

Научная статья

УДК 517.95+532.5

DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-13

Некоторые аналитические решения задачи фильтрации газа в тонком пороупругом слое

Маргарита Андреевна Токарева¹, Вардан Баландурович Погосян²

¹Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, tma25@mail.ru

²Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, pogosyanvb@gmail.com

Original article

Some Analytical Solutions to the Problem of Gas Filtration in a Thin Poroelastic Layer

Margarita A. Tokareva¹, Vardan B. Pogosyan²

¹Altai State University, Barnaul, Russia, tma25@mail.ru

²Altai State University, Barnaul, Russia, pogosyanvb@gmail.com

Аннотация. Одним из рациональных вариантов захоронения углекислого газа (CO_2) является сбор и захоронение газа в выработанные нефтяные и газовые месторождения. Углекислый газ, поданный в скважину под очень высоким давлением, смешивается с остатками нефти, увеличивая ее объем и снижая вязкость. Благодаря этому можно увеличить нефтедобычу. Перед закачкой скважины тестируются для обеспечения правильных геологических условий. Чтобы определить правильное место для закачки и удержания CO_2 , который задерживается в микроскопических порах горных пород в результате того же процесса, который задерживал нефть, газ и природный CO_2 на протяжении миллионов лет, необходимо найти проницаемую горную породу, достаточно стабильную, чтобы CO_2 находился в жидком состоянии. Данные процессы описываются математическими моделями фильтрации жидкостей (газов) в пороупругих средах. К настоящему моменту не существует общепринятого подхода к моделированию движений многофазных систем. Известные модели являются достаточно сложными для применения в прикладных и инженерных задачах. Слабо развита математическая теория обоснования начально-краевых задач, недостаточно результатов о разрешимости и свойствах решений.

Ключевые слова: закон Дарси, пороупругость, фильтрация, точное решение, пористость

Abstract. Collection and burial of carbon dioxide (CO_2) is one of the practical options for carbon dioxide disposal. Carbon dioxide injected into the well at very high pressure mixes with the remaining oil, thus increasing oil volume and reducing its viscosity. Thanks to this, it is possible to increase oil production. Wells are tested before the injection to ensure the proper geological conditions. It is necessary to find a permeable rock that is stable enough to contain CO_2 in a liquid state. Therefore, it is a problem to find a proper injection point to reliably entrap CO_2 in microscopic pores of rocks similarly to the way that entraps oil, gas, and natural CO_2 for millions of years. Such processes are described by mathematical filtration models for liquids and gases in poroelastic media. Up to date, there is no generally accepted approach for modeling the movements of multiphase systems. Some well-known models are quite complex to use in applied and engineering tasks. The mathematical theory to substantiate the initial boundary value problems is poorly developed, and there are insufficient results on the solvability and properties of solutions.

Keywords: Darcy's law, poroelasticity, filtration, exact solution, porosity

Для цитирования: Токарева М.А., Погосян В.Б. Некоторые аналитические решения задачи фильтрации газа в тонком пороупругом слое // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 92–97. DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-13.

Финансирование: работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда № 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045>.

1. Постановка задачи

Сформулируем начально-краевую задачу для уравнений, описывающих фильтрацию газа в деформируемой вязкоупругой пористой среде [1], [2]. Предполагается, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ (T — произвольно заданная положительная постоянная) двухфазная сплошная среда заполняет область Ω . Фильтрация газа происходит в конечной области Ω переменных (x, z) , граница $\Gamma = \partial\Omega$ которой состоит из проницаемой области для газа Γ_1 , соответствующей нагнетательной скважине, непроницаемых границ $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$ и поверхности Γ_4 . Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_i = \Gamma_i \times (0, T)$, $i = 1, \dots, 6$. На глубине H происходит закачка углекислого газа (CO_2) ([3], [4]) со скоростью $v(t)$, ($v(t) \geq 0$), ширина области равна L (рис. 1).

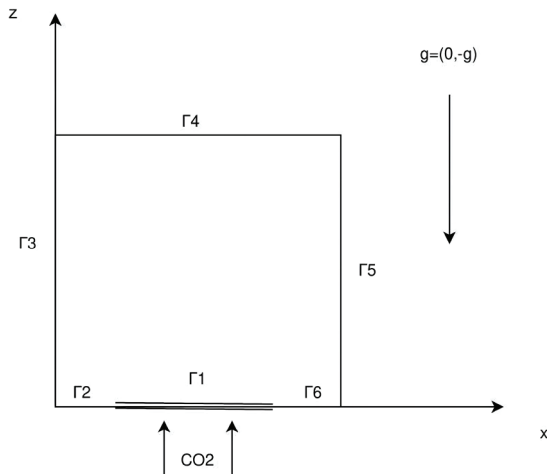


Рис. 1. Область фильтрации

Требуется найти распределение пористости $\phi = \phi(x, z, t)$, поле скоростей жидкой и твердой фаз соответственно $v_f = v_f(x, z, t)$, $v_s = v_s(x, z, t)$ и распределение давлений $p_f = p_f(x, z, t)$, $p_s = p_s(x, z, t)$, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \rho_f \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_s (1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s (1-\phi) \vec{v}_s) = 0,$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -K(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (2)$$

For citation: Tokareva M.A., Pogosyan V.B. Some Analytical Solutions to the Problem of Gas Filtration in a Thin Poroelastic Layer. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 4 (138). P. 92–97. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-13.

Funding: the study was supported by the Russian Science Foundation grant No 23-71-10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045>.

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -a_1(\phi)p_e - a_2(\phi) \frac{dp_e}{dt}, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad (3)$$

$$\rho_f \vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\phi)\eta \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) - \nabla p_{tot} = 0, \quad (4)$$

$$p_{tot} = (1-\phi)p_s + \phi p_f, \quad \rho_{tot} = (1-\phi)\rho_s + \phi \rho_f.$$

Данная система дополняется следующими начально-краевыми условиями:

$$\phi(x, z, 0) = \phi^0(x, z), \quad p_s(x, z, 0) = p_s^0(x, z). \quad (5)$$

$$p_f = p_a \quad (x, z, t) \in S_4, \quad (6)$$

$$(\vec{v}_f \cdot \vec{n}) = 0, \quad (x, z, t) \in S_i, \quad i = 2, 6, \quad (7)$$

$$(\vec{v}_f \cdot \vec{n}) = -v(t), \quad v|_{t=0} = 0, \quad (x, z, t) \in S_1, \quad (8)$$

$$\vec{v}_s = 0, \quad (x, z, t) \in S_i, \quad i = 1, 2, 4, 6, \quad (9)$$

Приведенная начально-краевая задача (1)–(9) описывает двумерное нестационарное движение вязкого газа (жидкости) в вязкоупругой пористой среде. Здесь p_a — атмосферное давление, \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к Γ_i , ρ_f , ρ_s — плотности и тензоры напряжений жидкой и твердой фаз соответственно, \vec{g} — плотность массовых сил, $K(\phi)$ — тензор фильтрации, $a_1(\phi)$, $a_2(\phi)$ — параметры вязкоупругого скелета (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах (x, z, t) . Коэффициенты $K(\phi)$, $a_1(\phi)$, $a_2(\phi)$ могут быть определены опытным путем, в частности, эти коэффициенты могут иметь следующий вид: $a_1 = \phi^m/\eta$, $a_2 = \beta_\phi \phi^b$, $K = \frac{k}{\mu} \phi^n$, где k — проницаемость, μ — вязкость газа (жидкости), β_ϕ — коэффициент упругости твердого скелета (положительные постоянные), $m \in [0, 2]$, $n = 3$, $b = 1/2$ [5].

Вопрос об обосновании многомерной задачи для данной модели остается открытым. Обоснование одномерных задач выполнено в [6, 7]. Численное исследование системы уравнений, аналогичной по структуре, было проведено в [8, 9].

2. Введение малого параметра

Проведем безразмеривание уравнений (1)–(4). Пусть \bar{x} , \bar{z} , \bar{t} — безразмерные переменные, определенные равенствами

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] = [M]$, $[\tau_0] = [1/c]$; k — фиксированный параметр [10].

Положим:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k \tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

$$p_f(t, x, z) = \alpha \bar{p}_f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}), \quad p_s(t, x, z) = \alpha \bar{p}_s(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$p_{tot}(t, x, z) = \alpha \bar{p}_{tot}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$v_s^i(t, x, z) = \beta^i v_s^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}),$$

$$v_f^i(t, x, z) = \beta^i v_f^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}), \quad i = 1, 2,$$

$$v(t) = \varepsilon^k v(\bar{t}),$$

$$K(\phi) = k_0 \bar{K}(\phi), \quad a_1(\phi) = a^1 \bar{a}_1(\phi), \quad a_2(\phi) = a^2 \bar{a}_2(\phi).$$

С учетом вышесказанного имеем

$$\rho_f g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho}_f \bar{g}, \quad \rho_s g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho}_s \bar{g}, \quad \rho g = \frac{\alpha}{H} \bar{\rho} \bar{g}.$$

где $\alpha, \beta^i, k_0, a^1, a^2$ — характерные давление, скорости, а также параметры проницаемости, вязкости и сжимаемости, заданные положительные постоянные, $\beta^1 = \varepsilon^k \tau_0 L$, $\beta^2 = \varepsilon^k \tau_0 H$.

Рассмотрим случай медленного течения газа (жидкости) в пороупругой среде ($k = -2$). Тогда система (1)–(4) после предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ преобразуется к виду (далее черточки опускаются):

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\vec{v}_s) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\vec{v}_f) = 0,$$

$$v_s^1 = v_f^1, \quad (11)$$

$$\frac{\tau_0 L^2}{k_0 \alpha} \phi (v_f^2 - v_s^2) = -K(\phi) \left(\frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f g \right), \quad (12)$$

$$\frac{1}{a^2 \alpha (1-\phi)} \frac{d\phi}{dt} = -a_2(\phi) \frac{d(p_{tot} - p_f)}{dt}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^1}{\partial z} \right) = 0, \quad (14)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^1}{\partial z} \right) = 0. \quad (15)$$

В системе (10)–(15) коэффициенты $\frac{\tau_0 L^2}{k_0 \alpha}$, $\frac{\eta \tau_0}{\alpha}$, $\frac{\tau_0}{a^1 \alpha}$, $\frac{\tau_0 a^2}{a^1}$ безразмерные. Параметры η , τ_0 , L , K фиксированы.

3. Интегрирование системы уравнений

Система (10)–(15) сводится к уравнению для нахождения некоторой функции от ϕ и уравнению для нахождения некоторой функции от p_s . Для остальных искомым функций будут получены конечные формулы.

Опишем схему решения. Уравнение (13) представим в виде

$$\frac{dG(\phi)}{dt} = -\frac{dp_e}{dt},$$

где

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{a^2 \alpha a_2(\phi)(1-\phi)}.$$

Откуда получим уравнение для нахождения $U = G(\phi) - (1-\phi)(p_f - p_s)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v_s^1 \frac{\partial U}{\partial x} + v_s^2 \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

Для нахождения первых компонент скоростей дважды проинтегрируем уравнение (14) по z и с учетом (11), получим

$$v_s^1 = v_f^1 = A(x, t) \int_0^z \frac{1}{1-\phi} d\tau + B(x, t), \quad (17)$$

где функции $A(x, t), B(x, t)$ определим после задания краевых условий.

Уравнение (15) после дифференцирования по z с учетом (17) примет вид

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \left((1-\phi) \frac{\partial v_s^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение по z дважды, получим представление для v_s^2 через ϕ и функции времени и координаты x , которые могут быть найдены после задания краевых условий:

$$v_s^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \int_0^z \frac{\tau}{1-\phi} d\tau + D(x, t) \int_0^z \frac{1}{1-\phi} d\tau + C(x, t). \quad (18)$$

Складывая уравнения (10), получим

$$\text{div}(\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) + \vec{v}_s) = 0.$$

С учетом уравнений (11), (12) имеем

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{k_0 \alpha}{\tau_0 L^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\phi) \left(\frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f g \right) \right).$$

Подставляя в последнее уравнение представления для компонент скорости твердой среды, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x, t) \int_0^z \frac{1}{1-\phi} d\tau \right) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \frac{z}{1-\phi} + D(x, t) \frac{1}{1-\phi} = \\ = \frac{k_0 \alpha}{\tau_0 L^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\phi) \left(\frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho_f g \right) \right). \end{aligned}$$

Проинтегрируем это уравнение дважды по z , получим представление для p_f через ϕ и функции времени и координаты x , которые могут быть найдены после задания краевых условий:

$$p_f(x, t, z) = -\rho_f g z + \frac{\tau_0 L^2}{k_0 \alpha} \int_0^z \frac{1}{K(\phi)} \left[\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x, t) \int_0^\xi \frac{1}{1-\phi} d\tau \right) d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \int_0^\xi \frac{\tau}{1-\phi} d\tau + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \zeta + D(x, t) \int_0^\xi \frac{1}{1-\phi} d\tau + E(x, t) \right] d\xi + F(x, t). \quad (19)$$

Возвращаемся в (12) и получаем представление для v_f^2 через ϕ

$$v_f^2 = -\frac{1}{\phi} \left[\int_0^z \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x, t) \int_0^\xi \frac{1}{1-\phi} d\tau \right) d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \int_0^z \frac{\tau}{1-\phi} d\tau + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} z + D(x, t) \int_0^z \frac{1}{1-\phi} d\tau + E(x, t) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \int_0^z \frac{\tau}{1-\phi} d\tau + D(x, t) \int_0^z \frac{1}{1-\phi} d\tau + C(x, t). \quad (20)$$

Подставляя в (10) представления для компонент скорости твердой фазы, получим уравнение для $s = 1 - \phi$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(sA(x, t) \int_0^z s^{-1} d\tau + sB(x, t) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-s \frac{1}{2} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \int_0^z \frac{\tau}{s} d\tau + sD(x, t) \int_0^z s^{-1} d\tau + C(x, t) \right) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, имеем уравнение (21) для нахождения пористости, представления для скоростей фаз (17), (18) и давления газа (19) через функцию пористости, а также уравнение для нахождения давления твердой фазы (16). Функции A, B, C, D, E, F могут быть найдены с использованием начально-краевых условий.

4. Примеры точного решения

Пусть для уравнений (10)–(15) заданы начально-краевые условия (5)–(9). Тогда реше-

ние данной начально-краевой задачи имеет вид

$$\phi = \phi^0(x, z), \quad \vec{v}_s = 0, \quad v_f^1 = 0, \\ v_f^2 = \begin{cases} \frac{\phi^0(x, 0)}{\phi^0(x, z)} v(t), & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma_2, \Gamma_6, \end{cases}$$

$$p_f = \frac{p_a}{\alpha} + \rho_f g(1-z) + dE(x, t) \left(\int_0^z \frac{1}{K(\phi^0(x, \xi))} d\xi - \int_0^1 \frac{1}{K(\phi^0(x, \xi))} d\xi \right),$$

$$p_s = \frac{p_s^0}{\alpha} - dE(x, t) \left(\int_0^z \frac{1}{K(\phi^0(x, \xi))} d\xi - \int_0^1 \frac{1}{K(\phi^0(x, \xi))} d\xi \right).$$

Результаты численного моделирования представлены на рисунках 2–4 (при $\phi^0(x, z) = 0.2 + 0.2e(-10((x - 0.5)^2 + z^2))$).

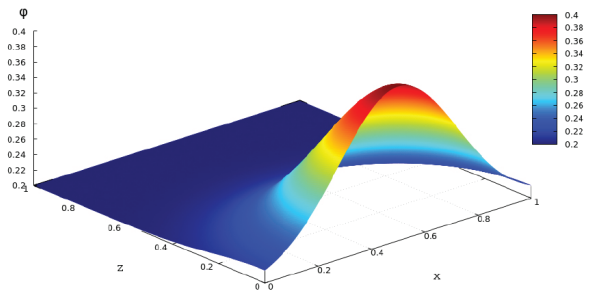


Рис. 2. Распределение пористости

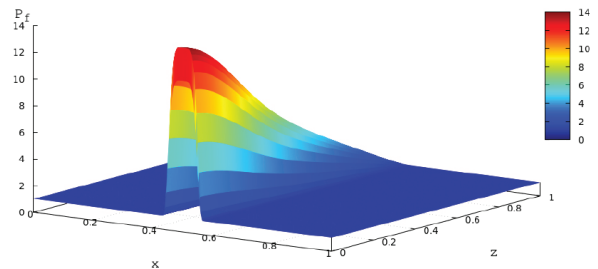


Рис. 3. Распределение давления газа

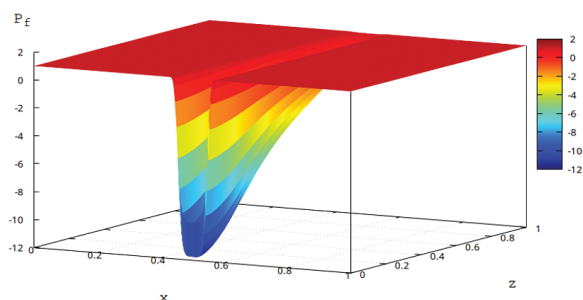


Рис. 4. Распределение давления твердой фазы

Заключение

В настоящей работе построены решения в квадратурах двумерной задачи о движении несжимаемого вязкого газа в вязкоупругой пористой среде на основе выделения малого параметра.

Библиографический список

1. Morency C., Huismans R., Beaumont C. et al. A Numerical Model for Coupled Fluid Flow and Matrix Deformation with Applications to Disequilibrium Compaction and Delta Stability // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2007. Vol. 112. DOI: 10.1029/2006JB004701
2. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Elsevier, 1972. 764 p.
3. Корзун А.В., Ступакова А.В., Харитоновна Н.А. и др. Применимость природных геологических объектов для хранения, захоронения и утилизации углекислого газа (обзор) // *Георесурсы*, 2023. Т. 25. № 2. С. 22–35. DOI: 10.18599/grs.2023.2.2
4. Kanin E., Garagash I., Boronin S. et al. CO₂ Storage in Deep Saline Aquifers: Evaluation of Geomechanical Risks Using Integrated Modeling Workflow, ArXiv.org : Archive of scientific articles. URL: <https://arxiv.org/abs/2301.04931> (дата обращения: 24.01.2024). DOI: 10.48550/arXiv.2301.04931
5. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow in Viscoelastic Rock // *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. P. 55–84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5
6. Papin A.A., Tokareva M.A. On the Existence of Global Solution of the System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Liquid in a Deformable Viscous Porous Medium // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. Vol. 18. № 2. P. 1397–1422. DOI: 10.33048/semi.2021.18.106
7. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M. I. Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics // *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. No 1. P. 21–49. DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003
8. Tokareva M.A, Virts R.A., Larionova V.N. Numerical Study of a Self-Similar Problem of Fluid Filtration in a Viscoelastic Medium in the Field of Gravity // *CEUR Workshop Proceedings. "AMFCS 2021 — Proceedings of the Workshop on Applied Mathematics and Fundamental Computer Science 2021"*. Omsk, Russia, April 24–29, 2021. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2928/paper10.pdf> (дата обращения: 24.01.2024).
9. Вириц П.А., Папин А.А. Моделирование захоронения углекислого газа в вязкоупругой пористой среде // *Вычислительные технологии*. 2022. Т. 27. № 6. С. 4–18. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.002
10. Escher J., Hillairet M., Laurecot P, Walker C. Thin Film Equations with Soluble Surfactant and Gravity: Modeling and Stability of Steady States // *Mathematische Nachrichten*. 2012. Vol. 285. P. 210–222. DOI: 10.1002/mana.201010009

References

1. Morency C., Huismans R., Beaumont C., et al. A Numerical Model for Coupled Fluid Flow and Matrix Deformation with Applications to Disequilibrium Compaction and Delta Stability. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2007. Vol. 112. DOI: 10.1029/2006JB004701
2. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Elsevier, 1972. 764 p.
3. Korzun A.V., Stupakova A.V., Haritonova N.A. et al. The Applicability of Natural Geological Objects for the Storage, Burial and Disposal of Carbon Dioxide (review). *Georesursy*. 2023. Vol. 25. No 2. P. 22–35. (In Russ.). DOI: 10.18599/grs.2023.2.2
4. Kanin E., Garagash I., Boronin S., Zhigulskiy S., Penigin A., Afanasyev A., Garagash D., Osiptsov A. CO₂ Storage in Deep Saline Aquifers: Evaluation of Geomechanical Risks Using Integrated Modeling Workflow. *ArXiv.org: Archive of scientific articles*. URL: <https://arxiv.org/abs/2301.04931> (accessed: 24.01.2024). DOI: 10.48550/arXiv.2301.04931
5. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-Driven Fluid Flow in Viscoelastic Rock. *Geodinamica Acta*. 1998. Vol. 11. P. 55–84. DOI: 10.1016/S0985-3111(98)80006-5
6. Papin A.A., Tokareva M.A. On the Existence of Global Solution of the System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Liquid in a Deformable Viscous Porous Medium. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. Vol. 18. No 2. P. 1397–1422. DOI: 10.33048/semi.2021.18.106
7. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics. *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. No 1. P. 21–49. DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003
8. Tokareva M.A, Virts R.A., Larionova V.N. Numerical Study of a Self-Similar Problem of Fluid Filtration in a Visco-

elastic Medium in the Field of Gravity. *CEUR Workshop Proceedings. "AMFCS 2021 — Proceedings of the Workshop on Applied Mathematics and Fundamental Computer Science 2021"*. Omsk, April 24–29, 2021. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2928/paper10.pdf> (accessed: 24.01.2024).

9. Virts R.A., Papin A.A. Modeling of Carbon Dioxide Burial in a Viscoelastic Porous Medium. *Computational Techno-*

logies. 2022. Vol. 27. No 6. P. 4–18. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.002

10. Escher J., Hillairet M., Laurecot P., Walker C. Thin Film Equations with Soluble Surfactant and Gravity: Modeling and Stability of Steady States. *Mathematische Nachrichten*. 2012. Vol. 285. P. 210–222. DOI: 10.1002/mana.201010009

Информация об авторах

М.А. Токарева, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

В.Б. Погосян, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

M.A. Tokareva, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Altai State University, Barnaul, Russia;

V.B. Pogosyan, Master Student of the Institute of Mathematics and Informational Technology, Altai State University, Barnaul, Russia.