Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 120–125.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 1 (135). P. 120–125.

Научная статья
УДК 515.12: 514.172
DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-17

О границах множеств и границах выпуклых множеств

Ирина Викторовна Поликанова

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия.
Anirix1@yandex.ru

Original article

On the Boundaries of Sets and Boundaries of Convex Sets

Irina V. Polikanova

Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia, Anirix1@yandex.ru

В статье изучаются условия совпадения границ множества, его замыкания и его внутренности. Выявлена связь между совпадением границ множества с границей его замыкания (внутренности) и совпадением границ дополнения этого множества с границей его внутренности (замыкания). Получена формула для границы границы множества в произвольном топологическом пространстве.

Главные результаты.

1. Граница границы множества есть объединение границ его внутренности и замыкания.

2. Для того чтобы граница множества совпадала с границей его внутренности или с границей его замыкания, необходимо (но недостаточно), чтобы внутренность границы этого множества была пуста.

3. Граница выпуклого тела в n-мерном аффинном пространстве A^n совпадает с границей его замыкания и границей его внутренности. Таким же свойством обладает и дополнение выпуклого множества. Приводится пример звездного множества, не обладающего указанным свойством.

Методы доказательства — топологические, а также используются факты теории выпуклых множеств.

Ключевые слова: граница множества, граница границы множества, граница выпуклого множества, граница звездного множества

The article studies the conditions for the coincidence of the boundaries of a set, its closure, and its interior. A connection is revealed between the coincidence of the boundaries of a set with the boundary of its closure (interior) and the coincidence of the boundaries of the complement of this set with the boundary of its interior (closure). A formula for the boundary of a set boundary in an arbitrary topological space is obtained.

The main results are the following:

1. The boundary of a boundary of a set is the union of the boundaries of its interior and closure.

2. In order for the boundary of a set to coincide with the boundary of its interior or the boundary of its closure, it is necessary (but not sufficient) that the interior of the boundary of this set be empty.

3. The boundary of a convex body in an n-dimensional affine space A^n coincides with the boundary of its closure and the boundary of its interior. The complement of a convex set has the same property. An example of a star set that does not have this property is given.

The proof methods are topological and also use facts from the theory of convex sets.

Keywords: boundary, boundary of a boundary, boundary of a convex set, boundary of a star set

Для цитирования: Поликанова И. В. О границах множеств и границах выпуклых множеств // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 120–125. DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-17.

For citation: Polikanova I.V. On the Boundaries of Sets and Boundaries of Convex Sets. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 120–125. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-17.

Введение

Основные факты о границах множеств наиболее полно представлены в капитальном труде К. Куратовского «Топология» [1] в § 6. Дальнейшее изучение границ множеств относилось преимущественно к определенным классам множеств и в первую очередь к выпуклым множествам в разных пространствах, при этом исследовались преимущественно дифференциально-геометрические свойства [2, 3].

Будем обозначать через $\Omega(x)$ систему открытых окрестностей точки x в произвольном топологическом пространстве; $C(X)$, clX, $intX$, ∂X — соответственно дополнение, замыкание, внутренность, граница множества X, определяемые как множества:

$C(X) = \{x|\ x \notin X\}$,
$intX = \{x|\ \exists_{U\in\Omega(x)}\ U \subset X\}$,
$clX = \{x|\ \forall_{U\in\Omega(x)}\ U \cap X \neq \emptyset\}$,
$\partial X = \{x|\ \forall_{U\in\Omega(x)}\ U \cap X \neq \emptyset$ и $U \cap C(X) \neq \emptyset\}$.

В дальнейшем A^n — n-мерное аффинное пространство, E^n — n-мерное евклидово пространство.

Основные результаты.

1. $\partial(intX) = \partial X \ \Leftrightarrow\ \partial(clC(X)) = \partial C(X)$,
$\partial(clX) = \partial X \ \Leftrightarrow\ \partial(intC(X)) = \partial C(X)$.

2. Теорема об альтернативе: *Если множество Y содержит границу множества X, а его дополнение связно, то оно содержит либо множество X, либо его дополнение $C(X)$.*

3. $$\partial\partial X = \partial(clX) \cup \partial(intX).$$

4. *Граница выпуклого тела в A^n совпадает с границей его замыкания и границей его внутренности:*

$$\partial X = \partial(intX) = \partial(clX).$$

Таким же свойством обладает и дополнение выпуклого множества.

Было бы странно, если бы столь очевидные факты не были обнаружены ранее. Однако, возможно, именно в силу их очевидности или же невостребованности приведенные выше формулы не содержатся в современных учебниках по выпуклому анализу и топологии. Единственно, что удалось найти на просторах интернета, — это частичные совпадения с результатом 4:

1) формулу: $\partial X = \partial(intX) = \partial(clX)$ для выпуклых тел (в лекции № 16, судя по ссылке, С.В. Иванова [4]. Приведенное им доказательство в основном совпадает с нашим);

2) теорему [5] (приведена как известный факт без доказательств и без точной ссылки на источник): «Каждая граничная точка выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ является граничной точкой множества внутренних точек дополнения $C(X)$», которая символически выглядит так:

$$\partial X \subset \partial(int\, C(X)).$$

О двойной границе множества известно :
1) $\partial\partial X \subset \partial X$, 2) $\partial\partial\partial X = \partial\partial X$ [1, с. 61].

В разделе 1 данной статьи доказываются свойства границ в произвольном топологическом пространстве, в разделе 2 — свойства границ выпуклых множеств в A^n и приводится пример звездного множества, для которого границы множества, его замыкания и его внутренности не совпадают.

1. Свойства границ множеств

В этом разделе все множества рассматриваются в произвольном топологическом пространстве.

Предложение 1. ([1, с. 61] свойства (3), (4), (5), (7), (11); [6, с. 98] № 336) *Для любого множества X*

a) $\partial(clX) \subset \partial X$.
b) $\partial(intX) \subset \partial X$.
c) $clX = X \cup \partial X$.
d) $\partial C(X) = \partial X$.
e) $intX = X \setminus cl\, C(X) = X \setminus \partial X$.
f) $\partial X = clX \setminus intX$.

Пример 1, показывающий, что *равенство в предложении 1a) может не достигаться.*

Пусть X — замкнутый шар в E^n с исключенной из него хордой b. Тогда $\partial(clX)$ есть сфера, а ∂X — та же сфера в объединении с хордой b.

Пример 2, показывающий, что *равенство в предложении 1b) может не достигаться.*

Пусть X — замкнутый шар в E^n в объединении с точкой A, ему не принадлежащей. Тогда $\partial(intX)$ есть ограничивающая шар сфера, а ∂X — та же сфера в объединении с точкой A.

Замечание 1. В примере 1 $\partial(intX) = \partial X$, а в примере 2 $\partial(clX) = \partial X$. Значит, из первого равенства не следует второе, а второе равенство не влечет первое.

Теорема 1.

$$\partial(intX) = \partial X \ \Leftrightarrow\ \partial(clC(X)) = \partial C(X), \quad (1)$$

$$\partial(clX) = \partial X \ \Leftrightarrow\ \partial(intC(X)) = \partial C(X). \quad (2)$$

`Доказательство.` Докажем сначала равенство

$$C(intX) = cl\, C(X). \quad (3)$$

Оно вытекает из цепочки равенств на основании предложений 1e), d), c) и свойств операций дополнения:

$$C(intX) = C(X \setminus \partial X) = C(X \cap C(\partial X)) =$$
$$= C(X) \cup C(C(\partial X)) = C(X) \cup \partial X =$$
$$= C(X) \cup \partial C(X) = cl\, C(X).$$

Из формулы (3) и предложения 1d) имеем:

$$\partial(cl\ C(X)) = \partial C(intX) = \partial(intX),$$

Получаем формулу:

$$\partial(intX) = \partial(cl\ C(X)). \quad (4)$$

Заменяя в ней множество X на $C(X)$, получим:

$$\partial(int\ C(X)) = \partial(cl\ X). \quad (5)$$

Формулы (1), (2) вытекают из (4), (5) ввиду предложения 1d).

Теорема 2.

$$\partial(\partial X) = \partial(clX) \cup \partial(intX). \quad (6)$$

Доказательство. Докажем включение

$$\partial(\partial X) \subset \partial(clX) \cup \partial(intX). \quad (7)$$

Пусть $x \in \partial(\partial X)$. Тогда

$$\forall_{U\in\Omega(x)} \quad U \cap \partial X \neq \emptyset \quad (8)$$

$$\text{и} \qquad U \cap C(\partial X) \neq \emptyset. \quad (9)$$

Так как $\partial X \subset clX$, то из (8) следует:

$$U \cap clX \neq \emptyset. \quad (10)$$

По предложению 1f)

$$\partial X = clX \setminus intX = clX \cap C(intX).$$

Переходя к дополнениям, получим

$$C(\partial X) = C(clX) \cup intX. \quad (11)$$

Из (9) и (11) следует:

$$U \cap C(\partial X) = U \cap (C(clX) \cup intX) =$$

$$= U \cap C(clX) \cup U \cap intX \neq \emptyset,$$

что влечет:

$$U \cap C(clX) \neq \emptyset \quad \text{или} \quad U \cap intX \neq \emptyset.$$

Рассмотрим случай **a)**:

$$U \cap C(clX) \neq \emptyset. \quad (12)$$

Из (10) и (12) имеем:

$$x \in \partial(clX). \quad (13)$$

Рассмотрим случай **b)**:

$$U \cap intX \neq \emptyset. \quad (14)$$

Из (8) следует, что существует $y \in U \cap \partial X$. Так как $y \in U$, то $U \in \Omega(y)$. А поскольку $y \in \partial X$, то

$$U \cap C(X) \neq \emptyset. \quad (15)$$

По предложению 1e) из (15) выводим:

$$intX \subset X \quad \Rightarrow \quad C(X) \subset C(intX) \quad \Rightarrow$$

$$U \cap C(X) \subset U \cap C(intX),$$

следовательно,

$$U \cap C(intX) \neq \emptyset. \quad (16)$$

Из (14) и (16) следует:

$$x \in \partial(intX) \quad (17)$$

Показали, что для $x \in \partial(\partial X)$ выполняется (13) или (17). Тем самым включение (7) установлено.

Теперь проверим обратное включение:

$$\partial(clX) \cup \partial(intX) \subset \partial(\partial X). \quad (18)$$

Случай **c)**. Пусть $x \in \partial(intX)$. По предложению 1b) $x \in \partial X$ и верно (8):

$$\forall_{U\in\Omega(x)} \quad U \cap \partial X \neq \emptyset.$$

А по определению множества $\partial(intX)$ выполняется формула (14):

$$U \cap intX \neq \emptyset.$$

Формула (11) влечет: $intX \subset C(\partial X)$. Поэтому

$$U \cap C(\partial X) \neq \emptyset. \quad (19)$$

Из (8) и (19) следует: $x \in \partial(\partial X)$.

Случай **d)**. Пусть $x \in \partial(clX)$. По предложению 1a) $x \in \partial X$, а потому верно (8):

$$\forall_{U\in\Omega(x)} \quad U \cap \partial X \neq \emptyset.$$

А по определению множества $\partial(clX)$ выполняется формула (12):

$$U \cap C(clX) \neq \emptyset.$$

Формула (11) влечет: $C(clX) \subset C(\partial X)$, а отсюда вытекает формула (19):

$$U \cap C(\partial X) \neq \emptyset.$$

Из (8) и (19) следует: $x \in \partial(\partial X)$. Тем самым установлено включение (18), которое совместно с (7) дает равенство (6). Теорема доказана.

Из теоремы 2 и предложения 1a),b) имеем:

Следствие 1. $\quad \partial(\partial X) \subset \partial X.$

Следствие 2. *Необходимым условием, для того чтобы $\partial(clX) = \partial X$ или $\partial(intX) = \partial X$, является любое из эквивалентных предложений:*

$$1)\ \partial(\partial X) = \partial X, \tag{20}$$

$$2)\ int(\partial X) = \emptyset. \tag{21}$$

Доказательство. Первое из необходимых условий непосредственно вытекает из формулы (6) ввиду предложений 1a), b). По предложению 1f), учитывая, что граница множества является замкнутым множеством, а значит, $cl(\partial X) = \partial X$, можем записать:

$$\partial(\partial X) = cl(\partial X) \setminus int(\partial X) = \partial X \setminus int(\partial X).$$

Поэтому (21) $\Rightarrow$ (20). А по предложению 1e)

$$int(\partial X) = \partial X \setminus \partial(\partial X),$$

откуда видно, что (20) $\Rightarrow$ (21). Таким образом, (20) $\Leftrightarrow$ (21). Доказано.

Замечание 2. Как показывает пример 3, условия (20), (21) не являются достаточными для того, чтобы выполнялось хотя бы одно из соотношений $\partial(intX) = \partial X$ или $\partial(clX) = \partial X$. Однако очевидно, что открытость множества X достаточна для соотношения $\partial(intX) = \partial X$, а замкнутость множества — для равенства $\partial(clX) = \partial X$. Если же множество X открыто-замкнуто, то выполняются оба равенства.

Пример 3. Пусть X — замкнутый шар в E^n с исключенным из него центром O в объединении с точкой A, ему не принадлежащей, S — ограничивающая шар сфера. Тогда $\partial(clX) = S \cup \{A\}$, $\partial(intX) = S \cup \{O\}$, $\partial X = S \cup \{O, A\}$, $int(\partial X) = \emptyset$.

Теорема 3. *Если $f : Y \to Z$ — гомеоморфизм, то для любого множества $X \subset Y$ справедливо:*

$$\partial f(X) = f(\partial X).$$

Доказательство. При доказательстве используем следующие свойства биективных отображений ([1, с. 23–24] свойства (2'), (3'), (19), (21)): для любых подмножеств X_1, X_2, X множества Y и $X' \subset Z$

1) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.
2) $f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2)$.
3) $f^{-1}(f(X)) = X$.
4) $f(f^{-1}(X')) = X'$.

Здесь через $f(X)$ обозначен образ множества X, а через $f^{-1}(X')$ — прообраз множества X' при биективном отображении $f : Y \to Z$.

Свойство 2) влечет: $f(C(X)) = C(f(X))$.

Докажем включение

$$\partial f(X) \subset f(\partial X). \tag{22}$$

Пусть $y_0 \in \partial f(X)$. Надо показать, что точка $x_0 = f^{-1}(y_0) \in \partial X$. Пусть U — произвольная открытая окрестность точки x_0. Так как f гомеоморфизм, то $f(U)$ — открытая окрестность точки y_0. Так как $y_0 \in \partial f(X)$, то найдутся точки $y_1 \in f(U) \cap f(X)$ и $y_2 \in f(U) \cap C(f(X))$. Из равенства $f(C(X)) = C(f(X))$ следует, что $y_2 \in f(U) \cap f(C(X))$. В силу биективности отображения f в Y существуют прообразы этих точек

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \in f^{-1}(f(U) \cap f(X)),$$
$$x_2 = f^{-1}(y_2) \in f^{-1}(f(U) \cap f(C(X))$$

Поскольку обратное отображение к гомеоморфизму есть гомеоморфизм и, значит, биективно, то

$$f^{-1}(f(U) \cap f(X)) = f^{-1}(f(U)) \cap f^{-1}(f(X)) = U \cap X,$$

$$f^{-1}(f(U) \cap f(C(X))) = f^{-1}(f(U)) \cap f^{-1}(f(C(X))) = = U \cap C(X).$$

Следовательно, $U \cap X \neq \emptyset$ и $U \cap C(X) \neq \emptyset$. Это означает, что $x_0 \in \partial X$. Требуемое включение установлено.

Применяя к гомеоморфизму f^{-1} доказанное выше включение (22), можем записать следующие цепочки соотношений:

$$\partial X = \partial(f^{-1}(f(X))) \subset f^{-1}(\partial f(X)).$$

$$\partial X \subset f^{-1}(\partial f(X)) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ f(\partial X) \subset f(f^{-1}(\partial f(X))) = \partial f(X).$$

Доказали обратное включение

$$f(\partial X) \subset \partial f(X).$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Скорее всего, это известный факт. Но в явном виде такая формулировка нам не встречалась, поэтому мы решили привести полное доказательство.

Предложение 2. ([7, с. 120] теорема 7_G) *Если связное множество X содержится в объединении двух непересекающихся открытых множеств, то оно целиком содержится в одном из этих множеств.*

Теорема 4. (Об альтернативе.) *Пусть множества X, Y таковы, что $C(Y)$ связное множество и $\partial X \subset Y$. Тогда либо $cl\ X \subset Y$, либо $cl\ C(X) \subset Y$.*

Доказательство. $\partial X \subset Y \Rightarrow C(Y) \subset C(\partial X)$. По доказанной выше формуле (11)

$$C(\partial X) = C(clX) \cup intX.$$

Принимая во внимание, что $intX$, $C(clX)$ — непересекающиеся открытые множества, а множество $C(Y)$ связно, на основании предложения 2 делаем вывод, что

$$C(Y) \subset intX \quad \text{либо} \quad C(Y) \subset C(clX).$$

Если $C(Y) \subset intX$, то $C(intX) \subset Y$. А так как $intX \subset X$, то $C(X) \subset C(intX)$, следовательно, $C(X) \subset Y$. Но $\partial(C(X)) = \partial X \subset Y$. Значит,

$$cl\, C(X) = C(X) \cup \partial(C(X)) \subset Y.$$

Если же $C(Y) \subset C(clX)$, то $clX \subset Y$. Готово.

Пример 4, показывающий, что требование связности множества $C(Y)$ существенно. Пусть X — шар радиуса r в n-мерном евклидовом пространстве E^n, а Y — область в E^n, заключенная между двумя шарами с тем же центром, радиусы которых r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам $r_1 < r < r_2$. Тогда $\partial X \subset Y$, а $clX \not\subset Y$ и $cl\, C(X) \not\subset Y$.

Следствие 3. *Пусть множества X, Y таковы, что Y связное множество и $\partial X \subset C(Y)$. Тогда либо $X \subset C(Y)$, либо $Y \subset X$.*

Доказательство. По теореме 4 включение $\partial X \subset C(Y)$ в случае связного множества Y влечет альтернативу: $cl\ X \subset C(Y)$ либо $cl\ C(X) \subset C(Y)$, откуда следует: $X \subset C(Y)$ либо $C(X) \subset C(Y)$. Последнее включение равносильно включению $Y \subset X$. Доказано.

2. О границах выпуклых множеств

Начиная с этого момента, рассматриваем множества в n-мерном аффинном пространстве A^n. Точки пространства будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

Множество X в A^n называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя своими точками A, B оно содержит и отрезок $[AB]$. Выпуклое множество с непустой внутренностью будем называть *выпуклым телом*.

Множество X в A^n называется *звездным относительно центра O*, если всякий исходящий из точки O луч пересекает множество X по связному множеству (точке, отрезку, лучу).

Предложение 3. ([8, с. 9] лемма 1.1) *Если X — выпуклое тело и $A \in clX$, $B \in intX$, то все точки отрезка $[AB]$ за исключением, может быть, точки A являются внутренними точками множества X.*

Теорема 5. *Для выпуклого тела X справедливы формулы:*

$$\partial(clX) = \partial X = \partial(intX). \tag{23}$$

$$\partial(clC(X)) = \partial C(X) = \partial(intC(X)). \tag{24}$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства в формуле (23) для выпуклого тела X ввиду предложения 1а) достаточно установить включение

$$\partial X \subset \partial(clX). \tag{25}$$

Пусть точка $M \in \partial X$. Тогда для любой ее окрестности U имеет место:

$$U \cap X \neq \emptyset, \quad U \cap C(X) \neq \emptyset. \tag{26}$$

Так как $X \subset clX$, то соотношение $U \cap X \neq \emptyset$ влечет $U \cap clX \neq \emptyset$. Возьмем произвольно точку $A \in intX$. Все точки луча

$$[MA') = \{N_\lambda = \lambda A + (1-\lambda)M |\ \lambda \in (-\infty, 0]\},$$

(дополнительного к лучу $[MA)$) за исключением его вершины принадлежат множеству $C(clX)$, иначе, предположив, что лучу $[MA')$ принадлежит некоторая точка $N \in clX$, мы должны заключить на основании предложения 3, что все точки отрезка $[AN]$, за исключением, возможно, точки N, — внутренние для X, а значит, и точка $M \in intX$, что противоречит ее определению как граничной точки. Но луч $[MA')$ имеет непустое пересечение с U, что следует из непрерывности операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр в топологическом линейном пространстве, так как точки N_λ при $\lambda \to 0-$, сходятся к M и попадают в U. Поэтому $U \cap C(clX) \neq \emptyset$. Показали, что всякая окрестность U точки M пересекается как с множеством clX, так и с его дополнением. Значит, $M \in \partial(clX)$ и включение (25), а вместе с ним и первое равенство в (23) установлены.

Для доказательства второго равенства в (23) ввиду предложения 1б) достаточно установить включение

$$\partial X \subset \partial(intX). \tag{27}$$

Пусть $M \in \partial X$, а U — произвольная ее окрестность. Тогда выполнены соотношения (26). Так как $intX \subset X$, то $C(X) \subset C(intX)$, что влечет

$$U \cap C(intX) \neq \emptyset.$$

Возьмем произвольно точку $A \in intX$. Отрезок

$$[AM] = \{M_\lambda = \lambda A + (1-\lambda)M |\ \lambda \in [0,1]\}$$

имеет непустое пересечение с U, так как точки M_λ при $\lambda \to 0+$, сходятся к M и попадают в U. По предложению 3 все точки отрезка $[AM]$, кроме M, принадлежат $intX$, поэтому

$$U \cap intX \neq \emptyset.$$

Показали, что всякая окрестность U точки M пересекается как с множеством $intX$, так и с его дополнением. Значит, $M \in \partial(intX)$ и включение (27), а вместе с ним и второе равенство в (23) установлены. Формулы (24) обосновываются теоремой 1.

Замечание 4. *Для звездного множества X в A^n формулы* (23), (24) *могут не выполняться.*

Пример 5. Пусть l — полярная ось на евклидовой плоскости E^2 с полюсом O. Звездное множество X представляет собой объединение отрезков с одним концом в точке O. Причем если отрезок составляет с осью l угол, выражающийся рациональным числом, то его длина равна $2r$, а если иррациональным числом, то его длина равна r ($r > 0$, угол изменяется в пределах $[-\pi, \pi]$). Тогда (вспоминаем формулы (4), (5)) $\partial(intX) = \partial cl\ C(X)$ — окружность с центром O радиуса r, $\partial(clX) = \partial(int\ C(X))$ — окружность с центром O радиуса $2r$, а $\partial X = \partial C(X)$ — замкнутое кольцо, заключенное между этими двумя окружностями. Таким образом, формулы (23), (24) для множества X не имеют места. Этот пример служит хорошей иллюстрацией формулы (6).

Заключение

Итак, нами получены необходимые условия совпадения границы множества и границы его внутренности или замыкания, приведены некоторые достаточные условия, к коим относится, в частности, выпуклость множества. Полученные результаты автор использовал при изучении выпуклых оболочек границ множеств.

Библиографический список

1. Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1. 594 с.

2. Александров А.Д. Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей // Ученые записки ЛГУ. Сер. Матем. 1939. Вып. 6. № 3. С. 3–35.

3. Fillastre F., Izmetiev I., Veronelli G. Hiperbolization of Cusps with Convex Boundary // Manuscripta Mathematica. 2016. Vol. 150 (3–4). P. 475–492. DOI: 10.1007/s00229-015-0814-y

4. Иванов С. В. Студентам, 2 семестр, весна 2020, лекция 16 (с заметками) Лекции по геометрии и топологии. URL: https://pdmi.ras.ru/~svivanov/uni/uni.html (дата обращения: 22.09.2023).

5. Хованский А.Г. Пополнения выпуклых семейств выпуклых множеств // Математические заметки. 2012. Т. 91. № 3. С. 440–458. DOI: 10.4213/mzm8567

6. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.

7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. СПб.: Лань, 2010. 368 с.

8. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.

References

1. Kuratovski K. *Topology*. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe. 1966. Vol. 1. 560 p.

2. Alexandrov A.D. Almost Everywhere Existence of the Second Differential of a Convex Function and Some Properties of Convex Surfaces Connected with It. *Leningrad State Univ. Annals*. 1939. Math. Ser. Vol. 6. No 37. P. 3–35. (In Russ.)

3. Fillastre F., Izmetiev I., Veronelli G. Hiperbolization of Cusps with Convex Boundary. *Manuscripta Mathematica*. 2016. Vol. 150 (3–4). P. 475–492. DOI: 10.1007/s00229-015-0814-y

4. Ivanov S.V. For Students. 2nd Semester, Spring 2020, Lecture 16 (with notes) *Lectures on Geometry and Topology* . URL: https://pdmi.ras.ru/~svivanov/uni/uni.html. (In Russ.) (accessed 22.09.2023). (In Russ.).

5. Khovansky A.G. Completion of Convex Families of Convex Sets. *Mathematical Notes*. 2012. Vol. 91. No 3. P. 440–458. (In Russ.). DOI: 10.1134/S000143461203011X

6. Arkhangelsky A., Ponomarev V.I. *Fundamentals of General Topology in Problems and Exercises.* Moscow: Nauka, 1974. 424 p. (In Russ.)

7. Alexandrov P.S. *Introduction to Set Theory and General Topology*. Saint Petersburg: Doe, 2010. 368 p. (In Russ.)

8. Leichtweis K. *Convex Sets.* Moscow: Nauka, 1985. 336 p. (In Russ.)

Информация об авторе

И.В. Поликанова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул, Россия.

Information about the author

I.V. Polikanova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia.