид

$$J(\xi, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\xi) \cos(\pi n y) Gc_n}{G_s n}, \quad (11)$$

где

$$Gc_n = \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2}(h + z)),$$

$$G_s n = \sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \sinh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} h).$$

Подставляя (10) и (11) в правую и левую части уравнения (9), умножая на  $\cos(\pi j y)$  и интегрируя по  $y$  от  $-1$  до  $1$ , получим

$$\begin{aligned} (1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - i\xi\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 a_n(\xi) K_{n,j}(y) dy = \\ = \xi^2 h Fr^2 \sum_{n=1}^{\infty} f r_n(\xi) \int_{-1}^1 a_n(\xi) K_{n,j}(y) dy - \\ - P_1^F(\xi) \int_{-1}^1 P_2(y) \cos(\pi j y) dy, \end{aligned}$$

где

$$K_{n,j}(y) = \cos(\pi n y) \cos(\pi j y),$$

$$f r_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \tanh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} h)}.$$

С учетом ортогональности функций  $\cos(\pi j y)$  последнее уравнение дает

$$\begin{aligned} (1 - h\alpha Fr^2 \xi^2 - i\xi\varepsilon) a_n(\xi) = \\ = \xi^2 h Fr^2 f r_n(\xi) a_n(\xi) - P_1^F(\xi) N_n, \end{aligned} \quad (12)$$

откуда получим представление для коэффициентов  $a_n(\xi)$

$$a_n(\xi) = \frac{-P_1^F(\xi)N_n}{1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - i\xi\varepsilon - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}}, \quad (13)$$

где

$$Gt_n = \sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \tanh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} h),$$

$$N_n = \frac{\sin((c_2 + n)\frac{\pi}{c_2})}{(c_2 + n)\pi} + \frac{\sin((c_2 - n)\frac{\pi}{c_2})}{(c_2 - n)\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi n}{c_2})}{n\pi},$$

$$N_n|_{c_2=n} = c_2.$$

Представим  $a_n(\xi)$  в виде суммы действительной и мнимой частей:  $a_n(\xi) = a_n^R + ia_n^I$ . Подставим данное представление в уравнение (12)

$$\left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - i\xi\varepsilon - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right) (a_n^R + ia_n^I) = -P_1^F N_n. \quad (14)$$

Приравняем коэффициенты действительных и мнимых частей справа и слева в уравнении (14)

$$\begin{cases} a_n^R \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right) + \xi\varepsilon a_n^I = -P_1^F N_n; \\ -\xi\varepsilon a_n^R + a_n^I \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Выразим  $a_n^R$  из второго уравнения системы (15)

$$a_n^R = \frac{a_n^I}{\xi\varepsilon} \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right)$$

и подставим в первое уравнение (15), тогда

$$\begin{aligned} a_n^R &= \frac{-P_1^F N_n \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right)}{\xi^2\varepsilon^2 + \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right)^2}, \\ a_n^I &= \frac{-P_1^F N_n \xi\varepsilon}{\xi^2\varepsilon^2 + \left(1 - h\alpha Fr^2\xi^2 - \frac{hFr^2\xi^2}{Gt_n}\right)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно,  $w^F$  примет вид

$$\begin{aligned} w^F &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^R + ia_n^I) \cos(\pi ny) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^R \cos(\pi ny) + i \sum_{n=1}^{\infty} a_n^I \cos(\pi ny). \end{aligned} \quad (17)$$

Прогибы битого льда  $w(x, y)$  найдем с использованием обратного преобразования Фурье

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (18)$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi ny) \int_{-\infty}^{\infty} (a_n^R + ia_n^I) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (19)$$

где в силу нечетности  $a_n^I$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} a_n^I \cos(\xi x) d\xi = 0$ ,

а в силу четности  $a_n^R$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} a_n^R \sin(\xi x) d\xi = 0$ . Тогда

$$w(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi ny) \int_0^{\infty} (a_n^R \cos(\xi x) - a_n^I \sin(\xi x)) d\xi. \quad (20)$$

Для численного решения ограничиваем интегрируемую область конечным отрезком. Данный отрезок разбивается на конечное число шагов  $N$  с шагом  $\Delta\xi$ . Количество функций в (10) ограничиваем конечным числом  $N_{mod}$ . Коэффициенты  $a_n^R(\xi)$  и  $a_n^I(\xi)$  приближаются линейными функциями на каждом отрезке по  $\xi$ . Тогда

$$w(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi ny) \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left[ a_n^R \cos(x\xi) - a_n^I \sin(x\xi) \right] d\xi.$$

Последние интегралы решаются методом интегрирования по частям. В результате получим аналитическое решение для прогибов битого льда в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_{mod}} \cos(\pi ny) * \\ &* \sum_{m=1}^N \left[ \frac{a_n^R(\xi_{m+1})}{x} \left( \sin(x\xi_{m+1}) \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right) - \right. \\ &- \frac{a_n^R(\xi_m)}{x} \left( \sin(x\xi_m) + \frac{\cos(x\xi_{m+1}) - \cos(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right) - \\ &- \frac{a_n^I(\xi_{m+1})}{x} \left( -\cos(x\xi_{m+1}) + \frac{\sin(x\xi_{m+1}) - \sin(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right) + \\ &\left. + \frac{a_n^I(\xi_m)}{x} \left( -\cos(x\xi_m) + \frac{\sin(x\xi_{m+1}) - \sin(x\xi_m)}{x\Delta\xi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

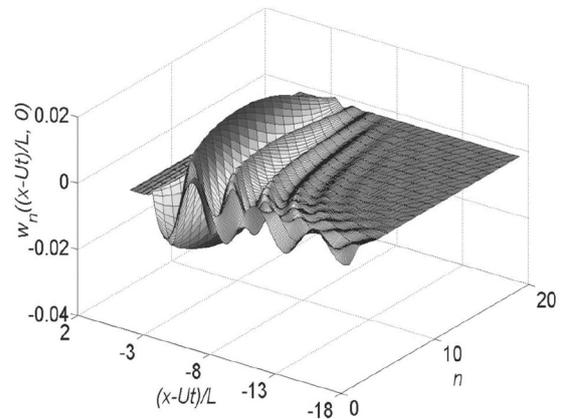


Рис. 3. Профили колебаний битого льда вдоль центральной линии канала для первых 20 слагаемых в решении (21)

На рисунке 3 представлены профили колебаний битого льда вдоль канала для первых 20 слагаемых в решении (21). При увеличении номера

слагаемого  $n$  наблюдаются более короткие волны. Коэффициент  $\tau$  сдвигает пики волн ближе к нагрузке, и эффект  $\tau$  заметен для более коротких волн. На рисунках 4–5 показано, что при увеличении скорости движения нагрузки  $U$  уменьшается амплитуда прогибов битого льда и увеличивается длина вынужденной волны.

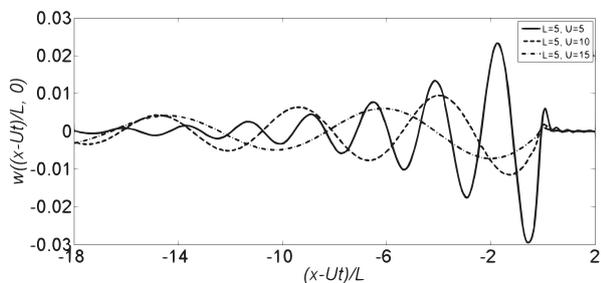


Рис. 4. Профили волн вдоль канала,  $y = 0$

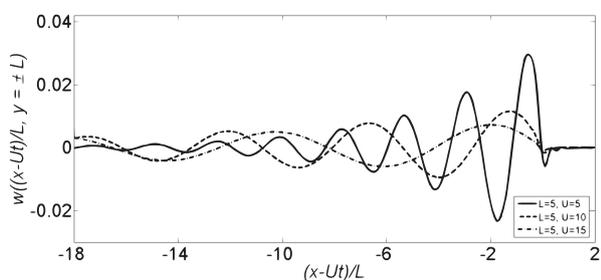


Рис. 5. Профили волн вдоль канала,  $y = \pm L$

На рисунках 6–7 показано, что при увеличении ширины канала  $L$  уменьшается амплитуда прогибов битого льда, также уменьшается длина области, подверженной колебаниям.

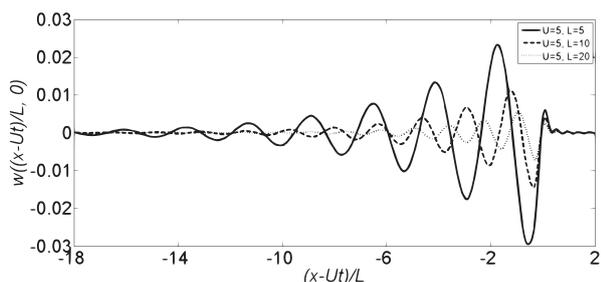


Рис. 6. Профили волн вдоль канала,  $y = 0$

Трехмерные прогибы представлены на рисунке 8. Здесь ширина канала  $2L = 10$  м, толщина битого льда  $h_i = 10$  см, плотность льда  $\rho_i = 917$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_\ell = 1024$  кг/м<sup>3</sup>, глубина канала  $H = 2$  м, скорость движения нагрузки  $U = 10$  м/с.

На рисунке 9 показаны линии уровня прогибов битого льда в виде клина. Заметим, что волны имеют форму клина, что хорошо

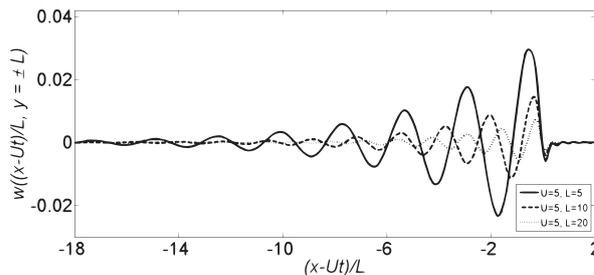


Рис. 7. Профили волн вдоль канала,  $y = \pm L$

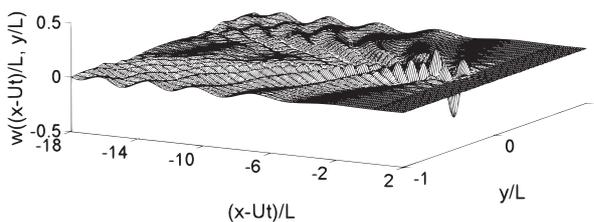


Рис. 8. Трехмерные прогибы битого льда в канале

согласуется с результатами движения внешней нагрузки по свободной поверхности в канале и по упругой неограниченной пластине.

**Заключение.** В работе исследована задача движения внешней нагрузки с постоянной скоростью вдоль канала, покрытого битым льдом. Построено решение в виде бегущей волны с помощью преобразования Фурье. Проведено исследование полученного решения, в частности, определена зависимость формирования прогибов битого льда от скорости движения нагрузки, оценено влияние жестких стенок на характеристики прогибов битого льда. Определено влияние значения коэффициента запаздывания на получаемые результаты.

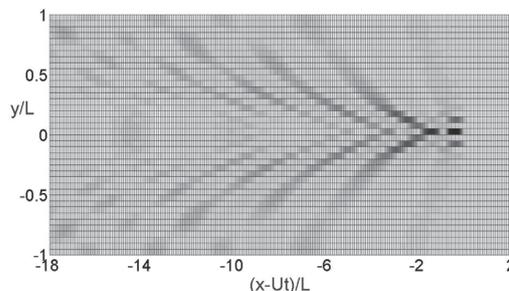


Рис. 9. Линии уровня прогибов битого льда в канале

### Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice. Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel. *Applied Ocean Research*. 2016. Т. 59.
3. Kozin V.M. Resonance Method of Breaking of Ice Cover. *Inventions and Experiments*. Akad. Estestvoznaniya, M., 2007.
4. Schulkes R., Sneyd A. Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // *Journal of Fluid Mechanics*. 1988. 186.
5. Korobkin A., Khabakhpasheva T. Plane problem of asymmetrical wave impact on an elastic plate // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1998.
6. Khabakhpasheva T. Impact of a surface wave on an elastic hull. *Fluid Dynamics*. 2006.
7. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // *Известия АлтГУ*. 2012. Вып. 1/2 (73).
8. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // *Известия АлтГУ*. 2012. Вып. 1/1 (73).
9. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves propagating along a channel with ice cover // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2014. V. 47.
10. Bataev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover. *Fluid Dynamics*. 2015, № 6.
11. Zhestkaya V.D. Numerical solution of the problem of an ice sheet under a moving load // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, V. 40(4).
12. Жесткая В.Д., Козин В.М. Численное решение задачи о воздействии ударного импульса на ледяной покров // *ПМТФ*. 2008. Т. 49. № 2.
13. Brocklehurst P. Hydroelastic waves and their interaction with fixed structures // PhD thesis, University of East Anglia, UK. 2012.
14. Sturova I.V., Tkacheva L.A. Wave motion in a fluid under and inhomogeneous ice cover // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 894. № 1.
15. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии // *Полярная механика*. 2016. № 3.
16. Ткачева Л.А. Колебания ледяного покрова с трещиной при воздействии периодической по времени нагрузки // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2017. № 2.
17. Tkacheva L.A. Vibrations of an ice sheet with crack under a time-periodic load // *Fluid Dynamics*. 2017. V. 52. № 2.
18. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде. // *Известия Алт. гос. ун-та*. 2015. Т. 2. № 1.
19. М.А. Tokareva. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. V. 722. № 1.
20. Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhumov S.D., Dzhabailov M.P., Morozov V.S., Kustov A.N. *Applied problems of the dynamics of ice cover*. M., 2008.
21. Шишмарев К.А., Завьялова К.Н. Свободные и вынужденные волки в канале, покрытом битым льдом // *МАК: Математики — Алтайскому краю : сборник трудов всерос. конфер. по математике*. 2017.