Известия Алтайского государственного университета. 2024. №4 (138). С. 75–79.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 4 (138). P. 75–79.

Научная статья
УДК 514.76
DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-10

# О конформном множителе в конформном аналоге уравнения Киллинга на многообразиях Каэна — Уоллаха с нулевым тензором Вейля

*Дмитрий Николаевич Оскорбин[1], Евгений Дмитриевич Родионов[2]*

[1]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия, oskorbin@yandex.ru
[2]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru

Original article

# On the Conformal Factor in the Conformal Analogue of the Killing Equation on Cahen — Wallach Manifolds with Zero Weyl Tensor

*Dmitry N. Oskorbin[1], Eugene D. Rodionov[2]*

[1]Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia, oskorbin@yandex.ru
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru

***Аннотация.*** Конформно киллинговы векторные поля играют важную роль при изучении группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. В лоренцевой геометрии и теоретической физике подробно изучаются лоренцевы симметрические пространства. Данные пространства классифицированы Каэном и Уоллахом, их свойства хорошо изучены в размерности 4 в связи с приложениями в физике. Векторные поля Киллинга и солитоны Риччи на обобщенных пространствах Каэна — Уоллаха изучались Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым и другими. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи, векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако для различных значений константы Эйнштейна роль полей Киллинга играют конформно киллинговы векторные поля. Известно, что при ненулевом тензоре Вейля конформный множитель в конформном аналоге уравнения Киллинга является постоянным. В данной работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на многообразиях Каэна — Уоллаха в случае нулевого тензора Вейля, получен общий вид конформного множителя этого уравнения.

***Ключевые слова:*** конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, симметрические пространства, киллинговы векторные поля, многообразия Каэна — Уоллаха.

***Abstract.*** Conformally Killing vector fields play an important role in the study of the group of conformal transformations of a manifold, Ricci flows on a manifold, and the theory of Ricci solitons. Lorentzian symmetric spaces are studied in detail in Lorentzian geometry and theoretical physics. These spaces are classified by Cahen and Wallach, and their properties are well studied in dimension 4 due to their various applications in physics. Killing vector fields and Ricci solitons on generalized Cahen — Wallach spaces were studied by D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov and others. Killing vector fields allow finding a general solution to the Ricci soliton equation corresponding to the Einstein constant for the cases when the Einstein constant maintains its constancy. However, conformally Killing vector fields play the role of the Killing fields when the Einstein constant varies. It is known that the conformal factor in the conformal analogue of the Killing equation is constant for a non-zero Weyl tensor. In this paper, the conformal analogue of the Killing equation on Cahen — Wallach manifolds with a zero Weyl tensor is studied, and a general form of the conformal factor of this equation is obtained.

***Keywords:*** conformally Killing vector fields, Lorentzian manifolds, symmetric spaces, Killing vector fields, Cahen — Wallach manifolds

***Для цитирования:*** Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. О конформном множителе в конформном аналоге уравнения Киллинга на многообразиях Каэна — Уоллаха с нулевым тензором Вейля // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 75–79. DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-10

***For citation:*** Oskorbin D.N., Rodionov E.D. On the Conformal Factor in the Conformal Analogue of the Killing Equation on Cahen — Wallach Manifolds with Zero Weyl Tensor. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 4 (138). P. 75–79. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-10

## 1. Основные определения

Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор $g$. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется лоренцевым многообразием.

Псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется симметрическим порядка 1 или просто симметрическим, если $\nabla R = 0$, где $R$ — тензор кривизны $(M, g)$, а $\nabla$ — связность Леви-Чивиты.

Каэн и Уоллах в работах [1–3] показали, что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $(\mathbb{R}, -dt^2)$, универсальной накрывающей $k$-мерного пространства Де Ситтера или анти-Де Ситтера ($k \geq 2$), пространства Каэна — Уоллаха, то есть пространства $CW^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$ с метрикой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} H_i (x^i)^2\Big) du^2.$$

Отметим, что исследованию пространств Каэна — Уоллаха посвящены работы многих математиков [4–7]. Они возникают также при изучении пространств, имеющих существенные группы конформных преобразований [8, 9]. Солитоны Риччи и киллинговы поля на обобщениях пространств Каэна — Уоллаха изучены в [10].

**Определение.** Гладкое полное векторное поле $X$ на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_X g = 0$, где $L_X g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля $X$.

**Определение.** Гладкое полное векторное поле $X$ на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется конформно киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_X g = C(P) g$, где $L_X g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля $X$, $P \in \mathcal{M}$, а $C(P)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Пусть $(\mathcal{M}, g)$ многообразие Каэна — Уоллаха размерности $n + 2 \geq 5$. Выберем в $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{n+2}$ систему координат $(v,\, x^i,\, u)$, где $1 \leq i \leq n$, такую, что

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} H_i (x^i)^2\Big) du^2, \qquad (1)$$

где $H_i$ — ненулевые действительные числа.

Вид конформного множителя $f(p)$ в уравнении конформного уравнения Киллинга $L_X \cdot g = f(p) \cdot g$ зависит от того, является ли метрика конформно плоской. Путем прямых вычислений компонент тензора Вейля доказывается следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие Каэна — Уоллаха размерности $n+2$. $\mathcal{M}$ является конформно плоским в том и только том случае, когда $H_i = H_j$.

**Доказательство.** Ненулевые компоненты тензора Вейля на многообразии с метрикой (1) имеют вид: $\frac{1}{n-2}((2-n)H_i + \sum\limits_{j=1}^{n-2} H_j$. Условие равенства нулю тензора Вейля, таким образом, равносильно $H_i = H_j$.

## 2. Уравнение конформно-киллингова поля в локальных координатах

Перейдем к анализу уравнения конформно-киллингова векторного поля. Зафиксируем точку $p \in \mathcal{M}$ и рассмотрим уравнение $L_X g = f \cdot g$ в локальных координатах. Обозначим координаты искомого векторного поля $X$ через $V = V(v, x^1, ..., x^n, u)$, $X^i = X^i(v, x^1, ..., x^n, u), i = 1, ..., n$, $U = U(v, x^1, ..., x^n, u)$ ($V$, $X_i$, $U$ — гладкие функции), $H = \sum_{i=1}^{n} H_i (x^i)^2$, тогда получим систему уравнений для нахождения конформного множителя $C = C(v, x^1, ..., x^n, u)$ и конформно киллинговых векторных полей в локальных координатах:

$$\partial_v U = 0; \qquad (2)$$
$$\partial_i U + \partial_v X^i = 0; \qquad (3)$$
$$\partial_i X^j + \partial_j X^i = 0; \qquad (4)$$
$$C = 2\partial_i X^i; \qquad (5)$$
$$C = \partial_u U + \partial_v V; \qquad (6)$$
$$\partial_i U H + \partial_u X^i + \partial_i V = 0; \qquad (7)$$
$$-CH + 2\partial_u U H + 2\partial_u V + \sum X^i \partial_i H = 0. \qquad (8)$$

Ранее в работе [11] был проведен анализ уравнения Киллинга для плоских волн. Ниже мы следуем отдельным рассуждениям этой работы.

Из (1) $U$ не зависит от $v$. Дифференцируем (3) и (6) по $v$: $\partial^2_{vv} X^i = 0$, $\partial^2_{vv} V = \partial_v C$. Следовательно, что $X^i$ линейны по переменной $v$.

Дифференцируем (4) по $v$, а (3) по $x^i$, получаем:

$$\partial^2_{iv}X^j + \partial^2_{jv}X^i = 0; \quad \partial^2_{ij}U + \partial^2_{vj}X^i = 0.$$

Меняя в последнем равенстве порядок дифференцирования, получаем $\partial^2_{ij}U + \partial^2_{vj}X^i = \partial^2_{ij}U + \partial^2_{vi}X^j = 0$ и с учетом $\partial^2_{iv}X^j + \partial^2_{jv}X^i = 0$ получим $\partial^2_{ij}U = 0$ при $i \neq j$. Зафиксируем попарно различные индексы $i, j, k$, это возможно, поскольку размерность многообразия не менее 5. Из равенства (5) получим: $\partial^2_{ii}X^i = \partial^2_{ij}X^j$, $\partial^2_{ii}X^i = \partial^2_{ik}X^k$. С учетом уравнения (4) это означает, что

$$\partial^2_{ii}X^i + \partial^2_{jj}X^i = 0; \quad \partial^2_{ii}X^i + \partial^2_{kk}X^i = 0.$$

Значит, $\partial^2_{jj}X^i = \partial^2_{kk}X^i$. Кроме того, путем дифференцирования равенства (4) по переменной $x^k$ получаем

$$\partial^2_{jk}X^i = -\partial^2_{ik}X^j = \partial^2_{ij}X^k = -\partial^2_{jk}X^i,$$

то есть $\partial^2_{jk}X^i = 0$.

Следовательно, $X^i = X^i_1 + X^i_2$, где первое слагаемое не зависит от $x^j$, второе от $x^k$, и тогда из равенства $\partial^2_{jj}X^i = \partial^2_{kk}X^i$ получаем, что эти частные производные не зависят от $x^j$ и от $x^k$.

Следовательно, функции $X^i$ имеют вид:

$$X^i = \sum_{i \neq j} \beta_j + \beta(u, x^i, v),$$

где $\beta_j$ — функции вида $\beta_j = C_2(u,v)(x^j)^2 + C_1(u,v,x^i)x^j$. Из уравнений (3) путем дифференцирования по $x^j$ с учетом $\partial^2_{ij}U = 0$ получаем, что функции $C_1(u,v), C_2(u,v)$ не зависят от $v$ и $\partial^2_{iv}C = 0$.

При этом $\partial_i C = 2\partial^2_{ij}X^j = -2\partial^2_{jj}X^i = -2\partial_{jj}\beta_j$, то есть зависит только от $u$. Также $\partial^2_{vv}C = \partial^3_{vvi}X^i = 0$, так как $X^i$ линейны по $v$.

Значит, конформный множитель $C$ принимает вид: $C = \sum \gamma_i(u)x^i + \gamma^*(u)v + \gamma^{**}(u)$.

Покажем, что $\gamma^*(u)$ постоянна. Дифференцируя (6) по $v$, получаем, что $\gamma^*(u) = \partial^2_{vv}V$. Но $\partial^3_{uvv}V = 0$ в силу уравнения (8). Обозначим $\Lambda = -\gamma^*(u)$.

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

**Лемма 2.** Конформный множитель $C$ в уравнении конформно киллингова поля для многообразии с метрикой (1) имеет вид:

$$C(v, x^1, \ldots, x^n, u) = \sum \gamma_i(u)x^i - \Lambda v + \gamma^{**}(u).$$

Определим вид функции $U$. Мы уже знаем, что $U$ не зависит от $v$, $\partial^2_{ij}U = 0$, $\partial_i U + \partial_v X^i = 0$, то есть $\partial^2_{ii}U = -\partial_{iv}X^i = -\frac{1}{2}\Lambda$.

Значит, $U = \frac{1}{4}\Lambda \sum (x^i)^2 + \sum \alpha_i(u)x^i + \alpha(u)$.

Далее из уравнений $C = 2\partial_i X^i$ определяем, что $X^i = \frac{1}{4}\gamma_i(u)(x^i)^2 - \frac{1}{2}\Lambda x^i v + \frac{1}{2}\gamma^{**}(u)x^i + \sum_{j\neq i} A_{ij}x^j + B_i v + C_i$, где $A_{ij}, B_i, C_i$ — функции от $u$. Из уравнения 6 также ясно, что

$V = (C - \sum \dot{\alpha}_i(u)x^i - \dot{\alpha}(u))v + D$,

где $D$ представляется в виде многочлена от переменных $x^1, \ldots, x^n$ с коэффициентами, зависящими от $u$. Точка обозначает дифференцирование по $u$.

Из уравнения $\partial_i U + \partial_v X^i = 0$ получаем, что $\frac{1}{2}\Lambda x^i + \alpha_i(u) + -\frac{1}{2}\Lambda x^i + B_i = 0$, откуда $B_i = -\alpha_i(u)$.

Продифференцируем теперь (8) по $v$:

$$-\Lambda H + 2\partial_u(C - \sum \dot{\alpha}_i(u)x^i - \dot{\alpha}(u)) -$$
$$- \sum(-\frac{1}{2}\Lambda x^i + B_i(u))\partial_i H = 0.$$

Это полиномиальное уравнение относительно переменных $x^1, \ldots, x^n$, коэффициенты которого — функции от $u$. Далее будем приравнивать к нулю коэффициенты при соответствующих степенях полинома и получим уравнения для определения функций $\alpha_i(u)$ и $\alpha(u)$.

С учетом уравнений (6), (7) и (8) получаем:

$$\ddot{\alpha}_i(u) = H_i\alpha_i(u); \ddot{\alpha}(u) = H_i\alpha(u);$$
$$\gamma_i(u) = -2\dot{\alpha}_i(u); \dot{\gamma}^{**}_i(u) = 0.$$

Решения этих дифференциальных уравнений общеизвестны.

**3. Вид конформного множителя**

Рассмотрим конформно плоское многообразие Каэна-Уоллаха размерности $n+2 \geq 5$. В этом случае $H_i = a \neq 0$. Оформим результаты анализа конформного уравнения Киллинга из предыдущего пункта в виде теорем.

**Теорема 1.** Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — конформно плоское многообразие Каэна — Уоллаха размерности $n + 2 \geq 5$ с метрикой (1), где $a > 0$.

Тогда уравнение конформно киллингова поля $L_X g = C(P)g$ разрешимо в том и только в том случае, если конформный множитель $C(P)$ имеет вид:

$$C(P) = -2\sqrt{a}e^{-u\sqrt{a}}(\sum_{i=1}^{n} A_i x^i + A) +$$
$$+2\sqrt{a}e^{u\sqrt{a}}(\sum_{i=1}^{n} B_i x^i + B)x^i - \Lambda v + C,$$

где $A_i, B_i, A, B, C, \Lambda$ — произвольные вещественные константы.

**Теорема 2.** Пусть $(\mathcal{M}, g)$ — конформно плоское многообразие Каэна — Уоллаха размерности $n + 2 \geq 5$ с метрикой (1), где $a < 0$.

Тогда уравнение конформно киллингова поля $L_X g = C(P)g$ разрешимо в том и только в том случае, если конформный множитель $C(P)$ имеет вид:

$$C(P) = -2\sqrt{a}sin(-u\sqrt{a})(\sum_{i=1}^{n} A_i x^i + A) +$$
$$+2\sqrt{a}cos(u\sqrt{a})(\sum_{i=1}^{n} B_i x^i + B)x^i - \Lambda v + C,$$

где $A_i, B_i, A, B, C, \Lambda$ — произвольные вещественные константы.

### Заключение

Результаты теорем 1, 2 позволяют получить полное описание решений уравнения солитонов Риччи на конформно плоских лоренцевых многообразиях Каэна — Уоллаха в произвольной размерности $n + 2 \geq 5$.

## Библиографический список

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. 1970. T. 76 (3). P. 585–591.

2. Cahen M., Kerbra, Y. Champs de Veteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symetriques // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1978. T. 57 (2). P. 99–132.

3. Cahen M., Kerbrat Y. Transformations Conformes des Espaces Symetriques Pseudoriemanniens // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1982. T. 132. P. 275–289.

4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian Manifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1985. T. 3 (1). P. 59–84. DOI: 10.1007/BF00054491

5. Frances C. About Pseudo-Riemannian Lichnerowicz Conjecture // Transformation Groups. 2015. T. 20 (4). P. 1015–1022. DOI: 10.1007/s00031-015-9317-x

6. Kath I., Olbrich M. Compact Quotients of Cahen — Wallach Spaces // Memoirs of the American Mathematical Society. 2019. T. 262. № 1264. P. 84. DOI: 10.1090/memo/1264

7. Kuhnel W., Rademacher H. Essential Conformal Fields in Pseudo-Riemannian Geometry // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1995. T. 74 (5). P. 453–481.

8. Podoksenov M. A Lorentzian Manifold With a One-parameter Group of Homotheties that Has a Closed Isotropic Orbit // Siberian Mathematical Journal. 1989. T. 30 (5). P. 135–137.

9. Podoksenov M. Conformally Homogeneous Lorentzian Manifolds // Siberian Mathematical Journal. 1992. T. 33 (6). P. 154–161.

10. Андреева Т.А., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Исследование конформно киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях // Вестник Югорского государственного университета. 2021. Т. 1 (60). С. 17–22.

11. Blau M., O'Loughlin M. Homogeneous Plane Waves // Nuclear Physics. 2003. Vol. 654 (1–2). P. 135–176.

## References

1. Cahen M., Wallach N. Lorentzian Symmetric Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1970. Vol. 76 (3). P. 585–591.

2. Cahen M., Kerbrat Y. Champs de Veteurs Conformes et Transformations Conformes des Espaces Lorentziens Symetriques. *Journal de MathSmatiques Pures et Appliquees.* 1978. Vol. 57 (2). P. 99–132.

3. Cahen M., Kerbrat Y. Transformations Conformes des Espaces Symetriques Pseudoriemanniens. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1982. Vol. 132. P. 275–289.

4. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian Manifolds. *Annals of Global. Analysis and Geometry*. 1985. Vol. 3 (1). P. 59–84. DOI: 10.1007/BF00054491

5. Frances C. About Pseudo-Riemannian Lichnerowicz Conjecture. *Transformation Groups*. 2015. Vol. 20 (4). P. 1015–1022. D0I: 10.1007/s00031-015-9317-x

6. Kath I., Olbrich M. Compact Quotients of Cahen — Wallach Spaces. *Memoirs of the American Mathematical Society*. 2019. Vol. 262. No 1264. P. 84. DOI: 10.1090/memo/1264

7. Kuhnel W., Rademacher H. Essential Conformal Fields in Pseudo-Riemannian Geometry. *Journal de Math Smatiques Pures et AppliquSes.* 1995. Vol. 74 (5). P. 453–481.

8. Podoksenov M. A Lorentzian Manifold With a One-parameter Group of Homotheties that Has a Closed Isotropic Orbit. *Siberian Mathematical Journal*. 1989. Vol. 30 (5). P. 135–137.

9. Podoksenov M. Conformally Homogeneous Lorentzian Manifolds. *Siberian Mathematical Journal*. 1992. Vol. 33 (6). P. 154–161.

10. Andreeva T.A., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Study of Conformally Killing Vector Fields on Five-dimensional 2-Symmetric Lorentzian Manifolds. *Bulletin of Ugra State University*. 2021. Vol. 1 (60). P. 17–22.

11. Blau M., O'Loughlin M. Homogeneous Plane Waves. *Nuclear Physics*. 2003. Vol. 654 (1–2). P. 135–176.

***Информация об авторах***

**Д.Н. Оскорбин,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия;

**Е.Д. Родионов,** Родионов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

***Information about the authors***

**D.N. Oskorbin,** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;

**E.D. Rodionov,** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.