Известия Алтайского государственного университета. 2024. №4 (138). С. 80–85.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 4 (138). P. 80–85.

Научная статья
УДК 517.965.252: 514.172
DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-11

# Достаточные условия выпуклости и аффинности непрерывного отображения

*Ирина Викторовна Поликанова*

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия, Anirix1@yandex.ru

Original article

# Sufficient Conditions for Convexity and Affineness of a Continuous Map

*Irina V. Polikanova*

Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, Anirix1@yandex.ru

***Аннотация.*** В статье устанавливается критерий выпуклости замкнутого множества в топологическом векторном пространстве: замкнутое множество в топологическом векторном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда всякий отрезок с концами в этом множестве содержит хотя бы еще одну точку этого множества. Он обобщает аналогичный результат, установленный ранее для рефлексивных банаховых пространств. С его помощью доказывается достаточное условие планарности k-мерного многообразия в n-мерном аффинном пространстве $A^n$: если всякая хорда k-мерной поверхности, представляющей собой замкнутое множество, содержит еще какую-либо точку поверхности, отличную от своих концов, то поверхность является k-мерной плоскостью или ее выпуклым подмножеством с непустой внутренностью относительно этой плоскости. Вместе с теоремой о замкнутом графике эти 2 утверждения используются для установления достаточных условий выпуклости и аффинности непрерывной функции многих переменных, что позволяет решить функциональное уравнение Йенсена от функций многих переменных в классе непрерывных функций новым способом.

Методы доказательства – топологические.

***Ключевые слова:*** критерий выпуклости множества, аффинная функция, выпуклая функция, функциональное уравнение Йенсена

***Abstract.*** The article establishes a criterion for the convexity of a closed set in a topological vector space: a closed set in a topological vector space is convex if and only if every segment with endpoints in this set contains at least one more point of this set. It generalizes a similar result established earlier for reflexive Banach spaces. It is used to prove a sufficient condition for the planarity of a k-dimensional manifold in an n-dimensional affine space $A^n$: if each chord of a k-dimensional surface, which is a closed set, contains some other point of the surface except its endpoints, then the surface is a k-dimensional plane or its convex subset with non-empty interior relative to this plane. These 2 statements together with the closed graph theorem are used to establish sufficient convexity and affine conditions for a continuous multivariable function. It also allows the Jensen functional equation of multivariable functions in the class of continuous functions to be solved in a new way.

Proof methods are topological.

***Keywords:*** convexity criterion for a set, affine function, convex function, Jensen's functional equation

***Для цитирования:*** Поликанова И.В. Достаточные условия выпуклости и аффинности непрерывного отображения // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 80–85. DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-11.

***For citation:*** Polikanova I.V. Sufficient Conditions for Convexity and Affineness of a Continuous Map. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 4 (138). P. 80–85. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-11.

**Введение**

Выпуклые множества играют важную роль в общей теории экстремальных задач, теории оптимального управления и многочисленных приложениях в механике, экономике и других областях. Наиболее обстоятельный обзор достаточных условий выпуклости множества представлен в книге Ю.Д. Бураго и В.А. Залгаллера [1]. Некоторые признаки, позволяющие сделать заключение о выпуклости множества, имеются в [2, 3]. В статье на основе топологических соображений доказывается критерий выпуклости замкнутого множества (раздел 1): *замкнутое множество в топологическом векторном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда всякий отрезок с концами в данном множестве содержит по крайней мере еще одну точку этого множества.* Он обобщает аналогичное утверждение, сформулированное и доказанное в [3] для рефлексивного банахова пространства. Вместе с теоремой о замкнутом графике (раздел 2) предложенный критерий выпуклости используется для установления достаточных условий выпуклости и аффинности непрерывной функции многих переменных, что позволяет решить уравнение Йенсена от функций многих переменных новым способом (раздел 3).

## 1. Критерий выпуклости замкнутого множества

Под *топологическим действительным векторным пространством* $X$ (сокращенно ТВП) понимаем векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, наделенное топологией, при которой линейные операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число непрерывны. Элементы ТВП будем называть точками (хотя они по сути векторы).

Точки пространства будем обозначать малыми буквами латинского алфавита. Для двух различных точек $x$, $y$ пространства $X$ определены понятия *прямой* $xy$, проходящей через точки $x$ и $y$:

$$xy = \{\lambda y + (1-\lambda)x | \ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

*отрезка* с концами $x$ и $y$:

$$[xy] = \{\lambda y + (1-\lambda)x | \ \lambda \in [0,1]\}.$$

Множество $F$ в ТВП называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек $x$ и $y$ оно содержит и отрезок с концами в этих точках.

**Лемма 1.** *Отображение $\phi : \mathbb{R} \to xy$, определенное формулой*

$$\phi(\lambda) = \lambda y + (1-\lambda)x = x + \lambda(y-x), \qquad (1)$$

*при фиксированных $x$ и $y$ биективно и непрерывно.*

`Доказательство.` Действительно, оно сюръективно по определению прямой $l = xy$. Ввиду того, что $x \neq y$, а значит, $y - x \neq 0$, оно инъективно:

$$\phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2) \ \Rightarrow \ \phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\lambda_1 y + (1-\lambda_1)x - \lambda_2 y - (1-\lambda_2)x = 0 \ \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y-x) = 0 \ \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2.$$

Непрерывность отображения $\phi(\lambda)$ при фиксированных $x$ и $y$ означает его непрерывность в произвольной точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, т.е. для любой окрестности $W$ точки $x + \lambda_0(y-x)$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x + \lambda(y-x) \in W$, когда $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

В силу непрерывности сложения в $X$ для такой окрестности $W$ найдутся окрестность $U$ точки $x$ и окрестность $V$ точки $\lambda_0(y-x)$ такие, что

$$\forall_{x' \in U} \forall_{y' \in V} \quad x' + y' \in W$$

в частности, так как $x \in U$, то $x + y' \in W$ для любого $y' \in V$. В силу непрерывности умножения на скаляр для окрестности $V$ найдутся окрестность $\tilde{V}$ точки $y - x$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что $\lambda\tilde{y} \in V$, когда $\tilde{y} \in \tilde{V}$ и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. В частности, так как $y - x \in \tilde{V}$, то $\lambda(y-x) \in V$ при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Тогда при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ имеем: $x + \lambda(y-x) \in W$, что и требовалось показать.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$.

**Лемма 2.** *Если открытые интервалы $(a,b)$ и $(c,d)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ содержат общую точку $t$ и $a \notin (c,d)$, $b \notin (c,d)$, то $(c,d) \subset [a,b]$.*

`Доказательство.`
$t \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad a < t < b.$
$t \in (c,d) \quad \Rightarrow \quad c < t < d.$
Из $a < t$ и $t < d$ следует: $a < d$. Тогда $c \neq -\infty$.
Из $c < t$ и $t < b$ следует: $c < b$. Тогда $d \neq +\infty$.
$a \notin (c,d) \ \Rightarrow \ a \in (-\infty, c] \cup [d, +\infty) \ \Rightarrow \ a \in (-\infty, c].$
$b \notin (c,d) \ \Rightarrow \ b \in (-\infty, c] \cup [d, +\infty) \ \Rightarrow \ b \in [d, +\infty).$
Значит, $a \leq c$, $d \leq b$. Таким образом,
$a \leq c < t < d \leq b \ \Rightarrow \ (c,d) \subset [a,b].$

**Теорема 1.** *Замкнутое множество в ТВП выпукло тогда и только тогда, когда всякий отрезок с концами, принадлежащими этому множеству, содержит по крайней мере еще одну точку этого множества.*

`Доказательство.` В одну сторону утверждение очевидно.

Докажем теперь: если замкнутое множество $F \subset X$ обладает таким свойством, что всякий отрезок с концами, принадлежащими множеству $F$, содержит по крайней мере еще одну точку этого множества, то множество $F$ выпукло. Допустим противное: множество $F$ невыпукло. Тогда существует отрезок $[xy]$ с концами в $F$, некоторая точка $z$ которого не принадлежит множеству $F$. Обозначим прямую $xy$ буквой $l$. По лемме 1 отображение $\phi : \mathbb{R} \to l$, определенное формулой (1), непрерывно и биективно.

Так как $F$ — замкнутое множество в $X$, то множество $l \setminus F$ — открытое множество в индуцированной топологии на $l$, а его прообраз при непрерывном отображении $\phi$ есть открытое множество в $\mathbb{R}$, содержащее число $t = \phi^{-1}(z)$. Так как $z \in [xy]$ и $z \neq x$, $z \neq y$, то по определению отрезка $[xy]$ имеем: $t \in (0,1)$. Пусть $\tau$ — связная компонента множества $\phi^{-1}(l \setminus F)$, содержащая $t$. Известно, что связные компоненты открытого множества в $\mathbb{R}$ представляют собой интервалы (подмножества $\mathbb{R}$ вида $(a,b)$, возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$), концы которых принадлежат его замкнутому дополнению ([4], теорема 21, с. 135). Поэтому $\tau$ — открытый интервал $(t_1, t_2)$ с концами в множестве $\overline{\mathbb{R}} \setminus \phi^{-1}(l \setminus F)$. В силу биективности отображения $\phi$ обратное отображение $\phi^{-1}$ также биективно и $\mathbb{R} \setminus \ \phi^{-1}(l \setminus F) = \phi^{-1}(l) \setminus \ \phi^{-1}(l \setminus F) = \phi^{-1}(l \setminus (l \setminus F)) = \phi^{-1}(l \cap F)$. Таким образом, $t_1, t_2 \in \phi^{-1}(l \cap F) \cup \{-\infty, \infty\}$. Заметим, что $0 \notin (t_1, t_2)$ и $1 \notin (t_1, t_2)$, иначе бы $x = \phi(0) \in \phi(\tau) \subset l \setminus F$ или $y \in l \setminus F$ в противоречии с условием. По лемме 2 так как $t \in (t_1, t_2)$ и $t \in (0,1)$, то $(t_1, t_2) \subset [0,1]$, т.е. $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Обозначим: $x_i = \phi(t_i)$ $i = 1, 2$. Тогда $x_i \in l \cap F$. Покажем, что прямолинейный отрезок $[x_1, x_2]$ не содержит других точек множества $F$ кроме концов. $x_1 = x + t_1(y-x)$, $x_2 = x + t_2(y-x)$. Пусть точка $u \in [x_1 x_2]$, $u \neq x_1$ и $u \neq x_2$. Тогда существует $\mu \in (0,1)$ такое, что $u = x_1 + \mu(x_2 - x_1) = x + t_1(y-x) + \mu(t_2 - t_1)(y-x) = x + (\mu t_2 + (1-\mu)t_1)(y-x)$. Так как $t_1 < t_2$ и $\mu \in (0,1)$, то $t_1 < \mu t_2 + (1-\mu)t_1 < t_2$. Следовательно, $u \in \phi(\tau) \Rightarrow u \in l \setminus F$. Показали. А это противоречит определению множества $F$. Сделанное допущение ложно и $F$ — выпуклое множество.

**Замечание 1.** Для незамкнутых множеств утверждение неверно. Всякое всюду плотное множество отрезка числовой прямой $\mathbb{R}$ обладает свойством, что между любыми его двумя точками содержится точка этого множества. Однако выпуклым оно не является.

**Замечание 2.** В ([3], лемма 1.2, с. 8) имеется аналогичное утверждение, сформулированное для рефлексивного банахова пространства, опирающееся на свойство существования для данной точки ближайшей точки замкнутого множества. Поэтому при доказательстве использовались как метрические понятия, так и компактность сферы, для чего и понадобилось требование рефлексивности банахова пространства. Так как банахово пространство является ТВП, то теорема 1 обобщает результат, содержащийся в [3]. Также она обобщает и наш аналогичный результат, сформулированный для аффинного $n$-мерного пространства [5].

Под *$k$-мерной поверхностью*, $1 \leq k < n$, понимаем $k$-мерное связное многообразие в ТВП.

*Хорда* поверхности — отрезок, концы которого принадлежат поверхности.

**Теорема 2.** *Если всякая хорда $k$-мерной поверхности, представляющей собой замкнутое множество, содержит еще какую-либо точку поверхности, отличную от своих концов, то поверхность является $k$-мерной плоскостью или ее выпуклым подмножеством с непустой внутренностью относительно этой плоскости.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $k$-мерная поверхность, обладающая указанным в теореме свойством, является выпуклым $m$-мерным множеством.

**Замечание 3.** Напомним, что понятие замкнутой поверхности неравнозначно понятию поверхности, являющейся замкнутым множеством: первая есть компактное многообразие без края, вторая может иметь край (например, полусфера) или не быть компактным множеством (например, параболоид). Также неравнозначны понятия выпуклой поверхности и поверхности, являющейся выпуклым множеством. Выпуклая поверхность — это граница выпуклого множества, и выпуклым множеством она является как раз в указанном выше случае.

## 2. Теорема о замкнутом графике

Всюду ниже $X$ — ТВП.

Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу (сверху)* в точке $x_0$, если

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

$$(\text{соответственно} \quad \overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)).$$

**Теорема 3.** *Пусть $f : D_f \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная на замкнутом множестве $D_f \subset X$. Тогда*

a) *если $f$ полунепрерывна снизу в $D_f$, то ее надграфик*

$$\Gamma_f^+ = \{(x, \alpha) \in D_f \times \mathbb{R} | \ \alpha \geq f(x)\}$$

*замкнут в $X \times \mathbb{R}$;*

b) *если $f$ полунепрерывна сверху в $D_f$, то ее подграфик*

$$\Gamma_f^- = \{(x, \alpha) \in D_f \times \mathbb{R} | \ \alpha \leq f(x)\}$$

*замкнут в $X \times \mathbb{R}$;*

c) *если $f$ непрерывна в $D_f$, то ее график*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | \ x \in D_f\}$$

*является замкнутым множеством в $X \times \mathbb{R}$.*

*Если к тому же $X = A^n$ — аффинное $n$-мерное пространство, а $D_f$ — замкнутое, с непустой внутренностью, выпуклое множество в $X$, то график $\Gamma_f$ является $n$-мерным многообразием с краем.*

`Доказательство:` a) заметим, что $\Gamma_f^+ \subset D_f \times \mathbb{R}$. Незначительно видоизменяя доказательство теоремы 7.2 в ([3] в пунктах $b) \Rightarrow c)$ и $c) \Rightarrow a)$), учитывая замкнутость множества $D_f$, установим замкнутость множества $\Gamma_f^+$ в $D_f \times \mathbb{R}$. А поскольку множество $D_f \times \mathbb{R}$ замкнуто в $X \times \mathbb{R}$, будучи произведением замкнутых множеств [6, с. 63], то $\Gamma_f^+$ — замкнутое множество и в $X \times \mathbb{R}$ [6, с. 46];

b) аналогично доказывается, что подграфик $\Gamma_f^-$ полунепрерывной сверху функции $f$ замкнут в $X \times \mathbb{R}$.

Пункт c) вытекает из a), b), так как непрерывность функции $f$ означает одновременную полунепрерывность ее сверху и снизу, что влечет замкнутость надграфика и подграфика функции $f$. Тогда график $\Gamma_f = \Gamma_f^+ \cap \Gamma_f^-$ замкнут, будучи пересечением замкнутых множеств.

Пусть $X = \mathbb{A}^n$. Докажем, что график $\Gamma_f$ гомеоморфен $D_f$. Отображение $g : D_f \to \Gamma_f$, определенное формулой $g(x) = (x, f(x))$, очевидно биективно. Докажем его непрерывность. Для любой окрестности $V(x_0) \times V(f(x_0))$ из базы окрестностей произвольной точки $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$ в пространстве $\mathbb{A}^n \times \mathbb{R}$, где $V(x_0)$, $V(f(x_0))$ окрестности точек $x_0$ и $f(x_0)$ в пространствах $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{R}$ соответственно, в силу непрерывности функции $f$ найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ в индуцированной топологии на $D_f$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Пусть $W(x_0) = U(x_0) \cap V(x_0)$. Тогда $W(x_0)$ — окрестность точки $x_0$ в индуцированной топологии на $D_f$ такая, что $f(W(x_0)) \subset f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Следовательно,

$$g(W(x_0)) = W(x_0) \times f(W(x_0)) \subset$$

$$\subset (V(x_0) \times V(f(x_0)) \cap \Gamma_f.$$

Это означает непрерывность отображения $g$. Обратное отображение $g^{-1}$ определяется формулой $g^{-1}(x, \beta) = x$ и представляет собой проектирование на 1-й сомножитель топологического произведения $\mathbb{A}^n \times \mathbb{R}$, которое, как известно, непрерывно. Таким образом, отображение $g$ является гомеоморфизмом. Так как замкнутое выпуклое с непустой внутренностью множество $D_f$ в $\mathbb{A}^n$ является $n$-мерным многообразием, возможно, с краем (если $D_f \neq \mathbb{A}^n$), то и график $\Gamma_f$ является $n$-мерным многообразием с краем или без края. Доказано.

**Замечание 4.** В случае когда $D_f = X$, пункты a), b) следуют из ([3], теорема 7.2, с. 31). Для того чтобы воспользоваться теоремой 1, нам важно, чтобы замкнутость графика, надграфика и подграфика рассматривалась во всем пространстве $X \times \mathbb{R}$. Поэтому замкнутость множества $D_f$ существенна.

## 3. Достаточные условия выпуклости и аффинности функции

Пусть $X$ — ТВП. Заданная на замкнутом, с непустой внутренностью, выпуклом множестве $D_f \subset X$ функция $f$ называется *выпуклой* ([2], определение 10.3, с. 92), если ее надграфик представляет собой выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$.

**Теорема 4.** *Если для функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной и полунепрерывной снизу на $D_f \subset X$, выполнено условие:*

$$(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_f)\ \ (\exists\, \lambda \in (0,1))$$

$$f\,(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \qquad (2)$$

*то функция $f(\boldsymbol{x})$ выпукла.*

`Доказательство.` Пусть для функции $f$ выполнено условие теоремы. Для любых точек $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \alpha)$ и $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \beta)$ надграфика $\Gamma_f^+$ функции $f$ справедливо: $f(\mathbf{x}) \le \alpha$ и $f(\mathbf{y}) \le \beta$. Условие (2) влечет:

$$f\,(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

при некотором $\lambda \in (0,1)$. В силу выпуклости множества $D_f$ точка $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in D_f$, и последнее неравенство означает, что точка

$$\tilde{\mathbf{x}}_\lambda = (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)$$

$$= \lambda(\mathbf{x}, \alpha) + (1-\lambda)(\mathbf{y}, \beta) = \lambda\tilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\tilde{\mathbf{y}}$$

отрезка $[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}]$ принадлежит надграфику $\Gamma_f^+$. По теореме 3 множество $\Gamma_f^+$ замкнуто в $X \times \mathbb{R}$, а по теореме 1 выпукло. Значит, $f$ — выпуклая функция. Доказано.

**Замечание 5.** В ([2], теорема 10.1, с. 93) данное утверждение доказано без условия полунепрерывности снизу функции $f$, однако при более сильном предположении: в (2) вместо квантора существования $\exists$ стоит квантор общности $\forall$. Как сообщают источники [7, с. 295], сам Йенсен исходил из (2) при $\lambda = \frac{1}{2}$. В теоремах 4, 5 число $\lambda$ не обязано быть фиксированным: для каждой пары точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ оно может быть свое.

Стоит также отметить, что для теоремы 4 известно обратное утверждение в усиленном варианте ([2], теорема 10.1, с. 93, [7], с. 301): если функция $f$ выпукла, то для любого набора точек $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_k \in D_f$, $k \ge 2$, и любых положительных чисел $\lambda_1$, ...,$\lambda_k$, таких, что $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$, справедливо *неравенство Йенсена*:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{x}_i).$$

Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ далее будем обозначать жирным шрифтом:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n),$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *аффинной*, если она представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n + b_0 = \mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0, \quad (3)$$

*где $b_0$, $b_1$, ... $b_n$ — действительные числа.*

Всюду ниже $D_f$ — замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 5.** *Всякая непрерывная функция $f : D_f \to \mathbb{R}$, определенная условием:*

$$(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_f)\ \ (\exists\, \lambda \in (0, 1))$$

$$f\left(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \quad (4)$$

*является аффинной.*

Доказательство. Пусть для функции $f$ выполнено условие теоремы. В силу выпуклости множества $D_f$ все точки отрезка $[\mathbf{xy}]$ с концами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_f$ принадлежат $D_f$, и условие (4) означает, что для любых двух точек $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ и $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$ графика $\Gamma_f$ функции $f$ существует точка $(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}))$ этого графика, принадлежащая прямолинейному отрезку с концами в этих точках. По теореме 3 график $\Gamma_f$ представляет собой $n$-мерное многообразие и замкнутое множество. По теореме 2 он содержится в некоторой гиперплоскости, которая в $\mathbb{R}^{n+1}$ задается уравнением:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n + c_{n+1}y_{n+1} + c_0 = 0,$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n+1$. Координаты точек графика должны ему удовлетворять:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{n+1}f(\mathbf{x}) + c_0 = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{x} \in D_f$. Заметим, что коэффициент $c_{n+1} \neq 0$, иначе множество $D_f$ содержалось бы в $(n-1)$-мерной плоскости в $\mathbb{R}^n$, задаваемой уравнением

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n + c_0 = 0,$$

что противоречит тому, что выпуклое множество $D_f$ имеет непустую внутренность относительно пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда, выразив из (5) $f(\mathbf{x})$, после переобозначения $b_i = -\frac{c_i}{c_{n+1}}$, $i = 0, 1, ..., n$ придем к (3). Доказано.

**Следствие.** *Единственными решениями уравнения Йенсена при произвольном фиксированном $\lambda \in (0, 1)$*

$$f\left(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) \quad (6)$$

*в классе непрерывных функций $f : Q \to \mathbb{R}$, определенных на замкнутом, с непустой внутренностью, выпуклом множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, являются аффинные отображения (3).*

Доказательство. Тот факт, что функции (3) являются решениями уравнения (6) при любых действительных числах $b_0$, $b_1$, ... $b_n$ проверяется подстановкой их в уравнение (6):

$$f\left(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right) = \mathbf{b} * (\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) + b_0 =$$

$$= \lambda\mathbf{b} * \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{b} * \mathbf{y} + \lambda b_0 + (1-\lambda) b_0 =$$

$$= \lambda(\mathbf{b}*\mathbf{x} + b_0) + (1-\lambda)(\mathbf{b}*\mathbf{y} + b_0) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

Единственность решений обеспечивает теорема 5.

### Заключение

На основании нового критерия выпуклости замкнутого множества в ТВП мы выработали достаточное условие планарности поверхности, которое позволило по-новому решить уравнение Йенсена для функций многих переменных. При традиционном изложении теории функциональных уравнений сначала находится решение аддитивного уравнения Коши для функций одной переменной последовательно на множествах: натуральных чисел, затем целых, рациональных и действительных (в классе непрерывных функций) [8]. Решение аддитивного уравнения Коши для функций нескольких переменных сводится к решению уравнения Коши для функций одной переменной [9]. Уравнение Йенсена сводится к уравнению Коши заменой функции. Мы же решаем уравнение Йенсена, непосредственно опираясь на критерий планарности, не сводя уравнение к уравнению от одной переменной, а уже к уравнению Йенсена сводим уравнение Коши. Использование предложенной нами конструкции, называемой мультифункциями [10], позволило существенно расширить класс функциональных уравнений от функций многих переменных, имеющих решения в явном виде. В [10] приведены решения четырех типов уравнений Коши, Лобачевского и других.

## Библиографический список


1. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Достаточные признаки выпуклости // Вопросы глобальной геометрии. Зап. научн. сем. ЛОМИ. Л.: Наука, 1974. Т. 45. С. 3–53.
2. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. Стрекаловский А.С. Введение в выпуклый анализ. Иркутск: Иркутский университет, 2009. 81 с.
4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. СПб.: Лань, 2010. 368 с.

5. Поликанова И.В. Критерии прямолинейности кривой // Классическая и современная геометрия : матер. Международной конф., посв. 100-летию со дня рожд. проф. Левона Сергеевича Атанасяна (15 июля 1921 — 5 июля 1998), Москва, 1–4 ноября 2021 г. Ч. 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН. М., 2021. Т. 220. С. 86–98. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-86-98

6. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления ; в 3 т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т 1. 680 с.

8. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи математических наук. 1956. Т. 11:3. № 69. С. 3–68.

9. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.

10. Поликанова И.В. Функциональные уравнения от функций многих переменных // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2023. № 9. С. 30–45.

## References

1. Burago Yu.D., Zalgaller V.A. Sufficient Conditions for Convexity. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*. Leningrad: Nauka, 1974. Vol. 45. P. 3–53. (In Russ.).

2. Leichtweis K. *Convex Sets*. Moscow: Nauka, 1985. 336 p. (In Russ.).

3. Strekalovsky A.S. *Introduction to Convex Analysis*. Irkutsk: Irkutsk University, 2009. 81 p. (In Russ.).

4. Alexandrov P.S. *Introduction to Set Theory and General Topology*. Saint Petersburg: Lan, 2010. 368 p. (In Russ.).

5. Polikanova I.V. Curve Straightness Criteria. *Klassicheskaya i Sovremennaya Geometriya : Materialy Mezhdunarodnoy Konferentsii, Posvyashchonnoy 100-letiyu so Dnya Rozhdeniya Professora Levona Sergeyevicha Atanasyana (July 15 1921 — July 5 1998), Moscow, November 1-4, 2021. Part 1. Itogi nauki i tekhn. Ser. sovrem. mat. i yeyo pril. Temat. obzor, VINITI RAN.* Moscow, 2021. Vol. 220. P. 86–98. (In Russ.). DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-86-98.

6. Bourbaki N. *General Topology. Basic Structures*. Moscow: Nauka, 1968. 272 p. (In Russ.).

7. Fikhtengol'ts G.M. *Course of Differential and Integral Calculus,* in 3 volumes, Moscow: FIZMATLIT, 2003. Vol. 1. 680 p. (In Russ.).

8. Aczel J. Some General Methods in the Theory of Functional Equations of One Variable. New Applications of Functional Equations. *Russian Mathematical Surveys.*1956. Vol. 11(3). No 69. P. 3–68. (In Russ.).

9. Aczel J., Dhombres J. *Functional Equations in Several Variables.* Moscow: FIZMATLIT, 2003. 432 p. (In Russ.).

10. Polikanova I.V. Functional equations for functions of several variables. *Trudy Seminara po Geometrii i Matematicheskomu Modelirovaniyu*. 2023. No 9. P. 30–45. (In Russ.).

***Информация об авторе***

**И.В. Поликанова,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия.

***Information about the author***

**I.V. Polikanova,** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia.