Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 95–100.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 1 (135). P. 95–100.

Научная статья
УДК 514.76
DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-13

Параконтактные метрические структуры на пятимерных неразрешимых алгебрах Ли

Анастасия Александровна Волкова[1], *Николай Константинович Смоленцев*[2]

[1]Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, aaav9414@gmail.com
[2]Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru

Original article

Paracontact Metric Structures on Five-dimensional Unsolvable Lie Algebras

Anastasia A. Volkova[1], *Nikolay K. Smolentsev*[2]

[1]Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, aaav9414@gmail.com
[2]Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, smolennk@mail.ru

В данной работе исследован вопрос о существовании параконтактных метрических и парасасакиевых структур на пятимерных неразрешимых алгебрах Ли. В соответствии с классификационными результатами A. Diatta существует три таких алгебры Ли. Это разложимые алгебры Ли $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$, $aff(\mathbb{R})\times so(3)$ и неразложимая $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$, где ρ есть обычное действие $sl(2,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$. Разложимые алгебры Ли являются прямыми произведениями точной симплектической алгебры Ли $aff(\mathbb{R})$ и трехмерных контактных алгебр Ли. Для неразложимой алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$ в работе Diatta указана процедура построения контактной структуры. Каждая алгебра Ли рассмотрена подробно. Показано, что только на $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$ существуют парасасакиевы структуры. Найдены их выражения в явном виде, вычислены тензоры Риччи и скалярные кривизны. Для других алгебр Ли $aff(\mathbb{R})\times so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$ показано, что существуют параконтактные метрические структуры, но все они не обладают свойством K-параконтактности. Для указанных двух последних алгебр Ли приведены примеры параконтактных метрических структур.

Ключевые слова: пятимерные контактные алгебры Ли, параконтактные метрические структуры, неразрешимые контактные алгебры Ли

This paper studies the problem of the existence of paracontact metric structures and paraSasakian structures on five-dimensional unsolvable Lie algebras. According to the classification by A. Diatta, there are three such Lie algebras. These are the decomposable $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$, $aff(\mathbb{R})\times so(3)$) Lie algebras and the indecomposable $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho \mathbb{R}^2$ Lie algebra, where ρ is the usual action of $sl(2,\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}^2$. Decomposable Lie algebras are direct products of the exact symplectic $aff(\mathbb{R})$ Lie algebra and three-dimensional contact Lie algebras.

For an indecomposable $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho \mathbb{R}^2$ Lie algebra, Diatta gives a procedure for constructing a contact struc-ture. Each Lie algebra is considered in detail. It is shown that para-Sasakian structures exist only on $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$. Their explicit expressions, Ricci tensors, and scalar cur-vatures are obtained. It is shown that there are paracontact metric structures for other $aff(\mathbb{R})\times so(3)$ and $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho \mathbb{R}^2$ Lie algebras, but none of them have the K-paracontact property. Examples of paracontact metric structures are provided for the last two Lie algebras indicated above.

Keywords: five-dimensional contact Lie algebras, paracontact metric structures, unsolvable contact Lie algebras

Для цитирования: Волкова А.А., Смоленцев Н.К. Параконтактные метрические структуры на пятимерных неразрешимых алгебрах Ли // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 95–100. DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-13.

For citation: Volkova A.A., Smolentsev N.K. Paracontact Metric Structures on Five-dimensional Unsolvable Lie Algebras. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 95–100. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-13.

Введение

Геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях являются классическими объектами изучения. Наиболее известными и изученными являются римановы, симплектические и контактные структуры, которые широко используются в математике, механике и физике. Обзор по контактным структурам представлен в работе [1]. Параконтактные структуры являются относительно новыми и в последнее время вызывают значительный интерес (см. напр. [2, 3]). Наиболее полное исследование таких структур можно получить в случае левоинвариантных параконтактных структур на группах Ли [4, 5, 6]. В настоящее время этот вопрос до конца не исследован даже в пятимерном случае, что и обусловливает актуальность и новизну тематики. Пятимерные контактные структуры вызывают большой интерес [7, 8, 9, 2, 10]. Наиболее полное исследование левоинвариантных параконтактных структур на пятимерных группах Ли представлено в работе [2], однако указанную там классификацию нельзя считать полной, поскольку в нее не входит алгебра Ли $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$, где ρ есть обычное действие $sl(2,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$. Поэтому мы снова обращаемся к вопросу о параконтактных метрических структурах на пятимерных неразрешимых алгебрах Ли. При этом мы используем классификационные результаты, представленные в работах [4] и [7]. Согласно работе [4] пятимерные неразрешимые алгебры Ли — это следующие алгебры Ли: $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$, $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$. В данной работе мы покажем, что на алгебре $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$ существуют левоинвариантные парасасакиевы метрические структуры, приведем их выражения в явном виде и вычислим характеристики кривизны. На других алгебрах Ли $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$ существуют параконтактные метрические структуры, которые не являются K-параконтактными.

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия, которые далее будут использоваться. Подробности можно найти в работах [1, 2, 3]. Многообразие M размерности $2n+1$ называется контактным, если на нем задана дифференциальная 1-форма η, такая, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M. Форма η называется контактной. Контактное многообразие M имеет всюду ненулевое векторное поле (характеристическое поле Риба), обозначаемое ξ, которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для любого векторного поля X на M. Контактное распределение D на M определяется уравнением $\eta = 0$.

Определение 1. Параконтактной метрической структурой на M называется четверка (η, ξ, φ, g), где g — псевдориманова метрика и φ — эндоморфизм $\varphi : TM \to TM$ касательного расслоения (аффинор), для которых имеют место следующие свойства:

1. $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$,
2. $d\eta(X,Y) = g(\varphi X, Y)$,
3. $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)$,

где I — тождественный эндоморфизм касательного расслоения TM.

Наиболее интересными классами являются K-параконтактные и парасасакиевы структуры.

Параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется K-параконтактной [1, 2], если векторное поле Риба ξ является киллинговым, т.е. если поток, порожденный полем ξ, сохраняет метрический тензор g. Это выражается равенством $L_\xi g = 0$, гле L_ξ — производная Ли вдоль поля ξ. Эквивалентным условием является $L_\xi \varphi = 0$.

Рассмотрим теперь левоинвариантные параконтактные структуры на группе G. Из инвариантности следует, что все рассмотрения можно проводить на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о параконтактных структурах на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, имея в виду левоинвариантные параконтактные структуры на группе Ли G. Пусть ad_ξ – оператор $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, действующий по формуле: $ad_\xi(X) = [\xi, X] = L_\xi X$, для $X \in \mathfrak{g}$. Тогда из формулы $(L_\xi \varphi)(X) = L_\xi(\varphi(X)) - \varphi(L_\xi X)$ следует:

$$L_\xi \varphi = ad_\xi \circ \varphi - \varphi \circ ad_\xi.$$

Поэтому мы получаем, что алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \eta, \xi, \varphi, g)$ является K-параконтактной тогда и только тогда, когда операторы ad_ξ и φ коммутируют.

Параконтактная структура (η, ξ, φ) называется нормальной [1, 3], если интегрируема почти паракомплексная структура J на $M \times \mathbb{R}$, определенная формулой

$$J(X, f\partial t) = (\varphi X - f\xi, -\eta(X)\partial t),$$

где ∂t — единичный касательный к $\mathbb{R}$ вектор.

Нормальная параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется парасасакиевой.

Условие парасасакиевости выражается формулой [3]:

$$\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]=d\eta\otimes\xi.$$

Ассоциированная псевдориманова метрика g, соответствующая параконтактной структуре (η,ξ,φ), задается по формуле $g(X,Y)=d\eta(\varphi X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$. Вычисление тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны производится по обычным формулам дифференциальной геометрии с учетом левоинвариантности структур. Компоненты связности левоинвариантной метрики на группе Ли находятся по формуле $\Gamma^n_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k,p=1}^n g^{kn}(C^p_{ij}g_{kp}+C^p_{jk}g_{ip}-C^p_{ik}g_{jp})$. Тензор кривизны Римана находится по формуле $R^s_{ijk}=\sum_{p=1}^n\Gamma^p_{jk}\Gamma^s_{ip}-\Gamma^p_{ik}\Gamma^s_{jp}-C^p_{ij}\Gamma^s_{pk}$. Для вычисления тензора Риччи используем формулу $Ric_{ij}=\sum_{s=1}^n R^s_{sij}$. Скалярная кривизна S — это след тензора Риччи. Оператор Риччи RIC определяется из равенства $Ric(X,Y)=g(X,RIC(Y))$.

2. Пятимерные неразрешимые алгебры Ли

Согласно работе [4] пятимерные контактные неразрешимые алгебры Ли – это следующие алгебры Ли: $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$, $aff(\mathbb{R})\times so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^2$.

В работе [4] дано описание контактных структур на пятимерных алгебрах Ли с тривиальным центром и на неразрешимых алгебрах Ли. Согласно работе [4] пятимерные неразрешимые алгебры Ли — это следующие алгебры Ли:

- разложимые: $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$, $aff(\mathbb{R})\times so(3)$,
- неразложимые: $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^2$, где ρ есть обычное действие $sl(2,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$.

Здесь $aff(\mathbb{R})$ — алгебра Ли двумерной группы $Aff(\mathbb{R})$ аффинных преобразований y=ax+b числовой прямой, $sl(2,\mathbb{R})$ — алгебра Ли группы Ли $Sl(2,\mathbb{R})$ матриц порядка 2 с определителем 1 и $so(3)$ — алгебра Ли группы $SO(3)$ ортогональных матриц порядка 3 с определителем 1.

Отметим, что разложимые алгебры Ли являются прямыми произведениями точной симплектической алгебры Ли $aff(\mathbb{R})$ и трехмерных контактных алгебр Ли. Для неразложимой алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})\times_\rho\mathbb{R}^2$ в работе [4] указана процедура построения контактной структуры. Мы используем классификацию контактных структур на указанных алгебрах Ли работ [4] и [7].

2.1. Алгебра Ли $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$

Рассмотрим сначала алгебру Ли $aff(\mathbb{R})\times sl(2,\mathbb{R})$. Алгебра $aff(\mathbb{R})$ имеет базис $\{e_1,e_2\}$ со скобкой Ли $[e_1,e_2]=e_2$. В алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R})$ выберем базис матриц

$$e_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

со скобками Ли:

$$[e_3,e_4]=2e_4,\quad [e_3,e_5]=-2e_5,\quad [e_4,e_5]=e_3.$$

Данная алгебра Ли является контактной с контактными формами η двух типов [4] и [7]:

$$\eta_1=e^2+e^3,\qquad \eta_2=e^2+e^4+e^5,$$

где символами e^1,e^2,e^3,e^4,e^5 обозначены ковекторы, т.е. векторы дуального базиса.

2.1.1. Контактная форма $\eta_1=e^2+e^3$

Легко видеть, что $d\eta_1=-e^1\wedge e^2-e^4\wedge e^5$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi=e_3$. Перейдем к новому базису $\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$ так, чтобы $\eta_1=E^5$, $\xi=E_5$, $d\eta_1=E^1\wedge E^2+E^3\wedge E^4$ и векторы $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ порождали контактное распределение D. Полагаем:

$$E_1=-e_1,\ E_2=e_2-e_3,\ E_3=e_5,\ E_4=e_4,\\ E_3=e_3. \quad (1)$$

В этом случае ненулевые структурные константы принимают значения: $C^2_{12}=-1$, $C^5_{12}=-1$, $C^3_{23}=2$, $C^4_{24}=-2$, $C^5_{34}=-1$, $C^3_{35}=2$, $C^4_{45}=-2$.

Запишем аффинор φ в виде матрицы $\varphi=\varphi_{ij}$ в базисе E_i. Учитывая, что φ обладает свойством $d\eta(\varphi X,\varphi Y)=-d\eta(X,Y)$, $X\in\mathfrak{g}$, легко видеть, что

$$\varphi=\begin{pmatrix}-\varphi_{22}&\varphi_{12}&\varphi_{13}&\varphi_{32}&0\\ \varphi_{21}&\varphi_{22}&\varphi_{23}&-\varphi_{31}&0\\ \varphi_{31}&\varphi_{32}&\varphi_{33}&\varphi_{34}&0\\ \varphi_{23}&-\varphi_{13}&\varphi_{43}&-\varphi_{33}&0\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad (2)$$

Элементы этой матрицы связаны еще условиями, которые следуют из равенства $\varphi^2=I-\eta\otimes\xi$. В координатах это условие выражается системой уравнений: $\sum_k\varphi_{ik}\varphi_{kj}=\delta_{ij}$, $i,j,k=1,\ldots,4$.

Напомним, что параконтактная метрическая структура (η,ξ,φ,g) на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется К-параконтактной, если векторное поле Риба ξ является киллинговым: $L_\xi g=0$. В этом случае $L_\xi\varphi=0$. Как уже ранее упоминалось, (η,ξ,φ,g) является К-параконтактной тогда и только тогда, когда операторы ad_ξ и φ коммутируют. Матрица D^k_i оператора ad_ξ выражается через структурные константы $D^k_i=C^k_{5i}$ и имеет всего два ненулевых элемента: $D^3_3=C^3_{53}=-2$, $D^4_4=C^4_{54}=2$. Поэтому условие коммутирования $ad_\xi\circ\varphi-\varphi\circ ad\xi=0$ операторов ad_ξ и φ в координатах принимает вид:

$$D^i_{53}\varphi_{3j}+D^i_{54}\varphi_{4j}-\varphi_{i3}D^3_{5j}-\varphi_{i4}D^4_{5j}=0$$

и с учетом (2) выполняется при следующих значениях параметров:

$$\varphi_{13}=\varphi_{31}=\varphi_{32}=\varphi_{23}=\varphi_{43}=\varphi_{34}=0.$$

Поэтому матрица аффинора (2) принимает вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} -\varphi_{22} & \varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тогда свойство $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ выполняется при следующих условиях:

$$\varphi_{12}\varphi_{21} + \varphi_{22}^2 = 1, \quad \varphi_{33}^2 = 1. \quad (4)$$

Легко видеть, что в этом случае выполнено условие парасасакиевости. Напомним, что ассоциированная метрика находится через аффинор φ по формуле $g(X,Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 1. *На алгебре Ли $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$ с контактной формой $\eta_1 = e^2 + e^3$ существует парасасакиева метрическая структура. В базисе (1) она имеет аффинор вида (3) с условиями (4). В базисе (1) оператор Риччи RIC имеет матрицу*

$$\begin{pmatrix} \frac{2\varphi_{12}+1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varphi_{12}+1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4\varphi_{33}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4\varphi_{33}-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна выражается формулой: $S = 2\varphi_{12} - 4\varphi_{33} + 1$.

2.1.2. Контактная форма $\eta_2 = e^2 + e^4 + e^5$

Легко видеть, что $d\eta_2 = -e^1 \wedge e^2 - 2e^3 \wedge e^4 + 2e^3 \wedge e^5$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = \frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}e_5$. Перейдем к новому базису:

$$E_1 = -e_1, \quad E_2 = e_2 - \frac{1}{2}e_4 - \frac{1}{2}e_5, \quad E_3 = \frac{1}{2}e_3, \\ E_4 = -\frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}e_5, \quad E_5 = \frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}e_5. \quad (5)$$

Тогда $\eta_2 = E^5$, $\xi = E_5$, $d\eta_2 = E^1 \wedge E^2 + E^3 \wedge E^4$ и векторы $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ порождают контактное распределение D. Поэтому аффинор φ имеет тот же вид (2).

Совершенно аналогично получаем, что условие K-параконтактности выполняется при следующих значениях параметров:

$$\varphi_{32} = \varphi_{13} = \varphi_{31} = \varphi_{23} = \varphi_{33} = 0, \quad \varphi_{43} = \varphi_{34}.$$

Тогда аффинор принимает вид:

$$\varphi = \begin{pmatrix} -\varphi_{22} & \varphi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

с условиями:

$$\varphi_{12}\varphi_{21} + \varphi_{22}^2 = 1, \quad \varphi_{34}^2 = 1. \quad (7)$$

Легко видеть, что в этом случае выполнено условие парасасакиевости. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 2. *На алгебре Ли $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$ с контактной формой $\eta_2 = e^2 + e^4 + e^5$ существует парасасакиева метрическая структура. В базисе (5) она имеет аффинор вида (6) с условиями (7). В базисе (5) оператор Риччи RIC имеет матрицу*

$$\begin{pmatrix} \frac{2\varphi_{12}+1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varphi_{12}+1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\varphi_{34}+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\varphi_{34}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна выражается формулой: $S = 2\varphi_{12} + 2\varphi_{34} + 1$.

2.2. Алгебра Ли $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$

Возьмем на данной алгебре Ли базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, где $e_1, e_2 \in aff(\mathbb{R})$, а e_3, e_4, e_5 — стандартный базис $so(3)$. Имеем следующие ненулевые скобки Ли:

$$[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_5, [e_4, e_5] = e_3, [e_5, e_3] = e_4.$$

В соответствии с результатами [4] и [7] данная алгебра Ли является контактной с контактной формой $\eta = e^2 + e^3$.

Перейдем к новому базису:

$$E_1 = -e_1, \; E_2 = e_2 - e_3, \; E_3 = e_5, \; E_4 = e_4, \\ E_5 = e_3. \quad (8)$$

Тогда $\eta = E^5$, $\xi = E_5$, $d\eta = E^1 \wedge E^2 + E^3 \wedge E^4$ и векторы $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ порождают контактное распределение D. Поэтому аффинор φ имеет тот же вид (2). Структурные константы в новом базисе: $C_{12}^2 = -1$, $C_{12}^5 = -1$, $C_{23}^4 = 1$, $C_{24}^3 = -1$, $C_{34}^5 = -1$, $C_{35}^4 = 1$, $C_{45}^3 = -1$.

Совершенно аналогично получаем, что свойство K-параконтактности выполняется при следующих значениях параметров:

$$\varphi_{32} = \varphi_{13} = \varphi_{31} = \varphi_{23} = 0, \varphi_{43} = -\varphi_{34}.$$

Однако в этом случае условие $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ не выполняется. Таким образом, получаем следующий

Вывод. *На алгебре Ли $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$ с контактной формой $\eta = e^2 + e^3$ не существует K-параконтактных и, следовательно, парасасакиевых метрических структур.*

Существует много параконтактных (не K-параконтактных) метрических структур на алгебре Ли $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$. Приведем в качестве примера одну из таких структур:

$$\varphi = \begin{pmatrix} -1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \frac{\varphi_{13}\varphi_{34}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_{13}\varphi_{34}}{2} & 1 & \varphi_{34} & 0 \\ 0 & -\varphi_{13} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна ассоциированной метрики $g(X,Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$ выражается формулой: $S = 3 + 2\varphi_{12} - \varphi_{34} + \frac{1}{2}\varphi_{34}^2$.

2.3. Алгебра Ли $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$

Выберем стандартный базис e_1, e_2 пространства $\mathbb{R}^2$ и базис e_3, e_4, e_5 алгебры $sl(2,\mathbb{R})$. Действие $sl(2,\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$ выражается скобками Ли $[e_4, e_2] = e_1, [e_5, e_1] = e_2, [e_3, e_1] = e_1, [e_3, e_2] = -e_2$.

В соответствии с результатами [4] и [7] данная алгебра Ли является контактной с контактной формой $\eta = e^1 + e^5$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_5$.

Перейдем к новому базису:

$$E_1 = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_5,\ E_2 = \frac{1}{2}e_3,\ E_3 = e_2,\ E_4 = e_4,$$
$$E_5 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_5. \quad (9)$$

Тогда $\eta = E^5$, $\xi = E_5$, $d\eta = E^1 \wedge E^2 + E^3 \wedge E^4$ и векторы $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ порождают контактное распределение D. Поэтому аффинор φ имеет тот же вид (2). Выпишем ненулевые структурные константы в новом базисе: $C_{12}^1 = 1/2$, $C_{12}^5 = -1$, $C_{13}^3 = 2/3$, $C_{14}^2 = 4/3$, $C_{15}^3 = -2/3$, $C_{23}^3 = -1/2$, $C_{24}^4 = 1$, $C_{25}^1 = 1/2$, $C_{34}^1 = -1/2$, $C_{34}^5 = -1$, $C_{45}^2 = 2/3$.

Матрица D_{5j}^i оператора ad_ξ имеет три ненулевых элемента: $C_{15}^3 = -2/3$, $C_{25}^1 = 1/2$, $C_{45}^2 = 2/3$.

Поэтому из условия коммутирования ad_ξ и φ совершенно аналогично получаем, что свойство K-параконтактности выполняется при следующих значениях параметров:

$$\varphi_{21} = \varphi_{22} = \varphi_{23} = \varphi_{43} = \varphi_{42} = \varphi_{44} = \varphi_{32} = 0,$$
$$\varphi_{12} = \frac{3}{4}\varphi_{24}.$$

Однако в этом случае условие $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$ не выполняется. Таким образом, получаем следующий

Вывод. *На алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$ с контактной формой $\eta = e^2 + e^3$ не существует K-параконтактных и, следовательно, парасасакиевых метрических структур.*

Существует много параконтактных (не K-параконтактных) метрических структур на алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$. Приведем в качестве примера одну (наиболее простую) из таких структур:

$$\varphi = \begin{pmatrix} -1 & \varphi_{12} & 0 & \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & -1 & \varphi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна ассоциированной метрики $g(X,Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$ выражается формулой: $S = 3 + 1 + \frac{2}{3}\varphi_{12}^2$.

Заключение

В работе рассмотрены параконтактные структуры на пятимерных неразрешимых алгебрах Ли. В соответствии с классификационными результатами A. Diatta существует три таких алгебры Ли. Каждая из них рассмотрена подробно. Показано, что только на $aff(\mathbb{R}) \times sl(2,\mathbb{R})$ существуют парасасакиевы структуры. Найдены их выражения в явном виде, вычислены тензоры Риччи и скалярные кривизны. Для других алгебр Ли $aff(\mathbb{R}) \times so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R}) \times_\rho \mathbb{R}^2$ показано, что существуют параконтактные метрические структуры, но все они не обладают свойством K-параконтактности. Для указанных двух последних алгебр Ли приведены примеры параконтактных метрических структур.

Библиографический список

1. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Second Edition. Progress in Mathematics, 203, Birkhauser, Boston Inc., Boston, MA, 2010. 343 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-4959-3

2. Calvaruso G. Perrone A. Five-Dimensional ParaContact Lie Algebras // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 45. P. 115–129. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001

3. Смоленцев Н.К. Левоинвариантные парасасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. Т. 62. С. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3

4. Diatta A. Left Invariant Contact Structures on Lie Groups // Differential Geometry and its Applications. 2008. Vol. 26. P. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001

5. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. Symplectic or Contact Structures on Lie Groups // Differential Geometry and its Applications. 2004. Vol. 21. No 1. P. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006

6. Goze M., Remm E. Contact and Frobeniusian Forms on Lie Groups // Differential Geometry and its Applications. 2014. Vol. 25. P. 74–94. DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.05.008

7. Славолюбова Я.В. Применение систем компьютерной математики к исследованию левоинвариантных контактных метрических структур на пятимерных группах Ли : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Кемеровский государственный университет. Кемерово, 2011. 202 с.

8. Loiudice E. Lotta A. On Five Dimensional Sasakian Lie Algebras with Trivial Center // Osaka Journal of Mathematics. 2018. Vol. 55. P. 39–49.

9. Calvaruso G., Fino A. Five-Dimensional K-Contact Lie Algebras. // Monatshefte fur Mathematik. 2012. Vol. 167. P. 35–59. DOI: 10.1007/s00605-011-0308-2

10. Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 69. С. 37–51. DOI: 10.17223/19988621/69/4

References

1. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Second Edition. *Progress in Mathematics, 203*, Birkhauser, Boston Inc., Boston, MA, 2010. 343 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-4959-3

2. Calvaruso G. Perrone A. Five-Dimensional ParaContact Lie Algebras. *Differential Geometry and its Applications*. 2016. Vol. 45. P. 115–129. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001

3. Smolentsev N.K. Left-invariant Para-sasakian Structures on Lie Groups. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*. 2019. Vol. 62. P. 27–37. (In Russ.). DOI: 10.17223/19988621/62/3

4. Diatta A. Left Invariant Contact Structures on Lie Groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2008. Vol. 26. P. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001

5. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. Symplectic or Contact Structures on Lie Groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2004. Vol. 21. No 1. P. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006

6. Goze M., Remm E. Contact and Frobeniusian Forms on Lie Groups. *Differential Geometry and its Applications*. 2014. Vol. 25. P. 74–94. DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.05.008

7. Slavolyubova Ya.V. *Application of Computer Systems Mathematics to the Study of Left-invariant Conbar Metric Structures on five-Dimensional Groups Lee: Ph. D. thesis.* Kemerovo State University: Kemerovo, 2011. 202 p. (In Russ.).

8. Loiudice E. Lotta A. On Five Dimensional Sasakian Lie Algebras with Trivial Center. *Osaka Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 55. P. 39–49.

9. Calvaruso G., Fino A. Five-Dimensional K-Contact Lie Algebras. *Monatshefte fur Mathematik*. 2012. Vol. 167. P. 35–59. DOI: 10.1007/s00605-011-0308-2

10. Smolentsev N.K., Shagabudinova I.Yu. On Parasasakian Structures on Five-dimensional Lie Algebras. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*. 2021. Vol. 69. P. 37–51. (In Russ.). DOI: 10.17223/19988621/69/4

Информация об авторах

А.А. Волкова, студентка Института фундаментальных наук, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;

Н.К. Смоленцев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики, Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия.

Information about the authors

A.A. Volkova, Undergraduate Student of the Institute of Basic Sciences, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia;

N.K. Smolentsev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.