

Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 63–68.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 4 (138). P. 63–68.

Научная статья

УДК 519.6 + 519.25

DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-08

Многомерное развертывание в случае предельно малого количества целей

Сергей Вадимович Дронов

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия,
dsv@math.asu.ru

Original article

Multidimensional Unfolding in a Case of Extremely Low Number of Targets

Sergei V. Dronov

Altai State University, Barnaul, Russia, dsv@math.asu.ru

Аннотация. Пусть множество изучаемых объектов разбито на две части — множество наблюдателей и множество целей. Задача визуализации такого множества по неполному набору попарных расстояний или различий между ними, когда известны только расстояния между каждым наблюдателем и каждой из целей, есть задача анфолдинга, или многомерного развертывания. Известные методы ее решения, как правило, предполагают заполнение пропущенных позиций в матрице попарных различий тем или иным способом. При этом считается, что оба множества (и наблюдателей, и целей) объектов содержат, по крайней мере, два или большее количество элементов. В настоящей работе предлагается и обсуждается алгоритм решения задачи многомерного анфолдинга в случае, когда множество целей состоит из одного элемента. В этом практически важном случае традиционные методы не работают. В качестве дополнительного требования, позволяющего выделить наилучшее из, как правило, достаточно богатого класса возможных решений, рассматривается максимизация минимального из расстояний между наблюдателями. Кроме этого предлагается простой неитерационный способ решения задачи многомерного развертывания для случая двух целей.

Ключевые слова: многомерный анфолдинг, визуализация статистических данных, задача шкалирования с неполными данными

Abstract. Let the set of objects under study be divided into two parts — the set of observers and the set of targets. There is a problem of multidimensional unfolding when visualizing this set using incomplete data of pairwise distances or differences between them and only the distances between each observer and each of the targets are known. Typically, the known methods to solve such problem involve filling the missing positions in the matrix of pairwise differences using one way or another. Also, it is considered that the two sets (both observers and targets) of objects contain at least two or three elements. In this paper, an algorithm to solve the multidimensional unfolding problem for a single element set of targets is considered. Traditional approaches are not applicable to this practically important case. Therefore, the maximization of the minimum of distances between observers is used to select the best solution from a sufficiently large class of possible ones. Practical aspects are discussed, and a simple non-iterative method to solve the multidimensional unfolding problem for the case of two targets is proposed.

Keywords: multidimensional unfolding, visualization of statistical data, scaling problems with incomplete data

Для цитирования. Дронов С.В. Многомерное развертывание в случае предельно малого количества целей // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 63–68. DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-08

1. О задаче анфолдинга

Широко известен метод многомерного шкалирования, позволяющий визуализировать объекты лишь по набору различий между ними. Классическая теорема Торгерсона (см., например, [1, 2]) гарантирует возможность построения нужного пространства и адекватного отображения исходных объектов в нем при выполнении ряда простых условий. Анфолдинг — вариант многомерного шкалирования с неполной информацией. Пусть множество всех объектов разбито на два подмножества, множество наблюдателей и множество целей. Каждый из наблюдателей сообщает свои расстояния до каждой из целей. Остальные расстояния неизвестны. По имеющимся данным нужно построить изображение, называемое картой. В [3–5] рассматривались способы сведения задачи анфолдинга к задаче многомерного шкалирования. При этом неизвестные расстояния восстанавливались разнообразными, иногда довольно сложными и изобретательными методами. Но для применения этих методик должно иметься достаточно много как наблюдателей, так и целей.

В настоящей работе в основном будем рассматривать случай, когда у нас имеется только одна цель. Работа является продолжением [6–7]. Следуя [6], считаем оптимальной ту из карт, на которой наименьшее из расстояний между изображениями объектов является наибольшим. Предлагается, начав с некоторой стартовой карты, последовательно ее улучшать.

2. Пузырьковая граница облака точек

Будем на первом этапе строить карту в p -мерном евклидовом пространстве. Разместим единственную цель в начале координат O . Наша задача — построение n точек A_1, \dots, A_n , в которых будут размещены наблюдатели так, чтобы минимальное расстояние между ними было максимально возможным. Обозначим R_1, \dots, R_n соответственно известные расстояния от наблюдателей до цели. Пусть мы пытаемся добавить к уже построенным точкам новую, которая должна лежать на некоторой поверхности γ . Назовем нужную нам точку оптимальной на этой поверхности.

Пусть известно, что расстояние от B до некоторой из точек заданного множества равно заданному положительному числу a . Тогда B обязана находиться на объединении равных p -мерных сфер с центрами в этих точках. Если же мы потребуем, чтобы a было минимальным из расстояний до них, то B должна лежать на какой-то сфере, но не попадать внутрь ни одной из остальных.

For citation: Dronov S.V. Multidimensional Unfolding in a Case of Extremely Low Number of Targets. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 4 (138). P. 63–68. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)4-08

Назовем описанное множество $B_n(a)$ пузырьковой границей точек A_1, \dots, A_n радиуса a . Плоский случай такой границы изображен полужирной линией на рисунке 1.

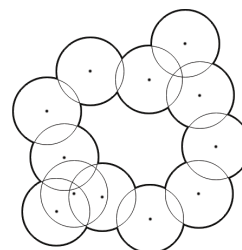


Рис. 1. Пузырьковая граница

Из высказанных соображений вытекает

Теорема 1. Пусть задана поверхность γ , произвольные точки A_1, \dots, A_n , и найдется такое a , что $\gamma \cap B_n(a) \neq \emptyset$, а для произвольного $c > a$ поверхность γ и $B_n(c)$ не имеют общих точек. Тогда любая точка $\gamma \cap B_n(a)$ оптимальна на γ .

3. Случай двух точек — геометрия

Из теоремы 1 следует, что, чтобы найти нужную нам точку на некоторой поверхности γ , нужно увеличивать радиус пузырьковой границы. Последняя общая точка при наибольшем возможном значении радиуса и является искомой.

Точки пузырьковой границы, в которых происходит переход с поверхности одной сферы на другую, назовем переходными. В двумерном случае, как на рисунке 1, это изолированные точки. Если переходная точка лежит на сферах с центрами A_i и A_j , то она расположена на гиперплоскости, перпендикулярной отрезку $A_i A_j$ и проходящей через его середину. В двумерном случае это будет срединный перпендикуляр. По аналогии назовем эту гиперплоскость срединным гиперперпендикуляром к отрезку.

Может показаться, что оптимальное положение новой точки B следует искать среди переходных точек, — они расположены на пузырьковой границе ближе всего к облаку исходных точек. Именно на этом соображении был основан алгоритм в [6, 7]. Но это оказалось верным только в случае поиска оптимальных точек на некоторых специальных типах поверхностей γ . Наша цель — обойти это условие.

Ограничимся далее наиболее важной ситуацией, когда γ представляет собой сферу известного радиуса R с центром в начале координат. Будем называть ее R -сферой. Зафиксируем какие-то две

точки A_1 и A_2 , и пусть Q — середина ограниченного ими отрезка.

Теорема 2. Пусть по двум точкам A_1 и A_2 ищется оптимальная точка R -сферы.

1. Если срединный гиперперпендикуляр α к A_1A_2 имеет общие точки с заданной R -сферой, K — наиболее удаленная от отрезка A_1A_2 общая их точка, а начало координат O располагается внутри конической поверхности Γ , образованной вращением KA_1 вокруг KQ , то K является оптимальной.
2. Если же α не пересекается с R -сферой или O лежит вне тела, ограниченного Γ , то оптимальной является та точка пересечения R -сферы с прямой OA_i , которая расположена дальше от A_1A_2 . Здесь A_i — та из двух исходных точек, которая расположена ближе к O .

В двумерном случае описанные возможности изображены на рисунках 2 и 3. Конус, ограниченный Γ , выделен цветом.

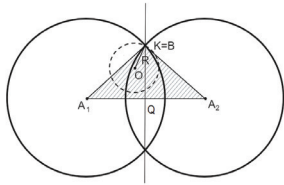


Рис. 2. Центр R -сферы внутри конуса

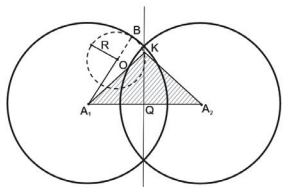


Рис. 3. Второй случай расположения центра

Заметим, что если какие-то из сфер с центрами в точках A_1, \dots, A_n участвовали в формировании пузырьковой границы радиуса a , то они все еще будут в этом участвовать при достаточно малом увеличении a .

Теперь рассмотрим оптимальную точку B для набора A_1, \dots, A_n . Пусть a таково, что $B \in B_n(a)$. Если B лежит на объединении сфер с центрами A_i и A_j , но не является оптимальной для этой пары точек, то, поскольку не реализуется ни один из случаев теоремы 2, радиус a пузырьковой границы можно увеличить так, что $B_n(a)$ по-прежнему будет иметь непустое пересечение с R -сферой. Если это так для произвольной пары A_i, A_j , то, увеличивая a на минимальное среди всех пар допу-

стимое значение, мы все еще будем иметь непустое пересечение новой пузырьковой границы с R -сферой. Это противоречит оптимальности B согласно теореме 1. Итак, справедлива

Лемма. Оптимальная точка для набора A_1, \dots, A_n , $n > 2$ всегда является оптимальной точкой для некоторых двух точек этого набора.

Теперь ясно, что поиск оптимальной точки нужно вести среди точек пузырьковых границ двухточечных множеств, перебирая все их пары.

4. Случай двух точек — формулы

Рассмотрим ситуацию, когда гиперперпендикуляр α имеет непустое пересечение с R -сферой. Нам потребуются координаты наиболее удаленной от A_1A_2 точки $K = (x_1, \dots, x_p)$ этого пересечения и локализация начала координат относительно точек A_1, A_2, K .

Условие расположения K на гиперперпендикуляре дает нам первое ограничение

$$\sum_{j=1}^p (x_j - x_{j,1})^2 = \sum_{j=1}^p (x_j - x_{j,2})^2, \quad (1)$$

а условие ее расположения на R -сфере — второе:

$$\sum_{j=1}^p x_j^2 = R^2. \quad (2)$$

Максимизации при этом подвергается расстояние KA_1 . Но в силу ограничения (1) вместо этого можно искать наибольшее значение

$$Q = \sum_{j=1}^p (x_j - x_{j,1})^2 + \sum_{j=1}^p (x_j - x_{j,2})^2,$$

что оказывается более удобным с точки зрения симметричности получающихся результатов. Введем также обозначения

$$F = \sum_{j=1}^p x_{j,1}^2; \quad G = \sum_{j=1}^p x_{j,1}x_{j,2}; \quad H = \sum_{j=1}^p x_{j,2}^2.$$

Тогда $F - 2G + H$ представляет собой квадрат длины отрезка A_1A_2 и, следовательно, положительно.

Применим метод неопределенных множителей для поиска условного максимума. Вычисляя частные производные функции Лагранжа по каждому из x_j и приравнявая их к 0, получаем

$$x_j = \frac{(\lambda + 1)x_{j,1} - (\lambda - 1)x_{j,2}}{2 + \mu}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (3)$$

После подстановки значений (3) в ограничение (1) видим, что

$$2(F + H - 2G)\lambda = (F - H)\mu.$$

Отсюда, если только $F \neq H$,

$$\mu = \frac{2(F + H - 2G)}{F - H} \cdot \lambda = k\lambda. \quad (4)$$

Если же $F = H$, то получается, что $\lambda = 0$, и после подстановки (3) при таком λ в (2) находим

$$2 + \mu = \pm \frac{\sqrt{F + H + 2G}}{R}.$$

Понятно, что искомым максимум достигается при выборе знака «-». Значит, в случае $F = H$ координаты оптимальной точки задаются

$$x_j = -R \cdot \frac{x_{j,1} + x_{j,2}}{\sqrt{\sum_j (x_{j,1} + x_{j,2})^2}}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (5)$$

Вернемся к случаю $F \neq H$. Подставляя (3) и (4) в ограничение (5), приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2(F + H - 2G - k^2R^2) + 2\lambda(F - H - 2kR^2) + (F + H + 2G - 4R^2) = 0. \quad (6)$$

Решив его, найдем μ , подставляя найденные решения в (4). Все вторые «чистые» производные функции L одинаковы и равны $2(2 + \mu)$, а смешанные все равны нулю. Поэтому из двух потенциально возможных μ следует выбрать то, для которого $\mu > -2$, после чего K найдем из (3).

Локализация O относительно конуса из теоремы 2 в многомерном случае задача непростая. Но при $p = 2$ конус превращается в треугольник $\triangle A_1A_2K$ на рисунках 2 и 3, и можно использовать ее барицентрические координаты относительно точки K в этом треугольнике (см. [8]). Две координаты, z_1, z_2 , вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} - x_1 & x_{1,2} - x_1 \\ x_{2,1} - x_2 & x_{2,2} - x_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а третья находится как $z_3 = 1 - z_1 - z_2$. Условие расположения O внутри треугольника совпадает с требованием положительности z_1, z_2, z_3 .

Из теоремы 2 видно, что для решения нашей задачи многомерного анфолдинга надо уметь определять, пересекается ли гиперперпендикуляр к данному отрезку и заданная R -сфера. Это нетрудно выяснить, используя уравнение срединного гиперперпендикуляра и формулу расстояния между точкой O и этой гиперплоскостью. Пересечение α и R -сферы не пусто тогда и только тогда, когда

$$|F - H| \leq 2R\sqrt{F + H - 2G}. \quad (8)$$

Нам также нужны координаты «дальней» от A_i точки пересечения прямой OA_i с R -сферой. Точка A_i здесь является ближайшей к началу координат O , т. е. это A_1 , если $F < H$, иначе A_2 . Такая точка B оказывается оптимальной в двух случаях, которые также описаны теоремой 2.

Выдвинутые условия делают справедливым равенство $\vec{OB} = -R \cdot \vec{OA}_i / |OA_i|$, или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} F < H &\Rightarrow x_j = \frac{-Rx_{j,1}}{\sqrt{F}}, \quad j = 1, \dots, p, \\ H < F &\Rightarrow x_j = \frac{-Rx_{j,2}}{\sqrt{H}}, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (9)$$

5. Алгоритм анфолдинга для одной цели

Ограничимся вновь случаем $p = 2$ как наиболее важным на практике. При этом вместо термина гиперперпендикуляр используем срединный перпендикуляр, а вместо «сфера» будем писать «окружность». Разумеется, предыдущие рассуждения дают возможность описать алгоритм в его максимальной общности, но это существенно усложнило бы изложение. Пронумеруем наблюдателей по возрастанию расстояний от них до цели.

Алгоритм 1. Стартовая конфигурация

1. Разместим цель в точке O . Изобразим первых двух наблюдателей точками A_1, A_2 на оси абсцисс по разные стороны от O на расстояниях R_1, R_2 от начала координат соответственно.
2. Пусть точки A_1, \dots, A_k , изображающие первых k наблюдателей, уже построены. Для каждой пары точек найдем пересечения срединных перпендикуляров с R_{k+1} -окружностью и выберем из найденных точек ту, для которой минимальное расстояние до уже построенных точек максимально. Получили A_{k+1} . Повторяем это до построения изображений всех наблюдателей.

На шаге 2 поиск точек пересечения и выбор одной из двух можно производить, решая уравнение (6) по формулам (3) и (4). Описанная в предыдущем разделе процедура выбора решения (6) позволит вдвое сократить количество потенциальных оптимальных точек. В [6, 7] были сделаны попытки еще более сократить число возможных выборов за счет использования только тех A_i , которые образуют выпуклую оболочку уже построенного к этому моменту множества изображений наблюдателей. Но оказалось, что это неоправданно сложно и не позволяет упростить обычный перебор.

Алгоритм 2. Оптимальная третья точка

На входе координаты двух точек и расстояние R от начала координат до искомой точки B .

1. Вычисляем F, G, H для заданных двух точек и проверяем условие (8). Если оно выполняется – к шагу 2, иначе к 4.
2. Если $F \neq H$, то решаем уравнение (6), по формулам (4) и (3) находим точку K . Если $F = H$, то вместо (3) используем (5). Вычисляем z_1, z_2, z_3 по формуле (7).
3. Если все z_1, z_2, z_3 неотрицательны, то искомая точка $B = K$, выход из алгоритма.
4. Координаты B находим по формулам (9). Конец алгоритма.

Алгоритм 3. Добавление точки

На входе — координаты точек A_1, \dots, A_n и расстояние R от начала координат до новой точки. Перебираем все неупорядоченные пары точек набора. С помощью алгоритма 2 находим оптимальное положение новой точки для каждой пары точек. На выходе — та из найденных точек, для которой минимальное расстояние до точек A_1, \dots, A_n максимально.

Поскольку есть примеры, когда неупрощаемой конфигурации за конечное число перемещений точек принципиально невозможно достичь (см. [6]), то необходимо выбрать правило остановки алгоритма. Обычно (см., например, [9, 10]) это либо ограничение количества совершаемых итераций, либо констатация того, что целевая характеристика перестает существенно изменяться.

Алгоритм 4. Основной алгоритм

На входе расстояния R_1, \dots, R_n наблюдателей до единственной цели.

1. Строим стартовую конфигурацию, используя алгоритм 1. Будем считать ее текущей.
2. Находим пару точек A_i, A_j , расстояние между которыми в текущей конфигурации минимально. Исключаем точку A_i из конфигурации. По оставшимся точкам и расстоянию R_i ищем новое оптимальное положение точки A_i , используя алгоритм 3. Перемещаем A_i в найденное положение.
3. Находим минимум d_1 расстояний между точками в новой конфигурации. Назовем эту конфигурацию первой и запомним ее.
4. Возвращаем A_i на прежнюю позицию, но удаляем A_j . Вновь используем алгоритм 3. Поместим точку A_j в найденное оптимальное положение. Назовем полученную при этом конфигурацию второй, а минимум расстояний в этой конфигурации обозначим d_2 .
5. В качестве потенциально текущей рассмотрим k -ю конфигурацию, если d_k будет наибольшим из d_1, d_2 .
6. Если выполнено условие остановки, то k -я конфигурация объявляется оптимальной и алгоритм завершает работу. Если нет, потенциально текущая комбинация объявляется текущей, и к шагу 2.

6. Случай двух целей

Ситуация, когда и целей две, и наблюдателей по крайней мере двое, может быть обработана, например, средствами пакета IBM SPSS. Правда, там выбор оптимальной карты осуществляется не максимизируя минимальное расстояние, а с помощью минимизации стресс-критерия. Детали можно найти в [10].

Предложим для случая двух целей достаточно простой альтернативный алгоритм. Рассмотрим

построение двумерной наилучшей карты в предположении, что расстояния между каждым из наблюдателей и каждой из двух имеющихся целей точно известны.

Сначала расположим цели друг относительно друга. Поскольку мы пытаемся построить как можно более «разбросанную» конфигурацию точек, а максимально возможное расстояние между целями в нашем случае равно

$$D = \min_i \{R_{i,1} + R_{i,2}\}, \quad (10)$$

то именно на этом расстоянии мы их поместим симметрично относительно начала координат, в точках T_1, T_2 на оси абсцисс.

Теперь заметим, что i -й наблюдатель располагается в одной из точек пересечения окружностей радиусов $R_{i,1}, R_{i,2}$ с центрами T_1, T_2 соответственно. Поэтому для его расположения имеется лишь две возможности. Для того же наблюдателя, для которого достигается минимум в (10), есть только одна возможность — точка касания окружностей, лежащая на отрезке T_1T_2 .

Итак, все конфигурации исчерпываются лишь 2^{n-1} картами. Вычисляя попарные расстояния между точками-наблюдателями на каждой из них, выбираем ту, в которой минимальное из попарных расстояний максимально.

7. Обсуждение и краткие выводы

В работе был рассмотрен вариант алгоритма решения задачи многомерного развертывания (иначе называемого анфолдингом, или PREFSCAL) для случая, когда в множестве объектов имеется одна или две цели. Основное внимание было уделено задаче с одной целью как наиболее практически значимой. Поскольку многомерное развертывание является задачей с неполной информацией, то имеется, как правило, бесконечно много ее решений. Для выделения оптимального решения было использовано требование максимизации минимального расстояния между строящимися точками.

Вид критерия оптимальности позволяет предположить, что предлагаемые алгоритмы без особых трудностей могут быть переориентированы на решение практических задач. Например, к таким задачам относится проблема размещения опасных производств на заданных расстояниях от поставщика сырья так, чтобы никакие два таких производства не находились слишком близко друг к другу, задача организации системы мусорных полигонов большого города и т.п. В математике родственной задачей, видимо, является исследование наихудших ситуаций при построении минимальных покрытий конечных множеств объектов. Постановку этой задачи и современные методы ее решения можно найти в [11]. Вероятно, можно отыскать и много других применений полученным результатам.

Библиографический список

1. Дейвисон М. Многомерное шкалирование (Методы наглядного представления данных). М.: Мир, 1988. 254 с.
2. Толстова Ю.Н. Основы многомерного шкалирования : учебное пособие. М.: КДУ, 2006. 156 с.
3. Mair P., De Leeuw J., Wurzer M. Multidimensional Unfolding. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online, 2014–2015. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd. 2015. DOI: 10.18637/jss.v031.i03
4. De Leeuw J., Mair P. Multidimensional Scaling Using Majorization // *SMACOF in R. J. Stat. Softw.* 2009. Vol. 31 (3). P. 1–30. DOI: 10.18637/jss.v031.i03
5. Borg I., Groenen P.J.F. *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications*, 2nd ed. Berlin/Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2005. 614 p.
6. Dronov S.V., Leongardt K.A. Multidimensional Unfolding Problem Solution in the Case of a Single Target // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1210*, 2019. P. 1–7. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012034
7. Дронов С.В., Коленко М.И. Практические проблемы реализации многомерного анфолдинга для предельно малого множества целей // *МАК: Математики — Алтайскому краю* : сб. трудов. Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 2020. С. 174–180.
8. Балк М. Б., Болтянский В.Г. *Геометрия масс*. М.: Наука, 1987. 160 с.
9. Чжо Мью Хтун, Чжо Чжо Лин. Точность итерационного алгоритма решения задачи распределения нагрузки в системах обслуживания // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2012. № 8. С. 958–962.
10. Наследов А.Д. *SPSS: Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках* ; 2-е изд. СПб.: Питер, 2006. 416 с.
11. Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // *Дискретный анализ и исследование операций*. Сер. 2. 2000. Т. 7. № 2. С. 22–46.

References

1. Davison M. *Multidimensional Scaling*. Florida: Krieger Pub Co, 1992. 242 p.
2. Tolstova Yu.N. *Basics of Multidimensional Scaling: Tutorial*. Moscow: KDU, 2006. 156 p. (In Russ).
3. Mair P., De Leeuw J., Wurzer M. *Multidimensional Unfolding*. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online, 2014–2015. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd. 2015. DOI: 10.18637/jss.v031.i03
4. De Leeuw J., Mair P. Multidimensional Scaling Using Majorization. *SMACOF in R. J. Stat. Softw.* 2009. Vol. 31 (3). P. 1–30. DOI: 10.18637/jss.v031.i03
5. Borg I., Groenen P.J.F. *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications*, 2nd ed. Berlin/Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2005. 614 p.
6. Dronov S.V., Leongardt K.A. Multidimensional Unfolding Problem Solution in the Case of a Single Target. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1210*. 2019. P. 1–7. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012034
7. Dronov S.V., Kolenko M.I. Practical Problems of Implementing Multidimensional Unfolding for an Extremely Small Set of Targets. *MAK: Matematiki — Altajskomu Krayu*: Sb. Trudov. Barnaul, Altai State University Press, 2020. P. 174–180. (In Russ).
8. Balk M. B., Boltyanskij V.G. *Mass Geometry*. М.: Nauka, 1987. 160 p. (In Russ).
9. Kyaw Myu Htun, Kyaw Kyaw Lin. Accuracy of an Iterative Algorithm for Solving the Problem of Load Distribution in Service Systems. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2012. No 8. P. 958–962. (In Russ).
10. Nasledov A.D. *SPSS: Computer Data Analysis in Psychology and Social Sciences*. 2nd ed. Saint Petersburg: Piter, 2006. 416 p. (In Russ).
11. Eremeev A.V., Zaozerskaya L.A., Kolokolov A.A. Set Covering Problem: Complexity, Algorithms, Experimental Studies. *Discrete Analysis and Operations Research*. Ser. 2. 2000. Vol. 7. No 2. P. 22–46. (In Russ).

Информация об авторе

С.В. Дронов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the author

S.V. Dronov, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.