Известия Алтайского государственного университета. 2024. №1 (135). С. 76–81.
Izvestiya of Altai State University. 2024. No 1 (135). P. 76–81.

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 514.765
DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-10

Об однородных солитонах Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью

Виталий Владимирович Балащенко[1], Павел Николаевич Клепиков[2], Евгений Дмитриевич Родионов[3], Олеся Павловна Хромова[4]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Белоруссия, vitbal@tut.by
[2] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, askingnetbarnaul@gmail.com
[3] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, edr2002@mail.ru
[4] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия, khromova.olesya@gmail.com

MATHEMATICS AND MECHANICS

Original article

On Homogeneous Ricci Solitons on Three-Dimensional Locally Homogeneous (Pseudo)Riemannian Spaces with a Semisymmetric Connection

Vitaly V. Balashchenko[1], Pavel N. Klepikov[2], Evgeniy D. Rodionov[3], Olesya P. Khromova[4]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus, vitbal@tut.by
[2]Altai State University, Barnaul, Russia, askingnetbarnaul@gmail.com
[3]Altai State University, Barnaul, Russia, edr2002@mail.ru
[4]Altai State University, Barnaul, Russia, khromova.olesya@gmail.com

Солитоны Риччи являются естественным обобщением метрик Эйнштейна и представляют собой решение потока Риччи. В общем случае они исследовались многими математиками, что нашло отражение в обзорах Х.-Д. Цао, Р.М. Аройо — Р. Лафуэнте. Наиболее исследован данный вопрос в однородном римановом случае, а также в случае тривиальных солитонов Риччи, или метрик Эйнштейна. В настоящей работе исследованы однородные солитоны Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с нетривиальной группой изотропии и полусимметрической связностью. Получена классификация однородных солитонов Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью. Доказано, что в случае групп Ли существуют нетривиальные инваринтные солитоны Риччи. Ранее Л. Цербо показал, что на унимодулярных группах Ли

Ricci solitons are a natural generalization of Einstein metrics and represent a solution to the Ricci flow. In the general case, they were studied by many mathematicians, which was reflected in the reviews by H.-D. Cao, R.M. Aroyo — R. Lafuente. This issue has been most studied in the homogeneous Riemannian case, as well as in the case of trivial Ricci solitons, or Einstein metrics. In this paper, we study homogeneous Ricci solitons on three-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian spaces with a nontrivial isotropy group and a semisymmetric connection. A classification of homogeneous Ricci solitons on three-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian spaces with a semisymmetric connection is obtained. It is proved that in the case of Lie groups there exist nontrivial invariant Ricci solitons. Earlier, L. Cerbo showed that all invariant Ricci solitons are trivial or Einstein metrics on unimodular с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны или являются метриками Эйнштейна. В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре включительно получен П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным, а в случае размерности 5 и выше вопрос остается открытым.

Ключевые слова: локально однородное пространство, солитон Риччи, полусимметрическая связность, инвариантная (псевдо)риманова метрика

Lie groups with a left-invariant Riemannian metric and a Levi-Civita connection. In the non-unimodular case, a similar result was obtained by P.N. Klepikov and D.N. Oskorbin up to dimension four inclusively. The problem remains open for the cases of dimension 5 and higher.

Keywords: locally homogeneous space, Ricci soliton, semisymmetric connection, invariant (pseudo) Riemannian metric

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111 «Псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи»).

Funding: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22- 21-00111 “Pseudo-Riemannian manifolds with restrictions on the Ricci tensor”).

Для цитирования: Балащенко В. В., Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об однородных солитонах Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 1 (135). С. 76–81. DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-10.

For citation: Balashchenko V.V., Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. On Homogeneous Ricci Solitons on Three-Dimensional Locally Homogeneous (pseudo)Riemannian Spaces with a Semisymmetric Connection. *Izvestiya of Altai State University*. 2024. No 1 (135). P. 76–81. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2024)1-10.

1. Предварительные сведения

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением, или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с векторным кручением [1]. В работах [2–8] изучаются различные свойства полусиметрических связностей.

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$, $r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y)$.

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивита, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 1 [9, 10]. *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью с векторным кручением. Тогда тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π замкнута (т.е. $d\pi = 0$), где $\pi(X) = g(X, V)$, для любого векторного поля X на M.*

Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется *солитоном Риччи*, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \qquad (2)$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется *однородным солитоном Риччи*, а если $M = G$ — группа Ли и поле P левоинвариантно, — *инвариантным солитоном Риччи*.

Замечание 1. *Векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ мы получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X,Y) = Pg(X,Y) + g([X,P],Y) + g(X,[Y,P])$.*

Если риманово многообразие (M, g) со связностью Леви-Чивиты есть многообразие Эйнштейна, или изометрично прямому произведению многообразия Эйнштейна и евклидова пространства, то его метрика g называется *тривиальным солитоном Риччи*.

Теорема 2 [11]. *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

Замечание 2. *В неунимодулярном случае аналогичный результат для связности Леви-Чивиты до размерности четыре включительно получен П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным [12].*

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Пусть* $(M = G/H, g, \nabla)$ *— трехмерное (псевдо)риманово локально однородное пространство с полусимметрической связностью* ∇*, отличной от связности Леви-Чивиты и нетривиальной группой изотропии. Тогда любой однородный солитон Риччи на* M *является тривиальным.*

Замечание 3. *В случае групп Ли инвариантные солитоны Риччи для многообразий с полусимметрической связностью изучались в работах [13–15]. В данных работах была дана полная классификация инвариантных солитонов Риччи на трехмерных метрических группах Ли с полусимметрической связностью. В результате были найдены нетривиальные инвариантные солитоны Риччи в случае полусимметрических связностей, отличных от связности Леви-Чивиты, а также решена гипотеза Л. Цербо для левоинвариантных лоренцевых метрик со связностью Леви-Чивиты.*

2. Локально однородные пространства

Пусть далее $(M = G/H, g)$ — трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство. Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на M метрическую связность ∇ с векторным кручением. Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r.

Для удобства вычислений используем представление локально однородного пространства $M = G/H$ в виде алгебр Ли (подробнее см. [16]). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы изометрий G, $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы изотропии H, $\mathfrak{m}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ до алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\dim \mathfrak{h} = h$ и $\dim \mathfrak{m} = m$. Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ алгебры $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ — базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно.

Положим, $[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k$, $[u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k$, $[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k$, где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$ задается равенством $(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k$, тогда условие инвариантности метрического тензора g имеет вид: $(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h$, где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Компоненты связности Леви-Чивита ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right),$$

$$\left(\bar{\Gamma}^g\right)_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl},$$

где $\nabla_{u_i}^g u_j = (\Gamma^g)_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i}^g u_j = \left(\bar{\Gamma}^g\right)_{ij}^k u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная матрице $\{g_{ij}\}$.

Пусть вектор $V \in \mathfrak{m}$, тогда компонеты метрической связности ∇ с векторным кручением (1) задаются равенствами:

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - V^s g_{sj} \delta_i^k, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \left(\bar{\Gamma}^g\right)_{ij}^k,$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$.

Компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r можно вычислить с помощью следующих формул:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps},$$

$$r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть $P = P^k u_k$ — инвариантное векторное поле. Тогда $L_P g(u_i, u_j) = (Pg)(u_i, u_j) + P^k g([u_i, u_k]_{\mathfrak{g}}, u_j) + P^k g(u_i, [u_j, u_k]_{\mathfrak{g}})) = -P^k[g(c_{ki}^s u_s + C_{ki}^\alpha e_\alpha, u_j) + g(u_i, c_{kj}^s u_s + C_{kj}^\alpha e_\alpha)] = -P^k(c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si})$.

Таким образом, (2) можно переписать в виде:

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k(c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}). \qquad (3)$$

Исследование однородных солитонов Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях основывается на следующей теореме, которая была доказана в римановом случае в работе [17], а в лоренцевом — в [18].

Теорема 4 [17, 18]. *Пусть* (M, g) *— трехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие. Тогда либо* (M, g) *является локально симметричным (относительно связности Леви-Чивита) либо оно локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.*

В работе [19] на трехмерных локально симметрических пространствах (M, g) определены базисы и инвариантные (псевдо)римановы метрики, удобные для вычислений. Далее мы будем использовать нумерацию из этой работы.

В силу локальной симметричности многообразия M для метрики g справедливо [20, 21] $g([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) + g(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, что в выбранном базисе равносильно условию $c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si} = 0$. Таким образом, уравнение солитона (3) равносильно уравнению Эйнштейна для любого инвариантного векторного поля P

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij}. \qquad (4)$$

Рассмотрим последовательно трехмерные локально симметрические пространства работы [19], сохраняя нумерацию данной работы, и покажем, что уравнение (4), а значит, и эквивалентное ему (2), имеет решение только в одном из двух случаев: $\Lambda = 0$, и поле V произвольно, или $V = 0$, а полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты.

2.1. Случай 3.4.1

В данном случае система уравнений (4) имеет вид:

$$\begin{aligned}(V^1)^2(g_{22})^2 &= 0,\\ (V^3)^2(g_{22})^2 &= 0,\\ V^2(g_{22})^2V^3 &= 0,\\ V^2V^1(g_{22})^2 &= 0,\\ \Lambda g_{22} - (g_{22})^2\left(V^3V^1 - (V^2)^2\right) &= 0,\\ 2V^3(g_{22})^2V^1 - \Lambda g_{22} &= 0,\\ g_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j &\in \{1, 2\}.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

2.2. Случай 3.5.2

В данном случае система уравнений (4) имеет вид:

$$\begin{aligned}V^2(g_{33})^2V^1 &= 0,\\ -(V^1)^2(g_{33})^2 - (V^2)^2(g_{33})^2 - \Lambda g_{33} - 2 &= 0,\\ V^3(g_{33})^2V^1 &= 0,\\ -(V^1)^2(g_{33})^2 - (g_{33})^2(V^3)^2 - \Lambda g_{33} - 2 &= 0,\\ V^3(g_{33})^2V^2 &= 0,\\ -(V^2)^2(g_{33})^2 - (g_{33})^2(V^3)^2 - \Lambda g_{33} - 2 &= 0,\\ g_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j &\in \{1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $V = 0$.

Случаи остальных трехмерных локально симметрических пространств рассматриваются аналогично.

Заключение

В настоящей работе исследованы однородные солитоны Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с нетривиальной группой изотропии и полусимметрической связностью. Доказано, что любой однородный солитон Риччи на локально симметрическом пространстве является тривиальным.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les Vari´et´es `a Connexion Affine et la Th´eorie de la Relativit´e G´en´eralis´ee (deuxi`eme partie) // Annales Scientifiques De L'Ecole Normale Su-perieure. 1925. Vol. 42. P. 17–88. DOI: 10.24033/asens.761

2. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 2008. Vol. 3. No 25. P. 1223–1232. DOI: 10.12988/ijcms

3. Agricola I., Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion // Annals of Global Analysis and Geometry. 2004. Vol. 26. P. 321–332. DOI: 10.1023/B:AGAG.0000047509.63818.4f

4. Murathan C., Ozgur C. Riemannian Manifolds with a Semi-symmetric Metric Connection Satisfying some Semi-symmetry Conditions // Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. 2008. Vol. 57. No 4. P. 210–216. DOI: 10.3176/proc.2008.4.02

5. Yilmaz H.B., Zengin F.O., Uysal. S.A. On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 4. No 2. P. 152–161.

6. Zengin F.O., Demirbaˇg S.A., Uysal. S.A., Yilmaz H.B. Some Vector Fields on a Riemannian Manifold with Semi-symmetric Metric Connection // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2012. Vol. 38. No 2. P. 479–490.

7. Agricola I., Kraus M. Manifolds with Vectorial Torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 45. P. 130–147. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.01.004

8. Yano K. On Semi-symmetric Metric Connection // Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics. 1970. Vol. 15. P. 1579–1586.

9. Barua B., Ray A. Kr. Some Properties of a Semi-symmetric Metric Connection in a Riemannian Manifold // Indian Journal of Pure & Applied Mathematics. 1985. Vol. 16. No 7. P. 736–740.

10. De U. C., De B. K. Some Properties of a Semi-symmetric Metric Connection on a Riemannian Manifold // İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü. 1995. Vol. 54. P. 111–117.

11. Cordero L. A., Parker P.E. Left-invariant Lorentzian Metrics on 3-dimensional Lie Groups // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. 1997. Vol. 17. P. 129–155.

12. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли// Известия Алтайского государственного университета. 2015. Т. 85. № 1/2. С. 115–122. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21

13. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Three-dimensional Nonunimodular Lie Groups with a Riemannian Metric of an Invariant Ricci Soliton and a Semi-symmetric Metric Connection // Russian Mathematics. 2022. Vol. 66. No 5. P. 65–69. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85

14. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20. № 1. С. 48–61. DOI: 10.33048/semi.2023.20.005

15. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 2023. Т. 222. С. 19–29. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

16. Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия Алтайского государственного университета. 2017. No 1/1. С. 140–143. DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28

17. Sekigawa K. On Some 3-dimensional Curvature Homogeneous Spaces // Tensor New Series. 1977. Vol. 31. P. 77–87.

18. Calvaruso G. Homogeneous Structures on Three-dimensional Lorentzian Mani-folds // Journal of Geometry and Physics. 2007. Vol. 57. P. 1279–1291. DOI: 10.1016/j.geomphys.2006.10.005

19. Можей Н.П. Когомологии трехмерных однородных пространств // Труды БГТУ. Минск: БГТУ. 2014. № 6 (170). С. 13–18.

20. Бессе А. Многообразия Эйнштейна / пер. с англ.: в 2 т. М.: Мир, 1990. 384 с. DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8

21. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1988. Т. 2. 416 с.

References

1. Cartan E. Sur les Vari'et'es 'a Connexion Affine et la Th'eorie de la Relativit'e G'en'eralis'ee (deuxi'eme partie). *Annales Scientifiques De L'Ecole Normale Superi-eure.* 1925. Vol. 42. P. 17–88. DOI: 10.24033/asens.761

2. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 2008. Vol. 3. No 25. P. 1223–1232. DOI: 10.12988/ijcms

3. Agricola I., Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion. *Annals of Global Analysis and Geometry*. 2004. Vol. 26. P. 321–332. DOI: 10.1023/B:AGAG.0000047509.63818.4f

4. Murathan C., Ozgur C. Riemannian Manifolds with a Semi-symmetric Metric Connection Satisfying some Semisymmetry Conditions. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*. 2008. Vol. 57. No 4. P. 210–216. DOI: 10.3176/proc.2008.4.02

5. Yilmaz H.B., Zengin F.O., Uysal. S.A. On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold. *European Journal of Pure and Applied Mathematics.* 2011. Vol. 4. No. 2. P. 152–161.

6. Zengin F.O., Demirba˘g S.A., Uysal. S.A., Yilmaz H.B. Some Vector Fields on a Riemannian Manifold with Semi-symmetric Metric Connection. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society.* 2012. Vol. 38. No. 2. P. 479–490.

7. Agricola I., Kraus M. Manifolds with Vectorial Torsion. *Differential Geometry and its Applications*. 2016. Vol. 45. P. 130–147. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.01.004

8. Yano K. On Semi-symmetric Metric Connection. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics.* 1970. Vol. 15. P. 1579–1586.

9. Barua B., Ray A. Kr. Some Properties of a Semi-symmetric Metric Connection in a Riemannian Manifold. *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics.* 1985. Vol. 16. No 7. P. 736–740.

10. De U. C., De B. K. Some Properties of a Semi-symmetric Metric Connection on a Riemannian Manifold. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.* 1995. Vol. 54. P. 111–117.

11. Cordero L. A., Parker P.E. Left-invariant Lorentzian Metrics on 3-dimensional Lie Groups. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*. 1997. Vol. 17. P. 129–155.

12. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Homogeneous Invariant Ricci Solitons on Fourdimensional Lie Groups. *Izvestiya of Altai State University*. 2015. Vol. 85. No 1/2. P. 115–122. (In Russ.). DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21

13. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Three-dimensional Nonunimodular Lie Groups with a Riemannian Metric of an Invariant Ricci Soliton and a Semi-symmetric Metric Connection. *Russian Mathematics*. 2022. Vol. 66. No 5. P. 65–69. DOI:10.26907/0021-3446-2022-5-80-85

14. Klepikov P.N.,Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Three-dimensional Nonunimodular Lie Groups with a Left-invariant Lorentzian Metric and a Semisymmetric Connection. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 2023. Vol. 20. No 1. P. 48–61. (In Russ). DOI: 10.33048/semi.2023.20.005

15. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P. Invariant Ricci Solitons on Metric Lie Groups with a Semi-symmetric Connection. *Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennie Problemi Matematiki.* 2023. Vol. 222. P. 19–29. (In Russ). DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29

16. Khromova O.P. Application of Symbolic Calculation Packages to the Study of the One-dimensional Curvature Operator on Non-reductive Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds. *Izvestiya of Altai State University*. 2017. No 1/1. P. 140–143. (In Russ). DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-28

17. Sekigawa K. On Some 3-dimensional Curvature Homogeneous Spaces. *Tensor New Series*. 1977. Vol. 31. P. 77–87.

18. Calvaruso G. Homogeneous Structures on Three-dimensional Lorentzian Mani-folds. *Journal of Geometry and Physics*. 2007. Vol. 57. P. 1279–1291. DOI: 10.1016/j.geomphys.2006.10.005

19. Mozhey N.P. Cohomology of Three-dimensional Homogeneous Spaces. *Proceedings of BSTU*. Moscow: Mir, 2014. No 6 (170). P. 13–18. (In Russ).

20. Besse A. L. *Einstein Manifolds.* Berlin; New York : Springer-Verlag, 1987. 510 p. (In Russ). DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8

21. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 2: New York, Interscience Publishers; Wiley. 1963. 454 p. (In Russ).

Информация об авторах

В.В. Балащенко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики, Белорусский государственный университет, Минск, Белоруссия;

П.Н. Клепиков, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

Е.Д. Родионов, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

О.П. Хромова, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия.

Information about the authors

V.V. Balashchenko, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Geometry, Topology and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus;

P.N. Klepikov, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Lecturer at the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

E.D. Rodionov, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia;

O.P. Khromova, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Altai State University, Barnaul, Russia.