УДК 514.76.004

Применение систем компьютерной математики к исследованию однородных (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена — Вейля*

П.Н. Клепиков

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Application of Computer Mathematics Systems to the Study of Homogeneous (pseudo)Riemannian Manifolds with the Trivial Schouten — Weyl Tensor

P.N. Klepikov

Altai State University (Barnaul, Russia)

Исследованию (псевдо)римановых многообразий Эйнштейна, локально симметрических, Риччи параллельных и конформно плоских многообразий посвящены работы многих математиков. Все эти многообразия, как частные случаи, содержатся в классе (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена — Вейля.

В случае малой размерности для изучения однородных (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена — Вейля возможно применять системы компьютерной математики, т.к. все инвариантные тензорные поля выражаются через структурные константы алгебры Ли группы изометрий и компоненты метрического тензора. Ключевым шагом к решению проблемы классификации однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена — Вейля является последовательное рассмотрение всех возможных типов Сегре оператора Риччи.

Целью работы является разработка математической модели, а также компьютерной программы для изучения и классификации однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена — Вейля конечных размерностей. Приведен пример, показывающий основные шаги разработанного алгоритма.

Ключевые слова: (псевдо)риманово многообразие, тензор Схоутена — Вейля, тип Сегре, системы компьютерной математики.

Papers of many mathematicians are devoted to the investigation of (pseudo)Riemannian Einstein manifolds, locally symmetric, Ricci parallel and conformally flat manifolds. All these manifolds (as special cases) are contained in the class of (pseudo)Riemannian manifolds with trivial Schouten — Weyl tensor.

In the case of low dimension, it is possible to apply computer mathematics systems for studying the homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with trivial Schouten — Weyl tensor, since all invariant tensor fields are expressed in terms of Lie algebra structure constants of isometry group and the components of the metric tensor. A key step to solving the problem of classifying homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with the zero Schouten — Weyl tensor is a sequential consideration of all possible Segre types of the Ricci operator.

This study is aimed at developing a mathematical model, as well as a computer program for studying and classifying the homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with zero Schouten — Weyl tensors of finite dimensions. Also, this paper contains an example that shows the basic steps of the developed algorithm.

Key words: (pseudo)Riemannian manifold, Schouten — Weyl tensor, Segre type, systems of computer mathematics.

DOI 10.14258/izvasu(2018)1-18

1. Введение, определения и постановка задачи. (Псевдо)римановы многообразия с нулевым тензором Схоутена — Вейля исследовались многими математиками. В частности, данный класс многообразий содержит многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$)

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 16–01–00336А).

и конформно плоские многообразия ($W=0$) (см., например, [1]). Заметим также, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс многообразий с нулевым тензором Схоутена — Вейля содержится в классе эйнштейново-подобных многообразий в смысле А. Грея [2].

В случае однородных многообразий известны некоторые результаты для многообразий малой размерности. Например, Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановые метрики Эйнштейна, конформно плоские метрики и метрики с параллельным тензором Риччи на четырехмерных группах Ли [3–5]. Кроме того, А. Заем и А. Гаджи-Бадали классифицировали эйнштейново-подобные псевдоримановы 4-многообразия с нетривиальной группой изотропии [6]. Также была получена классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и нулевым тензором Схоутена — Вейля [7].

В римановом случае Д.С. Воронов, Е.Д. Родионов, В.В. Славский и О.П. Хромова получили классификацию четырехмерных групп Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля [8–10].

Тензор Схоутена — Вейля SW (псевдо)риманова многообразия (M,g) размерности $n \geqslant 3$ определяется формулой:

$$SW(X,Y,Z) = \nabla_Z A(X,Y) - \nabla_Y A(X,Z),$$

где $A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$ — тензор одномерной кривизны (тензор Схоутена), s — скалярная кривизна. Если $n \geqslant 4$, то тензор Схоутена — Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля через уравнение [1]:

$$SW = -(n-3)\operatorname{div} W.$$

Если скалярная кривизна является константой, то следующие условия эквивалентны

$$SW = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_Z r(X,Y) = \nabla_Y r(X,Z). \qquad (1)$$

Следуя стандартной терминологии (см., например, [3, 11]), определим *тип Сегре* самосопряженного оператора, который записывается между скобок { } и обозначает размеры клеток Жордана в разложении матрицы оператора. Круглые скобки группируют вместе различные блоки, соответствующие одному собственному значению. В таком случае тип Сегре называется *вырожденным*.

Ключевым шагом к решению проблемы классификации однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена — Вейля является последовательное рассмотрение всех возможных типов Сегре оператора Риччи. Например, все возможные типы Сегре оператора Риччи в четырехмерном случае приведены в таблице 1 (см., например, [3]).

Таблица 1

Возможные типы Сегре оператора Риччи в четырехмерном случае.

Невырожденные	$\{1111\}$	$\{112\}$	$\{22\}$	$\{13\}$	$\{4\}$
Вырожденные	$\{11(11)\}$ $\{(11)(11)\}$ $\{1(111)\}$ $\{(1111)\}$	$\{1(12)\}$ $\{(11)2\}$ $\{(112)\}$	$\{(22)\}$	$\{(13)\}$	—
Невырожденные	$\{111\bar{1}\}$	$\{21\bar{1}\}$	$\{2\bar{2}\}$	$\{1\bar{1}1\bar{1}\}$	
Вырожденные	$\{(11)1\bar{1}\}$	—	—	$\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$	

Если размерность однородного (псевдо)риманова пространства достаточно мала, то для изучения однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена — Вейля становится возможным применить системы символьных вычислений.

Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, через $\mathfrak{h}$ — подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (необязательно редуктивное) — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \qquad (2)$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви — Чивита $\nabla\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}} + v(X,Y),$$

где отображение $v\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$2g(v(X,Y), Z_{\mathfrak{m}}) = \\ = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z,Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z,X]_{\mathfrak{m}}).$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(X,Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи r определяется формулой

$$r(X,Y) = \operatorname{tr}(Z \mapsto R(X,Z)Y).$$

2. Основной алгоритм. Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ —

(необязательно редуктивное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$
$$[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k,$$

и запишем систему уравнений (2).

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора, найдем компоненты связности Леви — Чивита ∇:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right),$$
$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl} :$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$ и $\left\{g^{ij}\right\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps},$$
$$r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Далее находятся компоненты ковариантной производной тензора Риччи

$$r_{ij,k} = r_{sj}\Gamma_{ki}^s + r_{is}\Gamma_{kj}^s,$$

и выписывается система уравнений (1): $r_{ij,k} = r_{ik,j}$, которая дополняется системой (2) и условием выполнения тождества Якоби. Полученная система решается относительно структурных констант алгебры Ли.

Отметим, что подобные математические модели для метрических групп Ли приводились в работах [12, 13], а для однородных (псевдо)римановых пространств — в работах [3, 7, 14]. Также заметим, что алгоритм, предлагаемый в данной работе, отличается от техники использования обобщенных базисов Милнора (см. [15–19]).

3. Пример вычислений. В качестве примера рассмотрим четырехмерную метрическую алгебру Ли, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{13\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид (см. [20])

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\varepsilon_i = \pm 1$.

Так как в данном случае подалгебра изотропии тривиальна, уравнение (2) выполняется для любого метрического тензора. Система уравнений (1) в данном случае будет иметь вид

$$\left((\rho_1 - \rho_2) C_{13}^1 - C_{12}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \quad C_{23}^3\varepsilon_2 = 0,$$
$$\left((\rho_1 - \rho_2) C_{14}^1 - C_{13}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \quad C_{23}^4\varepsilon_2 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2) C_{23}^1\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \quad C_{24}^4\varepsilon_2 = 0,$$
$$\left(C_{23}^2 + C_{24}^3 - 3C_{34}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \quad (\rho_1 - \rho_2) C_{12}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{23}^2 - 3C_{24}^3 - C_{34}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \quad (\rho_1 - \rho_2) C_{12}^4\varepsilon_2 = 0,$$
$$\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \quad \left(C_{24}^2 - 2C_{34}^3\right)\varepsilon_2 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{12}^3\varepsilon_2 + C_{13}^4\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1\right) = 0,$$
$$2(\rho_1 - \rho_2) C_{24}^1\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2 - C_{13}^4\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$2(\rho_1 - \rho_2) C_{13}^3\varepsilon_2 + C_{12}^3\varepsilon_2 - 3C_{13}^4\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{13}^2\varepsilon_2 - 3C_{14}^3\varepsilon_2 - C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{12}^2\varepsilon_2 + C_{14}^4\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1\right) - 2C_{12}^3\varepsilon_2 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{12}^3\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 + C_{13}^4\varepsilon_2\right) - 2C_{12}^4\varepsilon_2 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{14}^3\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1\right) - 2C_{14}^4\varepsilon_2 = 0,$$
$$2(\rho_1 - \rho_2) C_{34}^1\varepsilon_1 - 2C_{13}^3\varepsilon_2 + C_{12}^2\varepsilon_2 +$$
$$+ C_{14}^4\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{12}^2\varepsilon_2 + C_{14}^4\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1\right) - C_{12}^3\varepsilon_2 +$$
$$+ C_{13}^4\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0,$$
$$(\rho_1 - \rho_2)\left(C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{14}^3\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1\right) + C_{12}^2\varepsilon_2 -$$
$$- C_{14}^4\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1 - 2C_{13}^3\varepsilon_2 = 0.$$

Решая данную систему, получим

$$C_{12}^1 = C_{24}^4 = C_{23}^3 = C_{12}^4 = 0, \; C_{34}^4 = 2C_{24}^3 = \frac{2}{5}C_{23}^2,$$
$$C_{23}^4 = C_{23}^1 = C_{14}^1 = C_{13}^1 = C_{24}^1 = 0, \; C_{24}^2 = 2C_{34}^3,$$
$$C_{14}^4 = -(\rho_1 - \rho_2)\left((\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 - 2C_{14}^3\right),$$
$$C_{12}^2 = -\frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_2)\left((\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + 2C_{13}^2\right),$$
$$C_{34}^1 = \left(2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + C_{13}^2 - 3C_{14}^3\right)\varepsilon_1\varepsilon_2,$$
$$C_{13}^3 = \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_2)\left(2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + C_{13}^2 - 3C_{14}^3\right),$$
$$C_{13}^4 = \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_2)^2\left(2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + C_{13}^2 - 3C_{14}^3\right),$$
$$C_{12}^3 = -\frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_2)^2\left(2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + C_{13}^2 - C_{14}^3\right).$$

Накладывая на структурные константы условие выполнения тождества Якоби, получаем

$$C_{13}^2 = -2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 + 3C_{14}^3,$$
$$C_{23}^2 = 0, \quad C_{34}^3 = 0, \quad C_{34}^2 = 0,$$

что противоречит виду тензора Риччи (3).

Таким образом справедлива

Теорема. *Оператор Риччи четырехмерной метрической группы Ли с тривиальным тензором Схоутена — Вейля не может иметь тип Сегре* {13}.

4. Заключение. В результате проведенных исследований построена математическая модель, которая позволяет получить полную классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена — Вейля.

Библиографический список

1. Besse A. Einstein manifolds. — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987. DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8

2. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. — 1978. — Vol. 7. DOI: 10.1007/BF00151525

3. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo–riemannian four–manifolds // Tohoku Math. J. — 2014. — Vol. 66. DOI: 10.2748/tmj/1396875661

4. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Lorentzian Lie groups // Differential Geometry and its Applications. — 2013. — Vol. 31. DOI: 10.1016/j.difgeo.2013.04.006

5. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory. — 2015. — Vol. 25.

6. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterranean Journal of Mathematics. — 2016. — Vol. 13, No 5. DOI: 10.1007/s00009-016-0696-6

7. Клепиков П.Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена — Вейля // Известия вузов. Математика. — 2017. — No 8.

8. Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric // Journal of mathematical sciences. — 2014. — Vol. 198, No 5. DOI: 10.1007/s10958-014-1806-2

9. Voronov D.S., Rodionov E.D. Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor // Doklady Mathematics. — 2010. — Vol. 81, No 3. DOI: 10.1134/S1064562410030154

10. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups // Siberian Advances in math. — 2013. — Vol. 23, No 1. DOI: 10.3103/S1055134413010033

11. Law P.R. Algebraic classification of the Ricci curvature tensor and spinor for neutral signature in four dimensions // arXiv:1008.0444, 2010.

12. Гладунова О.П. Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник Алт. гос. пед. ун-та. — 2006. — № 6–2.

13. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Изв. Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1–1 (77).

14. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Изв. Алт. гос. ун-та. — 2017. — № 1 (93). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28

15. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — Vol. 21, No 3. DOI: 10.1016/S0001-8708(76)80002-3

16. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом тензора Схоутена — Вейля // ДАН. — 2005. — Т. 401, № 4.

17. Kodama H., Takahara A., Tamaru H. The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling // Manuscripta math. — 2011. — Vol. 135. DOI: 10.1007/s00229-010-0419-4

18. Kubo A., Onda K., Taketomi Y., Tamaru H. On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups // arXiv:1509.08336, 2015.

19. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Построение обобщенных базисов Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли // Изв. Алт. гос. ун-та. — 2015. — № 1/1 (85). DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.1-13

20. O'Neill B. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity — Academic Press, 1983.