Известия Алтайского государственного университета. 2024. №4 (138). С. 69–74.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 4 (138). P. 69–74.

Научная статья
УДК 94(47):514.763
DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-09

Нормальные субтвисторные структуры

Евгений Сергеевич Корнев

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, q148@mail.ru

Original article

Normal Subtwistor Structures

Evgeniy S. Kornev

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, q148@mail.ru

Аннотация. В данной работе вводится понятие нормальной субтвисторной структуры. Доказано, что любое многообразие, допускающее нормальную субтвисторную структуру, локально изометрично прямому произведению эрмитова подмногообразия и риманова подмногообразия, а в случае, когда нормальная субтвисторная структура имеет замкнутую фундаментальную 2-форму, локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия и риманова подмногообразия. Показано, что нормальная субтвисторная структура на вещественном многообразии произвольной размерности индуцирует на этом многообразии субкэлерову структуру, для которой все интегральные подмногообразия, касающиеся рабочего расслоения, являются кэлеровыми подмногообразиями. Ранее автором описан случай, когда на группе Ли существует класс примеров нормальных субтвисторных структур. Введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, что нормальная субтвисторная структура всегда имеет нулевой тензор кручения. Эти результаты позволяют описать локальную геометрию многообразия с нормальной субтвисторной структурой.

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, кэлерово подмногообразие, радикал внешней 2-формы, вырожденная 2-форма

Abstract. This paper introduces the concept of normal subtwistor structure. It is proved that any manifold that admits a normal subtwistor structure is locally isometric to direct product of Hermitian submanifold and Riemannian submanifold. However, it is locally isometric to the direct product of Kahler submanifold and Riemannian submanifold when the normal subtwistor structure has a closed fundamental 2-form. It is shown that a normal subtwistor structure on a real manifold of arbitrary dimension induces a sub-Kahler structure on this manifold, and all the integral submanifolds of the bundle are Kahler submanifolds. The author described in the previous works the case when there is a class of normal subtwistor structure examples on a Lie group. The concept of torsion tensor of a subtwistor structure is introduced, and it is shown that a normal subtwistor structure always has a vanishing torsion tensor. The obtained results help describe the local geometry of the manifold with normal subtwistor structure.

Keywords: Subtwistor structure, Sub-Kahler structure, Kahler submanifold, Skew-symmetric 2-form radical, Degenerate 2-form

Для цитирования: Корнев Е.С. Нормальные субтвисторные структуры // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 69–74. DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-09

For citation: Kornev E.S. Normal Subtwistor Structures. *Izvestiya of Altai State University.* 2024. No 4 (138). P. 69–74. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-09

Введение

В теории симплектических и комплексных многообразий обычно используются невырожденные кососимметричные 2-формы, а в теории контактных многообразий 1-форма с максимально неголономным ядром. В первом случае размерность многообразия должна быть только четной, а во втором только нечетной. В [1] было введено понятие субкомплексной и субкэлеровой структуры, которые обобщают классические комплексные, твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Для субкомплексной и субкэлеровой структуры четность размерности многообразия не играет роли. Также в [1] было дано обобщение классической твисторной структуры на многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Такое обобщение называется субтвисторной структурой. В [2] было введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, что субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения всегда индуцирует кэлерову структуру на некотором интегральном подмногообразии. Такая структура называется субкэлеровой структурой. Цель данной работы — ввести и изучить кардинально другой класс субтвисторных структур, которые индуцируют субкэлерову структуру. Мы называем такие структуры нормальными субтвисторными структурами. Для нормальных субтвисторных структур не требуется, чтобы фундаментальная 2-форма была замкнута, однако налагается условие на аффинор, которое влечет обращение в 0 тензора кручения субтвисторной структуры. Отсюда следует, что нормальная субтвисторная структура, ограниченная на некоторое подмногообразие Q индуцирует на Q эрмитову структуру, или, в случае замкнутой фундаментальной 2-формы, кэлерову структуру. Главным результатом данной работы является доказательство ключевой теоремы о том, что, если многообразие произвольной размерности допускает нормальную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, то оно локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия и риманова подмногообразия. Результаты этой работы обобщают понятия, известные в теории римановых и субримановых структур, связанных с симплектическими, контактными и почти контактными структурами, которые можно найти в работах [3–8]. Однако в отличие от рассматриваемых в этих работах структур, нормальные субтвисторные структуры могут иметь радикал любой допустимой размерности на многообразии любой размерности как четной, так и нечетной.

1. Субтвисторные структуры

Пусть M — вещественное многообразие размерности ≥ 3, и Ω — билинейная форма на M. Внутренним произведением билинейной формы Ω и векторного поля X называется 1-форма $I_X\,\Omega$, такая что для любого векторного поля Y на M $I_X\,\Omega(Y) = \Omega(X,Y)$.

Определение 1. *Радикалом билинейной формы Ω в точке $x \in M$ называется касательное подпространство*

$$\operatorname{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : \underset{v}{I}\,\Omega_x = 0\}.$$

Радикалом билинейной формы Ω на многообразии M называется распределение касательных подпространств

$$\operatorname{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \operatorname{rad}\Omega_x.$$

Билинейная форма Ω называется регулярной, если ранг распределения $\operatorname{rad}\Omega$ есть константа во всех точках из M.

Сразу из определения следует, что регулярная билинейная форма Ω невырождена тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$, а радикал нулевой билинейной формы есть все касательное расслоение TM. В [1] для радикала кососимметричной регулярной 2-формы доказан следующий результат:

Теорема 2. *Пусть M — вещественное многообразие размерности $n \geq 3$ и Ω — регулярная ненулевая кососимметричная 2-форма с радикалом ранга r на M. Тогда:*

1) *если n четно, то и r четно, и $0 \leq r \leq n-2$;*
2) *если n нечетно, то и r нечетно, и $1 \leq r \leq n-2$;*
3) *если $d\Omega = 0$, то $\operatorname{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение на M.*

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что для любого дополнительного к $\operatorname{rad}\Omega$ распределения на M его ранг всегда равен $n - r$, т. е. всегда четный, вне зависимости от четности числа n. Кроме того, любая ненулевая регулярная 2-форма на многообразии размерности 2 всегда невырождена, т. е. имеет нулевой радикал.

Пусть Ω — ненулевая кососимметричная регулярная 2-форма на многообразии M. Рабочим расслоением для Ω называется дополнительное к $\operatorname{rad}\Omega$ распределение касательных подпространств на M. Как было показано выше, рабочее расслоение всегда имеет четный ранг на многообразии любой размерности, а значит, слои рабочего расслоения всегда имеют комплексную структуру, симплектическую и кэлерову структуру, как векторные пространства четной размерности. Если многообразие M допускает риманову метрику

g, то рабочее расслоение можно однозначно определить как ортогональное относительно метрики g дополнение к распределению $\operatorname{rad}\Omega$.

Определение 3. *Пусть Ω — регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M с рабочим расслоением D и g — риманова метрика на M. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных пространств на M, такое что*

$$\Omega(X,Y) = g(\Phi X, Y), X, Y \in C^1(TM),$$
$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y), X, Y \in C^1(D).$$

В [1] получены следующие свойства аффинора:

Предложение 4. *Пусть Ω — вырожденная регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M размерности ≥ 3 с рабочим расслоением D и Φ — ассоциированный с 2-формой Ω аффинор. Тогда:*

1) $\ker\Phi = \operatorname{rad}\Omega$;
2) $\Phi^2|_D = -\operatorname{id}$, *где* id – *поле тождественных операторов на* M;
3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;
4) *для любого* $X \in C^1(TM)$ $\Omega(X, \Phi X) \geq 0$.

Отсюда видно, что аффинор, ассоциированный с кососимметричной 2-формой, есть обобщение понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической структурой на четномерных многообразиях. В частности, когда $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$, аффинор есть классическая почти комплексная структура, сохраняющая невырожденную 2-форму Ω. Теперь мы можем определить понятие субтвисторной структуры.

Определение 5. *Субтвисторной структурой на вещественном многообразии M размерности ≥ 3 называется набор объектов (Ω, D, Φ, g), где Ω — ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на M, D — рабочее расслоение для 2-формы Ω, Φ — аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, g — риманова метрика на M. 2-форма Ω называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры, а распределение D называется рабочим расслоением субтвисторной структуры.*

Поскольку рабочее расслоение D субтвисторной структуры всегда имеет четный ранг, для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение аффинора Φ на Q есть ортогональная почти комплексная структура на Q. Если эта почти комплексная структура интегрируема, то Q есть комплексное подмногообразие в M. Это приводит к следующему определению:

Определение 6. *Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии M размерности ≥ 3 называется субтвисторная структура $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ вместе с подмногообразием $Q : TQ = d|_Q$, и ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура.*

В [2] показано, что любое главное расслоение над кэлеровым многообразием допускает субкэлерову структуру. В частности, расслоение вещественных ортогональных реперов над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ имеет вещественную размерность $2n^2 + n$. При нечетном n это число нечетно, а значит, при нечетном n это многообразие не допускает кэлерову структуру, но допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга $2n^2 - n$. В [2] также построена субкэлерова структура на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, которое не допускает кэлерову структуру в силу нечетной размерности.

В [9] введено понятие аффинорной метрической структуры, которое обобщает контактные метрические структуры на многообразия любой размерности. Аффинорная метрическая структура на многообразии M — это четверка (α, D, Φ, g), где α — незамкнутая 1-форма на M, такая что $d\alpha$ есть регулярная 2-форма на M, D — рабочее расслоение для $d\alpha$, Φ — аффинор, ассоциированный с 2-формой $d\alpha$, и g — риманова метрика на M. Очевидно, что субтвисторная структура с точной фундаментальной 2-формой всегда индуцирует аффинорную метрическую структуру, а аффинорная метрическая структура индуцирует субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой. Для того чтобы аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) на многообразии M индуцировала субкэлерову структуру, достаточно найти в M подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$, и ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q. Построенная в [10] конструкция Бузби — Ванга дает главное расслоение над комплексным проективным пространством, слоем S^1 и аффинорной метрической структурой с радикалом ранга 1. Эта аффинорная метрическая структура индуцирует субкэлерову структуру на этом расслоении. Частным случаем главного расслоения, описанного в [10], является нечетномерная сфера.

2. Нормальные субтвисторные структуры

Введенный в [2] тензор кручения субтвисторной структуры дает достаточное условие того, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру, а ограничение аффинора на любое максимальное интегральное для рабочего расслоения подмногообразие есть комплексная структура на этом подмногообразии.

Определение 7. *Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, g) на многообразии M называется непрерывное тензорное поле N*

типа $(2,1)$, *определенное на паре векторных полей* $X, Y \in C^1(TM)$ *следующим образом:*

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y],$$

где $[X,Y]$ *— скобка Ли векторных полей* X *и* Y.

Из этого определения и предложения 4 следует, что для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение тензора кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры $\Phi|_Q$. Интегрируемость этой почти комплексной структуры на Q эквивалентна условию $N|_Q = 0$ (см. [11, глава 9]). В [2] доказан следующий результат:

Теорема 8. *Пусть* M *— вещественное многообразие размерности* $n \geq 3$ *и* (Ω, D, Φ, g) *— субтвисторная структура на* M *с радикалом ранга* $r \geq 1$, *замкнутой фундаментальной 2-формой* Ω *и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение* D *есть вполне голономное распределение на* M, *любое интегральное подмногообразие* $Q : TQ = D|_Q$ *есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности* $\frac{n-r}{2}$, *и* (Q, Ω, D, Φ, g) *есть субкэлерова структура на* M.

Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) с ненулевым радикалом на многообразии M всегда задает разложение касательного расслоения TM в сумму Уитни распределений касательных подпространств D и $\operatorname{rad}\Omega$. С этой парой распределений можно связать структуру почти произведения $\psi : \psi|_D = \Phi^2 = -\mathrm{id}$, $\psi\big|_{\operatorname{rad}\Omega} = \mathrm{id}$, где id — поле тождественных операторов на M. Из пункта 3 теоремы 2 и теоремы 8 следует, что для субтвисторной структуры $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ с нулевым тензором кручения на многообразии M распределения D и $\operatorname{rad}\Omega$ инволютивны. Следовательно, структура почти произведения ψ интегрируема, то есть ψ — структура произведения на M. Из теоремы Фробениуса и теоремы 8 следует, что через каждую точку многообразия M проходят кэлерово подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ и риманово подмногообразие $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$, такие что M локально изометрично прямому произведению $Q \times R$. Таким образом, получаем:

Теорема 9. *Если вещественное многообразие* M *размерности* ≥ 3 *допускает субтвисторную структуру* (Ω, D, Φ, g) *с нулевым тензором кручения, то:*

1) *если* $d\Omega \neq 0$, *то* M *локально изометрично прямому произведению эрмитова подмногообразия* $Q : TQ = D|_Q$ *и риманова подмногообразия* $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$;

2) *если* $d\Omega = 0$, *то* M *локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия* $Q : TQ = D|_Q$ *и риманова подмногообразия* $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$.

Теперь введем специальный класс субтвисторных структур, для которых тензор кручения всегда равен 0.

Определение 10. *Субтвисторная структура* (Ω, D, Φ, g) *на многообразии* M *называется нормальной, если для любых* $X \in C^1(D), Y \in C^1(TM)$ *выполняется условие:*

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y],$$

где $[X,Y]$ *— скобка Ли векторных полей на* M.

Теорема 11. *Пусть* M *— вещественное многообразие размерности* ≥ 3, *и* (Ω, D, Φ, g) *— нормальная субтвисторная структура на* M. *Тогда рабочее расслоение* D *есть вполне голономное распределение на* M, *любое интегральное подмногообразие* $Q : TQ = D|_Q$ *есть эрмитово подмногообразие в* M, *и множество всех гладких сечений рабочего расслоения* D *есть идеал в алгебре векторных полей на* M.

Доказательство. Пусть N — тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, g). Из определения 7 для любых $X, Y \in C^1(D)$ имеем:

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \\ + \Phi^2[X,Y] = \Phi^2[X,Y] - \Phi^2[X,Y] - \\ - \Phi^2[X,Y] + \Phi^2[X,Y] = 0.$$

В силу предложения 4, для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\operatorname{rad}\Omega)$ имеем:

$$N(X,Y) = -\Phi[\Phi X, Y] + \Phi^2[X,Y] = 0.$$

Поскольку $N\big|_{\operatorname{rad}\Omega} = 0$, окончательно получаем, что $N = 0$ на M. Из теоремы 8 и теоремы Фробениуса получаем, что рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть эрмитово подмногообразие в M.

Так как D — вполне голономное распределение на M, из теоремы Фробениуса следует, что D есть инволютивное распределение на M. Поскольку для любого $X \in C^1(TM)$ $\Phi X \in C^1(D)$. Для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\operatorname{rad}\Omega)$ имеем:

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X,Y] \in C^1(D).$$

Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, распределение D инволютивно, и $C^1(TM) = C^1(D) \oplus C^1(\operatorname{rad}\Omega)$, получаем, что $C^1(D)$ есть идеал в $C^1(TM)$.

Для нормальной субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой получаем аналогичный результат:

Следствие 12. *Пусть* M *— вещественное многообразие размерности* ≥ 3, *и* $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ *— нормальная субтвисторная структура на* M. *Тогда рабочее расслоение* D *есть вполне голономное распределение на* M, *любое интегральное подмногообразие* $Q : TQ = D|_Q$ *есть кэлерово* *подмногообразие в M, и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D есть идеал в алгебре векторных полей на M.*

Используя эти результаты и теорему 9, получаем:

Следствие 13. *Если вещественное многообразие M размерности ≥ 3 допускает нормальную субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, g), то:*

1) *если $d\Omega \neq 0$, то M локально изометрично прямому произведению эрмитова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$;*

2) *если $d\Omega = 0$, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$.*

В [12] показано, что, если α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе Ли размерности ≥ 3 и R — связная компонента стабилизатора коприсоединенного действия группы G на 1-форму α, то в случае, когда R есть собственная нетривиальная подгруппа в G, на G можно построить левоинвариантную нормальную субтвисторную структуру с фундаментальной 2-формой $d\alpha$. Это дает класс примеров многообразий с нормальной субтвисторной структурой.

Заключение

Мы ввели понятие нормальной субтвисторной структуры на многообразии произвольной размерности, которое дает важный класс субтвисторных структур. Удалось доказать, что если вещественное многообразие размерности ≥ 3 допускает нормальную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, то это многообразие локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия и риманова подмногообразия. В частности, если на вещественном многообразии размерности ≥ 3 существует нормальная субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой, то это многообразие содержит кэлерово подмногообразие Q, кэлерова структура на котором получается ограничением нормальной субтвисторной структуры на Q.

Библиографический список

1. Корнев Е.С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 5. С. 1062–1077.

2. Корнев Е.С. Субкэлеровы и сублагранжевы подмногообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 23–35.

3. Корнев Е.С. Аффинорные структуры на векторных расслоениях // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55 № 6. С. 1283–1296.

4. Boothby W., Wang H. On Contact Manifolds // Annals of Mathematics. 1958. Vol. 68. P. 721–734.

5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии ; в 2 т. М.: Наука, 1981.

6. Корнев Е.С. Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 1. С. 107–123.

7. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Boston: Birkhäuser. 2010. 343 p.

8. Boyer C.P., Galicki K. Sasakian Geometry. Oxford: Oxford University Press. 2008. 550 p.

9. Rovenskii V.Y. Foliations on Riemannian Manifolds and Submanifolds. Boston: Birkhäuser. 1998. 286 p.

10. Vaisman I. From Generalized Kähler to Generalized Sasakian Structures // Journal of Geometry and Symmetry in Physics. 2010. Vol. 18. P. 63–86.

11. Strichartz R.S. Sub-Riemannian Geometry // Journal of Differential Geometry. 1986. Vol. 24. P. 221–263.

12. Зотьев Д.Б. Контактные вырождения замкнутых 2-форм // Математический сборник. 2007. Т. 198. № 4. С. 47–78.

References

1. Kornev E.S. Subcomplex and Sub-Kahler Structures. *Siberian Matematical Journal.* 2016. Vol. 57. No 5. P. 1062–1077.

2. Kornev E.S. Sub-Kahler and SubLagrangian Submanifolds. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mathematics And Mechanics.* 2023. No 84. P. 23–35.

3. Kornev E.S. Affinor Structures on Vector Bundles. *Siberian Matematical Journal.* 2014. Vol. 55. No 6. P. 1283–1296.

4. Boothby W., Wang H. On Contact Manifolds. *Annals of Mathematics.* 1958. Vol. 68. P. 721–734.

5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Foundations of Differential Geometry.* In 2 Vol. Moscow: Nauka, 1981.

6. Kornev E.S. Invariant Affinor Metric Structures On Lie Groups. *Siberian Mathematical Journal.* 2012. Vol. 53. No 1. P. 107–123.

7. Blair D.E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Boston: Birkhäuser. 2010. 343 p.

8. Boyer C.P., Galicki K. *Sasakian Geometry*. Oxford: Oxford University Press. 2008. 550 p.

9. Rovenskii V.Y. *Foliations on Riemannian Manifolds and Submanifolds*. Boston: Birkhäuser. 1998. 286 p.

10. Vaisman I. From Generalized Kähler to Generalized Sasakian Structures. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*. 2010. Vol. 18. P. 63–86.

11. Strichartz R.S. Sub-Riemannian Geometry. *Journal Of Differential Geometry*. 1986. Vol. 24. P. 221–263.

12. Zotyev D.B. Contact Degenerations of 2-forms. *Matematicheskiy Sbornik*. 2007. Vol. 198. No 4. P. 47–78.

Информация об авторе

Е.С. Корнев, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-инновационного управления, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия.

Information about the author

E.S. Kornev, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Researcher at the Scientific Innovation Department, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.