Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 132–137.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 1 (135). P. 132–137.

Научная статья
УДК 534.1:532.3:517.9
DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-19

Решение задачи о колебаниях подводного тела в замороженном канале с линейно изменяющейся толщиной льда

Татьяна Андреевна Сибирякова[1], Константин Александрович Шишмарев[2]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, sibiriakova.tatiana@mail.ru
[2]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, shishmarev.k@mail.ru

Original article

Solution of the Problem of Submerged Body Oscillations in a Frozen Channel with Linearly Varying Ice Thickness

Tatyana A. Sibiryakova[1], Konstantin A. Shishmarev[2]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, sibiriakova.tatiana@mail.rul
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, shishmarev.k@mail.ru

Рассматривается задача о гидроупругих волнах, создаваемых подводным телом, которое совершает вертикальные поступательные колебания в прямоугольном замороженном канале конечной глубины и конечной ширины. Лед моделируется как тонкая вязкоупругая пластина, толщина ее линейно изменяется поперек канала. Края пластины приморожены к стенкам канала. Прогиб ледового покрова описывается в рамках линейной теории упругости. Рассматривается случай симметричного относительно центральной линии канала изменения толщины ледового покрова. Жидкость под пластиной невязкая и несжимаемая. Течение жидкости, вызванное прогибом пластины, является потенциальным. Осциллирующее подводное тело моделируется трехмерным диполем, который при колебаниях в неограниченной жидкости генерирует поток и давление, соответствующие жесткой сфере. Радиус сферы связан со скоростью диполя и его интенсивностью. Скорость диполя изменяется периодически, вследствие чего изменяется его интенсивность, при этом форма тела остается неизменной. Потенциал скорости диполя, помещенного в прямоугольный канал с жесткими стенками, определяется методом зеркальных отображений.

Ключевые слова: ледовая пластина, гидроупругие волны, диполь, замороженный канал, линейно изменяющаяся толщина льда

The paper considers the problem of hydroelastic waves generated by a submerged body undergoing vertical translational oscillations in a rectangular frozen channel of finite depth and width. The ice is modeled as a thin viscoelastic plate with its thickness varying linearly across the channel. The edges of the plate are frozen to the channel walls. The deflection of the ice cover is described within the framework of linear elasticity theory. The case of the symmetric thickness variation of the ice cover with respect to the channel's central line is studied. The liquid beneath the plate is inviscid and incompressible. The fluid flow induced by the plate deflection is potential. The oscillating submerged body is modeled as a three-dimensional dipole, which generates flow and pressure corresponding to a rigid sphere when oscillating in an unbounded fluid. The radius of the sphere is related to the dipole's velocity and its intensity. The dipole velocity varies periodically, resulting in changes in its intensity, while maintaining the body's shape unchanged. The velocity potential of the dipole placed in a rectangular channel with rigid walls is obtained using the method of image reflections.

Keywords: ice plate, hydroelastic waves, dipole, frozen channel, linearly varying ice thickness

Финансирование: работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (тема FZMW-2020-0008).

Funding: the work was carried out in accordance with the State Assignment of the Russian Ministry of Science and Higher Education entitled `Modern methods of hydrodynamics for environmental management, industrial systems and polar mechanics' (Govt. contract code: FZMW-2020-0008).

Для цитирования: Сибирякова Т.А., Шишмарев К.А. Решение задачи о колебаниях подводного тела в замороженном канале с линейно изменяющейся толщиной льда // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 132–137. DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-19.

For citation: Sibiryakova T.A., Shishmarev K.A. Solution of the Problem of Submerged Body Oscillations in a Frozen Channel with Linearly Varying Ice Thickness. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 132–137. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-19.

Введение

В последние десятилетия активно исследуются проблемы, связанные с изучением ледового покрова. Особое внимание уделяется распространению изгибно-гравитационных волн в ледовых покровах, что является предметом обширных исследований. Основная часть работ по исследованию изгибно-гравитационных волн посвящена изучению ледовых покровов бесконечной протяженности [1–3]. Задачи, связанные с ледовым покровом в каналах, были изучены менее подробно, хотя они имеют большое практическое значение. Например, большинство лабораторных экспериментов проводятся в бассейнах конечных размеров с прямоугольными сечениями, что существенно влияет на результаты исследований. Такие модели были рассмотрены в работах [4–6], где лед моделировался как тонкая упругая, пороупругая или вязкоупругая пластина в рамках линейной теории гидроупругости. Присутствие стенок и ограниченность ледовых пластин приводят к появлению новых граничных условий и существенному усложнению задачи. Существуют различные подходы к исследованию таких задач. Один из них основан на применении модели Кельвина — Фойгта для описания вязкоупругого поведения материала льда. В рамках вязкоупругой модели прогибы и деформации в ледовом покрове быстро затухают с увеличением расстояния от нагрузки. Однако, в отличие от задач с неограниченным ледовым покровом, исследование прогибов льда в канале требует определения профиля колебаний поперек канала с учетом граничных условий на стенках, которые оказывают существенное влияние на результаты этих исследований. Также существует еще один большой класс задач, касающийся взаимодействия льда и погруженных в жидкость тел. Воздействие погруженных в воду объектов на ледовый покров и влияние ледового покрова на течение жидкости рядом с объектами были исследованы в работах [7–9]. Одним из важных параметров при изучении таких моделей является толщина ледяного покрова. В упомянутых работах рассматриваются случаи равномерного льда с постоянной толщиной. Однако в естественных условиях ледяной покров не является однородным, поэтому важно исследовать модели, в которых толщина льда будет изменяться [10–12].

1. Постановка задачи

Рассматривается прямоугольный канал, который покрыт льдом. Глубина канала $H(-H < z < 0)$, ширина канала $2b(-b < y < b)$, вдоль оси абсцисс канал не ограничен $(-\infty < x < \infty)$. Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью. И подо льдом находится тело, совершающее вертикальные поступательные колебания. Подводное тело моделируется трехмерным диполем, который при колебаниях в неограниченной жидкости, генерирует поток и давление, соответствующие жесткой сфере радиуса a.

Лед моделируется как тонкая вязкоупругая пластина в рамках линейной теории гидроупругости [1, 13]

$$\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)-\rho_i h_i(y)w_{tt}+$$
$$+\,p(x,y,0,t)=0 \quad (|x|<\infty, |y|<b, z=0), \qquad (1)$$

где Q_x, Q_y — перерезывающие силы, M_x, M_y, M_{xy} — изгибающие и скручивающий моменты, вызванные силами упругости, $w(x,y,t)$ — прогиб ледового покрова, $h_i(y)$ — функция, описывающая изменяющуюся толщину пластины, $p(x,y,0,t)$ — давление жидкости на границе лед — жидкость, вызванное колебанием тела и отклонением льда, ρ_i — плотность льда, $D = Eh_i^3(y)/(12(1-\nu^2))$ — жесткость, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, τ — время запаздывания, соответствующее модели вязкоупругой пластины Кельвина — Фойгта.

В работе рассматривается случай симметричного линейного изменения толщины льда с наименьшим значением в центре канала и наибольшим на стенках. Основными параметрами толщины льда в задаче являются ее минимальное значение h_0, максимальное значение h_1 и параметр изменения толщины льда α. Тогда функцию, характеризующую изменение толщины льда, можно записать в виде

$$h_i(y) = h_0 + \alpha_1|y|, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha h_0}{b}, \quad \alpha = \frac{h_1 - h_0}{h_0},$$

$$h_0 = h_i(0), \quad h_1 = h_i(\pm b),$$

где α_1 и α — тангенс угла наклона для размерных и безразмерных переменных соответственно.

Лед приморожен к стенкам канала, что моделируется условиями жесткого защемления

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = \pm b). \qquad (2)$$

Жидкость в канале невязкая и несжимаемая. Суммарный поток жидкости, вызванный движением диполя и прогибом пластины, является потенциальным. Давление жидкости задано линеаризованным уравнением Коши — Лагранжа

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l \varphi_{tot,t} - \rho_l g w, \qquad (3)$$

где g — ускорение силы тяжести, ρ_l — плотность жидкости, $\varphi_{tot}(x, y, z, t) = \varphi^D(x, y, z, t) + \varphi^E(x, y, z, t)$ — суммарный потенциал скорости течения жидкости, равный сумме потенциала диполя и потенциала скорости течения жидкости, вызванного прогибом ледовой пластины.

Суммарный потенциал удовлетворяет кинематическому условию на границе лед — жидкость

$$\varphi_{tot,z} = w_t \quad (z = 0), \qquad (4)$$

условиям непротекания на стенках и дне канала

$$\varphi_{tot,y} = 0 \quad (y = \pm b), \quad \varphi_{tot,z} = 0 \quad (z = -H) \quad (5)$$

и уравнению Лапласа

$$\triangle \varphi_{tot} = 0 \qquad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty, -1 < y < 1, -h < z < 0)$$

в области течения жидкости, исключая небольшую окрестность диполя, центр которого расположен в точке (x_0, y_0, z_0), $|z_0| > a$, где он совершает поступательные колебания с частотой ω и амплитудой A.

Потенциал $\varphi^E(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения жидкости и граничным условиям

$$\varphi^E_y = 0 \quad (y = \pm b), \quad \varphi^E_z = 0 \quad (z = -H),$$

$$\varphi^E_z = w_t \quad (z = 0).$$

Перепишем задачу в безразмерных переменных $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$: $\widetilde{x} = x/b, \widetilde{y} = y/b, \widetilde{z} = z/b$.

Рассматривается установившееся решение, где искомые функции ищутся в следующем виде: $w = A\widetilde{w}e^{-i\omega t}$, $\varphi^E = -ib\omega A e^{-i\omega t}\widetilde{\varphi}^E$, $\varphi^D = (2\pi a^3)(-i\omega A e^{-i\omega t})\widetilde{\varphi}^D/(b^2)$.

Таким образом, задача (1) – (6) в безразмерных переменных переписывается в следующем виде (знак $\sim$ опущен):

$$-\delta h_i(y) w + \beta(1 - i\varepsilon)\big[h_i^3(y)\Delta_2^2 w + 6h_i^2(y) sign(y)\cdot$$

$$\cdot \alpha(w_{yyy} + w_{xxy}) + 6h_i(y)\alpha^2(w_{yy} + \nu w_{xx})\big] =$$

$$= 2\pi\kappa^3\lambda\varphi^D + \lambda\varphi^E - w, \qquad (7)$$

$$w = 0, \quad w_y = 0 \quad (y = \pm 1), \qquad (8)$$

$$\nabla_2^2 \varphi^E = 0, \qquad (9)$$

$$\varphi^E_y = 0 \quad (y = \pm b), \quad \varphi^E_z = 0 \quad (z = -H),$$

$$\varphi^E_z = w \quad (z = 0), \qquad (10)$$

$$\varphi^D_y = 0 \quad (y = \pm b), \quad \varphi^D_z = 0 \quad (z = 0, z = -H) \qquad (11)$$

$$\varphi^E \to 0, \quad w \to 0 \quad (|x| \to \infty),$$

где $\delta = h_0\rho_i\omega^2/\rho_l g, \beta = D/(b^4\rho_l g), \lambda = b\omega^2/g, \varepsilon = \omega\tau, \kappa = a/b$ — безразмерные параметры. Оператор $\nabla_2^2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Рассматривается случай слабого диполя, когда его радиус много меньше ширины и глубины канала, тогда диполь представляет собой маленькую жесткую сферу, которая колеблется под ледовым покровом.

Основная задача состоит в определении установившегося прогиба льда $w(x, y)$ для некоторых характерных значений параметров задачи. В частности, будет исследовано влияние разного расположения диполя в сечении канала.

2. Решение задачи

Рассмотрим случай, когда диполь совершает вертикальные колебания вдоль оси Oz. Интенсивность диполя $q(t)$ равна [14]

$$q(t) = 2\pi a^3 U(t),$$

где $U(t)$ — скорость диполя. Если A — амплитуда колебаний диполя, то

$$U(t) = -i\omega A e^{-i\omega t}.$$

Для безграничной жидкости потенциал скорости течения жидкости φ при колебаниях диполя вдоль оси Oz соответственно равен

$$\varphi = q(t)\frac{z - z_0}{4\pi r^3},$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ — расстояние от центра диполя.

Для построения формы диполя будем использовать метод зеркальных отображений. Для этого рассмотрим еще один диполь с центром в точке $(-x_0, y_0, z_0)$, таким образом, центр отраженного диполя находится на том же расстоянии от стенок канала, что и исходный.

Используя результаты работ [15, 16], потенциал исходного диполя в жидкости под бесконечным ледяным покровом в случае вертикальных колебаний тела записывается в виде

$$\phi_0(x, y, z) = \frac{z - z_0}{2r^3} + \frac{1}{2} v.p. \int_0^\infty \frac{kJ_0(kR)}{L(k)}.$$

$$\cdot\big[((-\beta k^4+1-\delta)k+\lambda^2)e^{-kz_0}ch(k(z-h))+$$

$$+((\beta k^4+1-\delta)kch(kz)-\lambda^2 sh(kz))e^{k(h-z_0)}\big]dk+$$

$$+i\frac{\pi k_0\lambda^2 J_0(k_0R)ch(k_0(h-z))sh(k_0(h-z_0))}{L'(k_0)sh(k_0h)}, \quad (12)$$

$$L(k)=(\beta k^4+1-\delta)ksh(kh)-\lambda^2 ch(kh),$$

где J_0 — функция Бесселя 1-го рода, k_0 — корень дисперсионного соотношения $L(k)=0$. Интеграл понимается в смысле главного значения. Потенциал отраженного диполя ϕ_1 получается из формулы (12) заменой r и R на r_1 и R_1, где $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, а $r_1=\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ и $R_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, а также $z-z_0$ на $z+z_0$.

Для того чтобы диполь удовлетворял граничным условиям на стенках, построим зеркальные отображения относительно стенок канала. Ожидается, что при размещении диполя в центре сечения канала форма соответствующего тела будет близка к форме сферы для диполя малой интенсивности. Если же диполь расположить вблизи одной из стенок канала, то форма подводного тела будет похожа на деформированную сферу.

Таким образом, суммарный потенциал примет следующий вид:

$$\varphi_{tot}(x,y,z)=\phi_0(x,y,z)+\phi_1(x,y,z,)+\varphi^E(x,y,z).$$

Решение стационарной задачи (7) – (11) зависит от пяти безразмерных параметров $\delta,\beta,\lambda,\varepsilon,\kappa$, от параметра изменения толщины льда α и от безразмерных координат положения диполя в канале y_0,z_0.

Сформулированная задача (7) – (11) решается с помощью преобразования Фурье вдоль канала и метода нормальных мод разложения образа Фурье прогибов льда на собственные функции колебаний балки с переменной толщиной поперек канала. Применяя преобразование Фурье вдоль канала

$$w^F(\xi,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w(x,y)e^{-i\xi x}dx,$$

$$w(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^F(\xi,y)e^{i\xi x}d\xi,$$

к уравнению пластины (7) и краевым условиям (8), получаем

$$\beta(1-i\varepsilon)\big[h_i^3(y)(w^F_{yyyy}-2\xi^2 w^F_{yy}+\xi^4 w^F)+6h_i^2(y)sign(y)\cdot$$

$$\cdot\alpha(w^F_{yyy}-\xi^2 w^F_y)+6h_i(y)\alpha^2(w^F_{yy}-\xi^2\nu w^F)\big]+$$

$$+(1-\delta h_i(y))w^F=2\pi\kappa^3\lambda(\varphi^D)^F+\lambda(\varphi^E)^F, \quad (13)$$

$$w^F=0,\quad w^F_y=0\quad (y=\pm1). \quad (14)$$

Решение $w^F(\xi,y)$ уравнения (13) ищется в виде разложения

$$w^F(\xi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\xi)\psi_n(y), \quad (15)$$

где $a_n(\xi)$ — коэффициент разложения, $\psi_n(y)$ — нормальные моды колебания упругой балки переменной толщины.

Переставляя слагаемые в уравнении (13) определенным образом, можем заметить следующую комбинацию членов

$$h_i(y)[h_i^2(y)w^F_{yyyy}+6sign(y)\alpha h_i(y)w^F_{yyy}+6\alpha^2 w^F_{yy}]. \quad (16)$$

Часть в квадратных скобках в (16) дает левую часть дифференциального уравнения Бесселя. Подставляя представление (15) в (16) и в (14), мы получаем следующую спектральную задачу

$$h_i^2(y)\psi_n^{IV}+6sign(y)\alpha h_i(y)\psi_n'''+6\alpha^2\psi_n''=\theta_n^4\psi_n \quad (17)$$

$$(-1<y<1),$$

$$\psi_n=0,\quad \psi_n'=0\quad (y=\pm1), \quad (18)$$

где θ_n — собственные значения задачи (17) – (18). Можно показать, что нетривиальным решением уравнения (17) является

$$\psi_n=\frac{1}{\varsigma}(A_nJ_1(\eta_n\varsigma)+B_nY_1(\eta_n\varsigma)+C_nI_1(\eta_n\varsigma)+$$

$$+D_nK_1(\eta_n\varsigma)),\quad \eta_n=2\theta_n/\alpha,\quad \varsigma=\sqrt{1+\alpha y},$$

где J,Y,I,K — функции Бесселя.

Функции ψ_n удовлетворяют условию ортогональности с весом. В качестве весовой функции взята $h_i(y)$

$$\int_0^1(1+\alpha y)\psi_n\psi_m dy=0\quad (n\neq m). \quad (19)$$

Коэффициенты A_n,B_n,C_n,D_n определяются из краевых условий и условия (19).

Исходя из кинематического условия (10), решение для профиля $\Phi^F(y,z)$ потенциала потока в поперечном сечении канала можно искать в следующем виде

$$\Phi^F(\xi,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\xi)\Phi_n(y,z), \quad (20)$$

где Φ_n являются решениями краевой задачи

$$\Phi_{n,yy}+\Phi_{n,zz}=\xi^2\Phi_n,$$

$$\Phi_{n,y}=0\quad (y=\pm1),\Phi_{n,z}=0\quad (z=-h),$$

$$\Phi_{n,z}=\psi_n\quad (z=0).$$

Подставляем найденные функции ψ_n и Φ_n в виде (15) и (20) в уравнение пластины (13) и получаем бесконечную систему уравнений, относительно коэффициентов разложения a_n.

Умножая обе части полученного уравнения на ψ_m, интегрируя результат от -1 до 1 по y и ограничивая количество уравнений до конечного числа N, мы приходим к следующей задаче:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n[\frac{1}{\beta^4}(1-i\xi\delta)D_n\delta_{mn}+\frac{1}{\beta^4}(1-i\xi\delta)\xi^4K_{mn}+$$

$$+2\xi^2\frac{1}{\beta^4}(1-i\xi\delta)\delta_{mn}-\mu\gamma Fr^2\xi^2\delta_{mn}+M_{mn}^{(1)}-$$

$$-\xi^2Fr^2\gamma M_{mn}^{(2)}]=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\beta^4}(\varphi_x^D)^F\psi_m dy,$$

где $D_n=\theta_n^4-6\alpha^2\xi^2\nu$, $K_{mn}=\int_{-1}^{1}h_i^3(y)\psi_n\psi_m dy$, $\delta_{mn}=\int_{-1}^{1}h_i(y)\psi_n\psi_m dy$, $S_{mn}=\int_{-1}^{1}h_i^3(y)\psi_n'\psi_m' dy$, $M_{mn}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\psi_n\psi_m dy$, $M_{mn}^{(1)}=\int_{-1}^{1}\Phi_n\psi_m dy$.

Полученную задачу для нахождения коэффициентов a_n можем переписать в матричной форме, где все матрицы $D=diag\{D_n\}, K=\{K_{mn}\}, S=\{S_{mn}\}, M_1=\{M_{mn}^{(1)}\}, M_2=\{M_{mn}^{(2)}\}$ симметричны. Нетривиальное решение полученной системы уравнений существует, если определитель матрицы равен 0. Точность вычислений возрастает с увеличением значения числа N.

Для решения матричной задачи разделяем ее на мнимую и действительную части. Для этого вектор $\vec{a}$ раскладываем следующим образом $\vec{a}=\vec{a}^R+i\vec{a}^I$, при это все компоненты матрицы и правая часть являются действительными. Следовательно, приходим к двум матричными задачам, относительно $\vec{a}^R$ и $\vec{a}^I$.

После нахождения вектора $\vec{a}(\xi)$ прогибы льда определяются с помощью обратного преобразования Фурье от образов прогибов льда

$$w(x,y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{N_{mod}}\psi_i(y)\int_0^\infty(a_i^R(\xi)cos(\xi x)-$$

$$-a_i^I(\xi)sin(\xi x))d\xi. \qquad (21)$$

Интегралы в (21), а также значения $a_i^R(\xi)$ и $a_i^I(\xi)$ считаются численно. Подынтегральные функции в (21) быстро затухают, что проверялось численно.

Заключение

Рассмотрена трехмерная задача о распространении колебаний в ледовом покрове с линейно изменяющейся толщиной, вызванные поступательным колебанием подводного тела, моделируемое диполем. Осциллирующий диполь описывает сферу, радиус которой намного меньше, чем ширина и глубина канала. Осцилляции происходят за счет изменения скорости диполя и соответственно его интенсивности, при этом радиус остается постоянным. Получено, что прогибы льда сильно зависят от положения диполя в канале. Тестовые расчеты показали, что при приближении диполя вдоль оси Oz к ледовому покрову прогибы льда значительно увеличиваются в центре канала, где его толщина имеет наименьшее значение. А при приближении диполя к стенкам канала прогибы уменьшаются у той стенки, к которой приближается диполь, в силу того, что толщина льда у стенок канала больше, чем в центре. Также получено, что в случае линейного изменения толщины льда прогибы льда увеличиваются в месте наименьшей толщины льда (вдоль центральной линии канала) и уменьшаются на стенках, где толщина льда является наибольшей.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving Loads on Ice Plates. Kluwer Academic Publishers. 1996. 230 p. DOI: 10.1007/978-94-009-1649-4

2. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves Propagating Along a Channel with Ice Cover // European Journal of Mechanics B-fluids. 2014. Vol. 47. P. 166–175. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2014.01.007

3. Kheysin Y. Moving Load on an Elastic Plate Which Floats on the Surface of an Ideal Fluid // Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskih Nauk. Mekhanika i Mashinostroenie. 1963. Vol. 1. P. 178–180.

4. Ren K., Wu G.X., Li Z.F. Hydroelastic Waves Propagating in an Ice-Covered Channel // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 886. A18. DOI: 10.1017/jfm.2019.1042

5. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic Waves in a Channel Covered with a Free Ice Sheet // Journal of Fluid Dynamics. 2015. Vol. 50. No 6. P. 775–788. DOI: 10.1134/S0015462815060071

6. Daly S.F. Wave Propagation in Ice-Covered Channels. // Journal Hydraul. 1993. Vol. 119. No 8. P. 895–910. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1993)119:8(895)

7. Stepanyants Y.A., Sturova I.V. Waves on a Compressed Floating Ice Caused by Motion of a Dipole in Water // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 907. A7. DOI: 10.1017/jfm.2020.764

8. Козин В.М., Чижиумов С.Д., Земляк В.Л. Исследование влияния ледовых условий на эффективность резонансного способа разрушения ледяного покрова, реализуемого подводными судами // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 3. С. 118–125.

9. Wu G.X. Radiation and Diffraction by a Submerged Sphere Advancing in Water Waves of Finite Depth // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1995. Vol. 448. No 1932. P. 29–54. DOI: 10.1098/rspa.1995.0002

10. Shishmarev K.A., Zavyalova K.N., Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with

Non-Uniform Thickness of Ice // Water. 2022. Vol. 14. No 3: 281. DOI: 10.3390/w14030281

11. Sturova I.V., Tkacheva L.A. Wave Motion in a Fluid Under an Inhomogeneous Ice Cover // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. No 1: 012092. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012092

12. Savin A.A., Savin A.S. Waves Generated on an Ice Cover by a Source Pulsating in Fluid // Journal of Fluid Dynamics. 2013. Vol. 48. No 3. P. 303–309. DOI: 10.1134/S0015462813030034

13. Shishmarev K.A, Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A. Ice Response to an Underwater Body Moving in a Frozen Channel // Applied Ocean Research. 2019. Vol. 91. No 1. P. 101877. DOI: 10.1016/j.apor.2019.101877

14. Tkacheva L. A. Oscillations of a Body Submerged in Fluid beneath an Ice Cover in the Neighborhood of a Vertical Wall // Journal of Fluid Dynamics. 2021. Vol. 56. No 1. P. 50–65. DOI: 10.1134/S0015462821010146

15. Das D., Mandal B.N. Water Wave Radiation by a Sphere Submerged in Water with an Ice-Cover // Archive of Applied Mechanics. 2008. Vol. 78. P. 649–661. DOI: 10.1007/s00419-007-0186-1

16. Thorne R.C. Multipole Expansions in the Theory of Surface Waves // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1953. Vol. 49. P. 707–716. DOI: 10.1017/S0305004100028905

References

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. *Moving Loads on Ice Plates*. Kluwer Academic Publishers. 1996. 230 p. DOI: 10.1007/978-94-009-1649-4

2. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves Propagating Along a Channel with Ice Cover. *European Journal of Mechanics B-fluids*. 2014. Vol. 47. P. 166–175. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2014.01.007

3. Kheysin Y. Moving Load on an Elastic Plate Which Floats on the Surface of an Ideal Fluid. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskih Nauk. Mekhanika i Mashinostroenie*. 1963. Vol. 1. P. 178–180.

4. Ren K., Wu G.X., Li Z.F. Hydroelastic Waves Propagating in an Ice-Covered Channel. *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 886. A18. DOI: 10.1017/jfm.2019.1042

5. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic Waves in a Channel Covered with a Free Ice Sheet. *Journal of Fluid Dynamics*. 2015. Vol. 50. No 6. P. 775–788. DOI: 10.1134/S0015462815060071

6. Daly S.F. Wave Propagation in Ice-Covered Channels. *Journal Hydraul*. 1993. Vol. 119. No 8. P. 895–910. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1993)119:8(895)

7. Stepanyants Y.A., Sturova I.V. Waves on a Compressed Floating Ice Caused by Motion of a Dipole in Water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 907. A7. DOI: 10.1017/jfm.2020.764

8. Kozin V.M., CHizhiumov S.D., Zemlyak V.L. Issledovanie Vliyaniya Ledovyh Uslovij na Effektivnost' Rezonansnogo Sposoba Razrusheniya Ledyanogo Pokrova, Realizuemogo Podvodnymi Sudami. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*. 2010. Vol. 51. No 3. P. 118–125. (In Russ.).

9. Wu G.X. Radiation and Diffraction by a Submerged Sphere Advancing in Water Waves of Finite Depth. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1995. Vol. 448. No 1932. P. 29–54. DOI: 10.1098/rspa.1995.0002

10. Shishmarev K.A., Zavyalova K.N., Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. *Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice. Water*. 2022. Vol. 14. No 3: 281. DOI: 10.3390/w14030281

11. Sturova I.V., Tkacheva L.A. Wave Motion in a Fluid Under an Inhomogeneous Ice Cover. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 894. No 1: 012092. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012092

12. Savin A.A., Savin A.S. Waves Generated on an Ice Cover by a Source Pulsating in Fluid. *Journal of Fluid Dynamics*. 2013. Vol. 48. No 3. P. 303–309. DOI: 10.1134/S0015462813030034

13. Shishmarev K.A, Khabakhpasheva T.I., Korobkin A.A. Ice Response to an Underwater Body Moving in a Frozen Channel. *Applied Ocean Research*. 2019. Vol. 91. No 1. P. 101877. DOI: 10.1016/j.apor.2019.101877

14. Tkacheva L.A. Oscillations of a Body Submerged in Fluid beneath an Ice Cover in the Neighborhood of a Vertical Wall. *Journal of Fluid Dynamics*. 2021. Vol. 56. No 1. P. 50–65 DOI: 10.1134/S0015462821010146

15. Das D. and Mandal B.N. Water Wave Radiation by a Sphere Submerged in Water with an Ice-Cover. *Archive of Applied Mechanics*. 2008. Vol. 78. P. 649–661. DOI: 10.1007/s00419-007-0186-1

16. Thorne R.C. Multipole Expansions in the Theory of Surface Waves. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1953. Vol. 49. P. 707–716. DOI: 10.1017/S0305004100028905

Информация об авторах

Т.А. Сибирякова, магистрант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

К.А. Шишмарев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

T.A. Sibiryakova, Master Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

K.A. Shishmarev, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Altai State University, Barnaul, Russia.