Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 101–107.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 1 (135). P. 101–107.

Научная статья
УДК 519.67
DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-14

О некоторых вариациях задач об охране картинной галереи

Александр Владимирович Гринкевич[1], *Дмитрий Николаевич Оскорбин*[2], *Егор Дмитриевич Титов*[3]

[1]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, alexander.grin97@gmail.com
[2]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, oskorbin@yandex.ru
[3]Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, tutel00@mail.ru

Original article

On Some Variations of the Problem of Protecting the Art Gallery

Alexander V. Grinkevich[1], *Dmitry N. Oskorbin*[2], *Egor D. Titov*[3]

[1]Altai State University, Barnaul, Russia, alexander.grin97@gmail.com
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, oskorbin@yandex.ru
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, tutel00@mail.ru

Видеокамеры являются наиболее распространенным и доступным средством охраны. То, что попадает в объектив камеры, передается на экраны мониторов в помещении охраны. Важно, чтобы количество мониторов было сведено к минимуму, при этом камеры должны размещаться таким образом, чтобы все помещение находилось под охраной. Уменьшение числа видеокамер позволяет уменьшить цену всей системы наблюдения. Оптимизации систем защиты посвящена серия задач об охране картинной галереи. В настоящее время задачи об охране картинной галереи являются достаточно хорошо изученными задачами видимости в вычислительной геометрии. Они возникли как задачи охраны некоторой художественной галереи наименьшим числом средств наблюдения, которые обозревают все ее залы. В двумерном случае план галереи представлен в виде простого многоугольника, охранник — точкой внутри него.

В данной работе рассматриваются две вариации задачи: проблема сторожевого маршрута и задача об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника. Эти задачи рассматривались в работах многих математиков. Нами приводятся описание алгоритмов решения этих задач и псевдокоды основных процедур, необходимых для реализации этих алгоритмов на языке программирования Python.

Video cameras are the most common and affordable means of security. What is captured by the camera lens is transmitted to the video surveillance monitor screens in the security room. It is important to reduce the number of the monitor screens to a minimum and place the surveillance cameras to cover the entire protected areas. Reducing the number of video cameras helps significantly reduce the price of the entire surveillance system. A series of problems on the protection of an art gallery are devoted to the optimization of security systems. Currently, art gallery security problems are fairly well-studied visibility problems in computational geometry. It can be seen as the problem of using the least number of surveillance cameras to provide video coverage of all the rooms and halls of an art gallery. In the two-dimensional case, the gallery layout is represented as a simple polygon, with the guard as a point inside it.

This paper considers two variations of the problem: the guard route problem and the problem of guarding an art gallery on the surface of a convex polyhedron. These problems were considered in the works of many mathematicians. The paper provides a description of algorithms for solving these problems and pseudocodes of the main procedures necessary to implement these algorithms in the Python programming language.

Ключевые слова: максимальное паросочетание, сторожевой маршрут, простой многоугольник, алгоритм расстановки охранников, разрез, рефлективная вершина, триангуляция, двойственный граф многогранника

Keywords: maximum matching, sentry route, simple polygon, algorithm for the placement of guards, section, reflective vertex, triangulation, dual graph of a polyhedron

Для цитирования: Гринкевич А.В., Оскорбин Д.Н., Титов Е.Д. О некоторых вариациях задач об охране картинной галереи // Известия Алтайского государственного университета. 2024. No 1 (135). С. 101–107. DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-14.

For citation: Grinkevich A.V., Oskorbin D.N., Titov E.D. On Some Variations of the Problem of Protecting the Art Gallery. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 101–107. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-14.

Введение

В области изучения задач об охране картинной галереи известно многочисленное количество вариантов. Модификациям подвергаются план галереи и область видимости охранников, а также варианты их размещения или возможность перемещения, а также возможны переходы в более высокую размерность [1].

В случае, когда охранники располагаются в вершинах простого многоугольника, получена оценка наименьшего числа охранников галереи. Существует теорема о картинной галерее, принадлежащая Васеку Хваталу, которая утверждает, что для охраны многоугольника из n вершин всегда достаточно $\left[\frac{n}{3}\right]$ охранников [2, с. 39–41]. Вопрос о количестве охранников поставил для Хватала в 1973 г. Виктор Кли. Вскоре Хватал доказал теорему. Позднее Стив Фиск добился той же оценки, использовав раскраску в три цвета [3, с. 374].

Есть и другие модификации изучаемой задачи. Один из случаев — это задача в ортогональных многоугольниках, т.е. ребра находятся под прямыми углами. Существует, по крайней мере, три доказательства, утверждающих, что в этом случае всегда достаточно и иногда необходимо $\left[\frac{n}{4}\right]$ охранников. Это доказательство Джона Кана, Марии Клаве и Даниэля Клейтмана [4, с. 194 – 206], доказательство Анны Любив [5, с. 97–106] и доказательство Ёрга-Рюдигера Сака и Туссэна [6, с. 153–176].

1. Проблема сторожевого маршрута

Проблема сторожевого маршрута была впервые представлена Годфридом Туссэном и Дэвидом Ависом в 1981 г. и заключается в нахождении кратчайшей замкнутой кривой (маршрута сторожа) внутри простого многоугольника так, чтобы из каждой точки многоугольника была видна хотя бы одна точка на кривой.

Первый алгоритм поиска кратчайшего маршрута сторожа за полиномиальное время был представлен Карлссоном, Йонссоном и Нильссоном из Технологического университета Лулеа и Департамента компьютерных наук Лундского университета Швеции [7]. В данной статье мы рассмотрим часть этого алгоритма, а именно построение фиксированного маршрута сторожа.

1.1. Определения

Пусть $\mathbf{P}$ — простой многоугольник с n вершинами. Представим $\mathbf{P}$ в виде списка координат вершин, который получен прохождением границы $\mathbf{P}$ против часовой стрелки. Такое представление позволяет ориентировать ребра $\mathbf{P}$, задав им направление, и тем самым мы можем сказать, что внутренняя часть многоугольника будет находиться слева относительна ребер. Также будем считать, что точка $p \in \mathbf{P}$ видит точку $q \in \mathbf{P}$, если отрезок $[p, q]$ содержится в $\mathbf{P}$.

Сторожевым маршрутом в $\mathbf{P}$ является замкнутая кривая $\mathbf{W}$, если для любой точки $p \in \mathbf{P}$ существует $q \in \mathbf{W}$ такая, что p видит q. Если мы задаем точку d на границе $\mathbf{P}$ и заставляем сторожевой маршрут проходить через эту точку, то в таком случае мы говорим о *фиксированном маршруте сторожа*. В ином случае маршрут является *плавающим* (рис. 1).

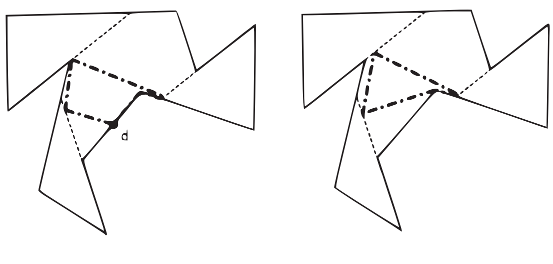

Рис. 1. Фиксированный и плавающий маршруты

Разрез — это направленный отрезок прямой в P, такой что конечные точки разреза лежат на границе $\mathbf{P}$, а внутренняя часть разреза лежит во внутренней части $\mathbf{P}$. Разрез делит $\mathbf{P}$ на два подполигона. Если разрез представлен отрезком

$[p, q]$, то говорят, что разрез направлен от p к q.

Рассмотрим рефлективную вершину (т.е. вершину, внутренний угол в которой больше $180°$) многоугольника $\mathbf{P}$. Ребра, соединяющиеся в этой вершине, можно продлить внутрь $\mathbf{P}$ до тех пор, пока их продолжение не достигнет граничной точки $\mathbf{P}$. Отрезок, соединяющий рефлективную вершину и точку на границе $\mathbf{P}$, будем называть *расширенным разрезом*. Этот разрез имеет то же направление, что и ребро, к которому он коллинеарен.

Проведем дальнейшее разделение между типами разрезов. Пусть нам задана точка d на границе многоугольника. Учитывая её, мы говорим, что расширенный разрез $\boldsymbol{c}$ является ***прямым*** по отношению к d, если d лежит слева от разреза $\boldsymbol{c}$. В противном случае с является *обратным* по отношению к d. Нетрудно заметить, что в таком случае нам интересны именно обратные разрезы, ведь только в правых точках относительно разреза видимость перекрывается соответствующими ребрами.

Далее введем такое понятие как доминирования одного отрезка над другим, и понятие существенного разреза.

Расширенный разрез ***c1*** ***доминирует*** над другим расширенным разрезом ***c2***, если все точки в $\mathbf{P}$ слева от ***c1*** также находятся слева от ***c2***. Говорят, что расширенный разрез является *существенным*, если он не доминируется никаким другим разрезом.

1.2. Алгоритм

Краткий план алгоритма для построения кратчайшего фиксированного маршрута, описанный Карлссоном, Йонссоном и Нильссоном [7, с. 380–383], заключается в следующем: найти расширенные разрезы, одновременно являющиеся обратными по отношению к **d**, выбрать среди оставшихся те, которые являются существенными, а также их разбиение на фрагменты, и произвести процесс разворачивания нашего многоугольника **P** [8] путем использования существенных разрезов и их фрагментов в качестве зеркал до тех пор, пока мы не увидим отражение **d'** нашей точки **d**.

Кратчайший путь от **d** к **d'** в нашем развернутом многоугольнике **P'** можно сопоставить с маршрутом в **P**, который и будет являются кратчайшим фиксированным маршрутом сторожа в **P**. Вычисление расширенных разрезов не является трудной задачей. Для их нахождения нам лишь нужно знать, какие вершины P являются рефлективными. Продлив ребра, соединяющиеся в этих вершинах, до пересечения с границей P и запомнив точку пересечения, мы получим расширенный разрез. Важно напомнить, что каждое ребро P имеет свое направление, полученное в результате обхода границы P против часовой стрелки. Поэтому алгоритм нахождения рефлективных вершин будет следующим: Пусть Ref — множество рефлективных вершин

for i = 1 in range(len(P)-1) **do**
  $p = P[i-1]$
  $q = P[i]$
  $z = P[i+1]$
  if угол между $[p, q][q, z] > 180$ **then**
    $Ref = Ref \cup P[i]$
  end if
end for

Пусть **E** обозначает множество расширенных разрезов. Каждый из них имеет свое направление в зависимости от ребра, которому он коллинеарен. В таком случае нетрудно проверить, какие из них являются обратными относительно точки d. Результат такого отбора представлен на рисунке 2.

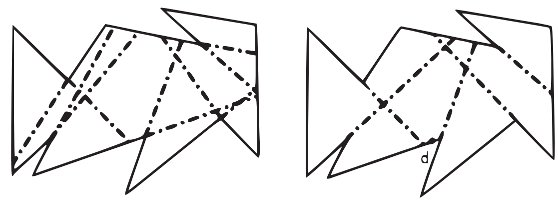

Рис. 2. Обратные расширенные разрезы

Для вычисления множества существенных разрезов **C** нам нужно определить хотя бы один такой разрез. Между двумя разрезами легко определить за постоянное время, доминирует ли один разрез над другим. Для этого достаточно хранить информацию о том, где конечные точки разрезов лежат на границе **P**. Поскольку свойство доминирования является транзитивным, мы можем за линейное время найти один существенный разрез, выполняя попарное сравнение, всегда сохраняя разрез, который не доминируется.

Пусть *c1* — полученный нами существенный разрез. Отсортируем множество **E** так, чтобы разрезы появлялись в порядке, в котором их начальные точки встречаются при обходе границы P против часовой стрелки.

Пусть $current = c1$, а множество $C = c1$

for i = 2 in range(len(E)) **do**
  if current не доминирует над c[i] **then**
    $C = C \cup c[i]$
    $current = c[i]$
  end if
end for

Итак, отсеяв все ненужные разрезы, мы получили множество **C** — существенных разрезов, являющихся обратными относительно точки d. Любой существенный разрез пересекается не более чем $k-1$ другими разрезами, k — общее число существенных разрезов в **C**, тем самым он делится не более чем на k сегментов. Назовем эти сегменты *фрагментами* разреза и введем понятие доминирования фрагмента над разрезом. Мы говорим, что фрагмент f *доминирует* над разрезом $\boldsymbol{c}$, если f лежит справа от (или на) $\boldsymbol{c}$.

В свою очередь, для вычисления фрагментов можно воспользоваться алгоритмом Шазеля и Эдельсбруннера [9]. Результат показан на рисунке 3.

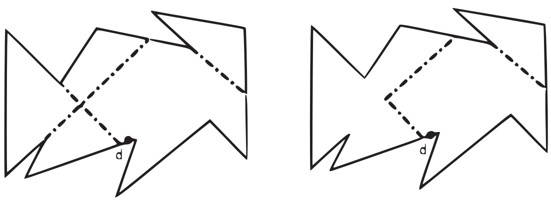

Рис. 3. Существенные разрезы

Первым шагом разворачивания многоугольника **P** будет отсечение всех его частей, которые лежат слева от существенных разрезов. Полученный треугольник **P'** триангулируется, для этого можно воспользоваться методами, описанными в [1], и разворачивается с использованием существенных разрезов в качестве зеркал следующим образом: из точки d обходим границу **P'** по часовой стрелке, пока не достигнем первого существенного разреза. Из треугольников триангуляции, которые примыкают к пройденной части границы, мы строим первую часть нашей многоугольной формы.

Далее осуществляем переход по границе многоугольника **P'** от первого существенного разреза до второго и строим полигон из треугольников, примыкающих к этой части границы, прикрепляя его к ранее построенному полигону, используя первый существенный разрез как зеркало. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится отражение d'.

В развернутом многоугольнике **P'** находим кратчайший маршрут между **d** и **d'**. И Наконец, полученный многоугольник складывается обратно в **P'**, и тем самым мы получаем кратчайший фиксированный маршрут сторожа в **P**. Разворачивание многоугольника **P'** представлено на рисунке 1.

2. Задача об охране картинной галереи на поверхности выпуклого многогранника

Следующий вариант задачи об охране картинной галереи — это ее трехмерный аналог. План картинной галереи представлен в виде выпуклого многогранника, а охранник — точкой в вершине; также приводится доказательство основной теоремы, которая дает оценку наименьшего количества охранников для наблюдения за поверхностью многогранника. Область видимости охранника ограничена поверхностью многогранника. Необходимо оценить, какое наименьшее количество охранников иногда необходимо и всегда достаточно для наблюдения за всей поверхностью многогранника.

На сегодняшний день известен единственный нетривиальный результат для трехмерного случая, касающийся внешней видимости охранников.

Пусть дан выпуклый многогранник в R^3, V, E и F — количество его вершин, ребер и граней соответственно. Установим зависимость между F и минимальным числом охранников.

Дальнейшие результаты получены с помощью оценки числа паросочетаний в двойственном графе многогранника. Нам понадобится следующая теорема Нишизеки о размере максимального паросочетания в плоских графах.

Лемма (Нишизеки) [10]. Если $G - k$ — связный планарный ($k \geq 2$) граф на n вершинах с минимальной степенью вершины $\delta \geq 3$, тогда для

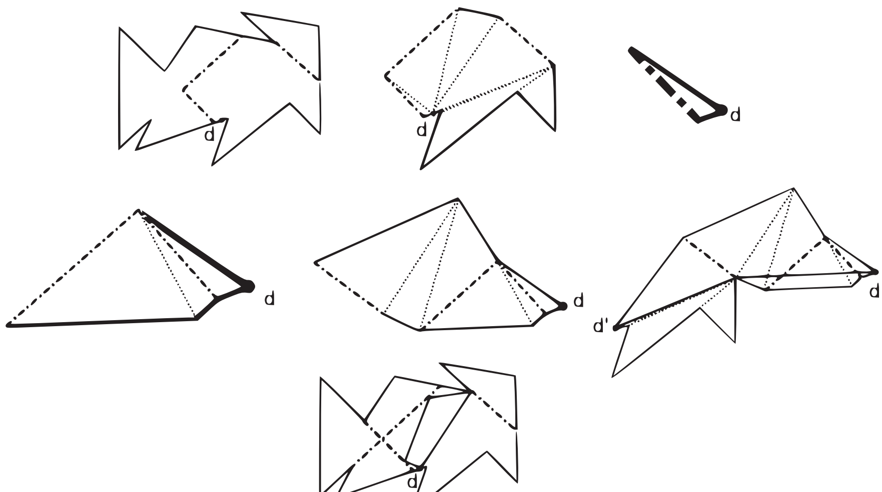

Рис. 4. Алгоритм поиска максимального паросочетания на примере куба

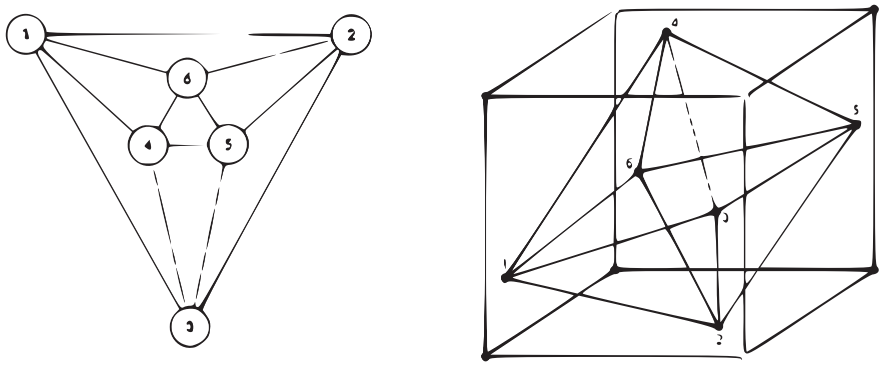

Рис. 5. Алгоритм поиска максимального паросочетания на примере куба

всех $n \geq 14$ количество ребер в максимальном паросочетании G не менее $[\frac{n+4}{3}]$, а для всех $n < 14$ количество ребер равно $[\frac{n}{2}]$.

Далее приведем основную теорему о картинной галерее в трехмерном случае.

Теорема (Грюнбаум и О'Рурк, 1983) [11, с. 119–130]. $[(2F-4)/3]$ вершинных охранников иногда необходимо и всегда достаточно, чтобы поверхность выпуклого многогранника из F граней ($F \geq 10$) находилась под присмотром.

Доказательство данной теоремы представлено в работе [10]. Оно показывает, что рассматриваемую задачу можно свести к поиску максимального паросочетания в двойственном графе многогранника. В доказательстве применяется теорема Балинского о структуре графа многогранника размерности 3 и выше [12].

Для достижения цели применим алгоритм Эдмондса [13], вычислительная сложность которого составляет $O(n^3)$. Введем необходимые понятия.

Суть алгоритма Эдмондса состоит в сжатии циклов нечетной длины (при наличии) в исходном графе **G** в псевдовершину. Данная процедура называется сжатием цветка (под цветком понимается цикл нечетной длины).

В полученном псевдографе **G'** ищется увеличивающаяся цепь, т.е. такая чередующаяся цепь, в которой первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию, с помощью обхода в ширину. После этого цветки разворачиваются. Таким образом осуществляется обратный переход к исходному графу и восстановление увеличивающейся цепи в нем. Псевдокод алгоритма представлен ниже.

Процедура edmonds blossom algorithm:

for u in range(self.V) **do**

if текущая вершина не содержит смежную ей в паросочетании **then**

строить путь

end if

end for

Процедура find augmenting path:

$v = CurrentVertex$

if обнаружили цикл нечетной длины **then**

сжать его

end if

if Пришли в свободную вершину **or**. Пришли в несвободную вершину **then**

добавить очередную, смежную ей в паросочетании

end if

Дальнейшие исследования будут посвящены оптимизации реализованных алгоритмов.

Заключение

Задачу о картинной галерее поставил Виктор Кли в 1973 г. в беседе с Васеком Хваталом. В 1975 г. Хватал представил первое доказательство оценки наименьшего числа камер, которого всегда достаточно и иногда необходимо для наблюдения за простым многоугольником из n вершин. Этот результат получил название «теорема о картинной галерее», или «теорема об охранниках».

В работе также рассмотрены и другие проблемы, связанные с задачей о картинной галерее, приведен их краткий обзор, представлены псевдокоды процедур, которые необходимы для описанных алгоритмов решения задач, применимых для реализации на языке программирования Python.

Дальнейшие исследования будут посвящены оптимизации реализованных алгоритмов.

Библиографический список

1. Берг М.,Чеонг О., Кревельд М., Овермарс М. Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения / пер. с англ. А.А. Слинкин. М., 2017. 438 с. DOI: 10.1007/978-3-540-77974-2

2. Chvatal V. A Combinatorial Theorem in Plane Geometry // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1975. Vol. 18. P. 39–41. DOI: 10.1016/0095-8956(75)90061-1

3. Fisk S. A Short Proof of Chvatal's Watchman Theorem // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1978. Vol. 24. No 3. P. 374. DOI: 10.1016/0095-8956(78)90059-X

4. Kahn J., Klawe M., Kleitman D. Traditional Galleries Require Fewer Watchmen // SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. 1983. Vol. 4. No 2. P. 194–206. DOI: 10.1137/0604020

5. Lubiw A. Decomposing Polygonal Regions into Convex Quadrilaterals // Proc. 1st ACM Symposium on Computational Geometry. Department of Computer Science University of Toronto. Toronto, Canada. ACM Digital Library. 1985. P. 97–106. DOI: 10.1145/323233.323247

6. Sack J.R., Toussaint G.T. Guard Placement in Rectilinear Polygons // Computational Morphology. 1988. Vol. 6. No C. P. 153–176. DOI: 10.1016/B978-0-444-70467-2.50016-3

7. Carlsson S., Jonsson H., Nilsson B. Finding the Shortest Watchman Route in a Simple Polygon // Discrete and Computational Geometry. 1999. Vol. 22. No 3. P. 77–402. DOI: 10.1007/PL00009467

8. Chin W., Ntafos S. Shortest Watchman Routes in Simple Polygons // Discrete and Computational Geometry. 1991. Vol. 6. No 1. P. 9–31. DOI: 10.1007/BF02574671

9. Chazelle B., Edelsbrunner H. An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane // Journal of the ACM. 1992. Vol. 39. No 1. P. 1–54. DOI: 10.1145/147508.147511

10. O'Rourke Joseph. An Alternate Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem // Journal of Geometry. 1983. Vol. 21. P. 119–130. DOI: 10.1007/BF01918136

11. Nishizeki T. Lower Bounds on the Cardinality of the Maximum Matchings of Planar Graphs // Discrete Mathematics. 1979. Vol. 28. No 3. P. 255–267. DOI: 10.1016/0012-365X(79)90133-X

12. Balinski M.L. On the Graph Structure of Convex Polyhedral in n-space // Pacific Journal of Mathematics. 1961. Vol. 11. No 2. P. 224–227. DOI: 10.2140/pjm.1961.11.431

13. Ivanov M. Edmonds Algorithm for Finding the Greater Matching in Arbitrary Graphs. E-maxx.ru: Information and Reference Portal. URL: https://emaxx.ru/algo/matchingedmonds (accessed: 06.12.2012).

References

1. Berg M., Cheong O., Kreveld M., Overmars M. *Computational Geometry. Algorithms and Applications*. 2017. P. 438. (In Russ.). DOI: 10.1007/978-3-540-77974-2

2. Chvatal V. A Combinatorial Theorem in Plane Geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1975. Vol. 18. P. 39–41. DOI: 10.1016/0095-8956(75)90061-1

3. Fisk S. A Short Proof of Chvatal's Watchman Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1978. Vol. 24. No 3. P. 374. DOI: 10.1016/0095-8956(78)90059-X

4. Kahn J., Klawe M., Kleitman D. Traditional Galleries Require Fewer Watchmen. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*. 1983. Vol. 4. No 2. P. 194–206. DOI: 10.1137/0604020

5. Lubiw A. Decomposing Polygonal Regions into Convex Quadrilaterals. *Proc. 1st ACM Symposium on Computational Geometry. Department of Computer Science University of Toronto.* Toronto, Canada: ACM Digital Library. 1985. P. 97–106. DOI: 10.1145/323233.323247

6. Sack J.R., Toussaint G.T. Guard Placement in Rectilinear Polygons. *Computational Morphology*. 1988. Vol. 6. No C. P. 153–176. DOI: 10.1016/B978-0-444-70467-2.50016-3

7. Carlsson S., Jonsson H., Nilsson B. Finding the Shortest Watchman Route in a Simple Polygon. *Discrete and Computational Geometry*. 1999. Vol. 22. No 3. P. 77–402. DOI: 10.1007/PL00009467

8. Chin W., Ntafos S. Shortest Watchman Routes in Simple Polygons. *Discrete and Computational Geometry*. 1991. Vol. 6. No 1. P. 9–31. DOI: 10.1007/BF02574671

9. Chazelle B., Edelsbrunner H. An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. *Journal of the ACM*. 1992. Vol. 39. No 1. P. 1–54. DOI: 10.1145/147508.147511

10. O'Rourke Joseph. An Alternate Proof of the Rectilinear Art Gallery Theorem. *Journal of Geometry*. 1983. Vol. 21. P. 119–130. DOI: 10.1007/BF01918136

11. Nishizeki T. Lower Bounds on the Cardinality of the Maximum Matchings of Planar Graphs. *Discrete Mathematics.* 1979. Vol. 28. No 3. P. 255–267. DOI: 10.1016/0012-365X(79)90133-X

12. Balinski M.L. On the Graph Structure of Convex Polyhedral in n-space. *Pacific Journal of Mathematics*. 1961. Vol. 11. No 2. P. 224–227. DOI: 10.2140/pjm.1961.11.431

13. Ivanov M. Edmonds Algorithm for Finding the Greater Matching in Arbitrary Graphs. // *E-maxx.ru: Information and Reference Portal.* URL: https://emaxx.ru/algo/matchingedmonds (accessed: 06.12.2012).

Информация об авторах

А.В. Гринкевич, аспирант Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Д.Н. Оскорбин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Е.Д. Титов, студент Института математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

A.V. Grinkevich, Postgraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia;

D.N. Oskorbin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

E.D. Titov, Undergraduate Student of the Institute of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, Barnaul, Russia.