УДК 519.6:532.135

Задача Рэлея — Бенара для раствора полимеров

В.В. Пухначев[1, 2], О.А. Фроловская[1]

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)
[2]Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)

Rayleigh — Benard problem for Polymer Solution

V.V. Pukhnachev[1, 2], O.A. Frolovskaya[1]

[1]Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS (Novosibirsk, Russia)
[2]Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)

Существует три математических модели, описывающих движение водных растворов полимеров: модель жидкости второго порядка (Ривлин — Эриксен), наследственная модель (Войткунский — Амфилохиев — Павловский) и ее асимптотическое упрощение (Павловский). В работе выведены уравнения тепловой гравитационной конвекции для всех трех моделей и рассмотрена задача об устойчивости равновесия жидкости в горизонтальном слое жидкости при подогреве снизу или сверху. Рассмотрены три типа граничных условий: две твердые границы; нижняя граница твердая, а верхняя свободна; обе границы свободны (задача Рэлея). Для случая подогрева снизу установлен принцип монотонности возмущений, который гарантирует вещественность собственных чисел спектральной задачи. Это заметно упрощает нахождение критических чисел Рэлея. Оказалось, что эти числа совпадают с критическими числами Рэлея в классической задаче Рэлея — Бенара. В случае подогрева сверху при больших градиентах температуры декременты возмущений становятся комплексными, но вещественные части их отрицательны. Вывод о том, что релаксационные свойства жидкости второго порядка и водного раствора полимеров не приводят к изменению критического числа Рэлея, на первый взгляд может показаться странным. По нашему предположению, это связано с тем, что основное состояние жидкости является состоянием покоя.

Ключевые слова: водные растворы полимеров, жидкость второго порядка, релаксационная вязкость, задача Рэлея — Бенара.

There are three mathematical models describing the motion of aqueous solutions of polymers: the second grade fluid model (Rivlin — Eriksen), the hereditary model (Voitkunsky — Amfilokhiev — Pavlovsky), and its asymptotic simplification (Pavlovsky). This work considers the problem of fluid equilibrium stability in a horizontal fluid layer heated from below or from above. Also, equations of thermal gravitational convection for all three models are derived. Three types of boundary conditions are considered: two solid boundaries; the lower solid boundary and the upper free boundary; two free boundaries (the Rayleigh problem). For the case of heating from below, the principle of perturbation monotonicity is established that ensures the spectral problem eigenvalues to be of real type. This greatly simplifies the determination of the critical Rayleigh numbers. It turned out that these numbers coincide with the critical Rayleigh numbers in the classical Rayleigh — Benard problem. In the case of heating from above at large temperature gradients, the perturbation decrements become complex, but their real parts are negative. The conclusion that the relaxation properties of a second grade fluid and an aqueous solution of polymers do not lead to a change in the critical Rayleigh number may seem strange at first glance. According to our assumption, it is explained by the base state of the liquid being a state of rest.

Keywords*:* aqueous polymer solution, second grade fluid, relaxation viscosity, Rayleigh — Benard problem.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-12

Введение

Задача об устойчивости равновесия горизонтального слоя жидкости, подогреваемой снизу, является классической задачей теории конвективной устойчивости [1]. Этой задаче и ее обобщениям посвящено множество работ, где уравнение импульса имеет вид уравнения Навье — Стокса с добавлением силы плавучести. В данной работе аналог задачи Рэлея — Бенара изучается для моделей релаксирующих жидкостей. Такие модели используются при описании движения водных растворов полимеров. Рассмотрена задача об устойчивости горизонтального слоя жидкости, подогреваемой снизу, в трех моделях водного раствора полимеров. Показано, что релаксационные свойства жидкости не приводят к изменению критического числа Рэлея. Ранее в работе [2] для жидкости второго порядка был установлен принцип монотонности возмущений, что позволило найти критическое число Рэлея из решения стационарной задачи. Показано, что, как и в случае ньютоновской жидкости, никакие докритические неустойчивости невозможны. Результаты экспериментальных исследований конвекции Рэлея — Бенара в неньютоновских жидкостях приведены в [3]. Установлено, что для получения гексагональных ячеек в начале конвекции температурная зависимость параметров жидкости должна быть достаточно сильной. Было замечено, что размер ячеек уменьшается с увеличением разности температур в слое жидкости, превышающей критическое значение.

1. Уравнения движения водных растворов полимеров

Одной из моделей, используемых для описания движения водных растворов полимеров, является модель жидкости второго порядка [4]. Уравнения этой модели имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}-\kappa\Delta\mathbf{v})+\mathrm{rot}(\mathbf{v}-\kappa\Delta\mathbf{v})\times\mathbf{v}=$$
$$=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\kappa(\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}+D:D)\right)+\nu\Delta\mathbf{v},\ \ \mathrm{div}\mathbf{v}=0. \tag{1}$$

Добавляя в первое уравнение системы (1) члены, обусловленные эффектом плавучести, и используя стандартное в теории конвективной устойчивости уравнение теплопроводности, мы приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}-\kappa\Delta\mathbf{v})+\mathrm{rot}(\mathbf{v}-\kappa\Delta\mathbf{v})\times\mathbf{v}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\kappa(\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}+D:D)\right)+\nu\Delta\mathbf{v}-\beta T'\mathbf{g},$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,\ \ \frac{\partial T'}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T'=\chi\Delta T'. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v}=(u,v,w)$ — вектор скорости, p — давление, T' — отклонение температуры от ее постоянного среднего значения T_0, ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ — коэффициент релаксационной вязкости, β — коэффициент объемного теплового расширения жидкости, χ — коэффициент температуропроводности. Величины $\rho,\nu,\kappa,\ \beta,\chi$ считаются положительными постоянными.

Другая модель движения водных растворов полимеров предложена в работе [5]. Эта модель содержит интегро-дифференциальные уравнения. В работе [6] выполнена редукция этих уравнений к чисто дифференциальным уравнениям:

$$\theta\frac{\partial}{\partial t}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\theta}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\theta\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t}+\nu\Delta\mathbf{v}+\kappa\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt},$$
$$\mathrm{div}\mathbf{v}=0,\ \ \frac{\partial T'}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T'=\chi\Delta T'. \tag{3}$$

Здесь возникает дополнительный параметр θ — характерное время релаксации касательных напряжений. Величина θ имеет порядок 10^{-5} сек. Переходя в первом уравнении (3) к пределу при $\theta\to\infty$, мы получаем модель Павловского [7]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{v}+\kappa\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt},\ \ \mathrm{div}\mathbf{v}=0. \tag{4}$$

Уравнения тепловой гравитационной конвекции, отвечающие наследственной модели (3), имеют вид

$$\theta\frac{\partial}{\partial t}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\theta}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\theta\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t}+\nu\Delta\mathbf{v}+\kappa\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}-\beta\mathbf{g}\theta\frac{\partial T'}{\partial t}-\beta\mathbf{g}T',$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,\ \ \frac{\partial T'}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T'=\chi\Delta T'. \tag{5}$$

Для модели Павловского мы будем иметь

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \kappa\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt} - \beta\mathbf{g}T', \ \ \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \ \ \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T' = \chi\Delta T'. \tag{6}$$

2. Постановка задачи

Пусть $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Тогда каждая из систем (2), (5), (6) допускает точное решение

$$\mathbf{v} = 0, \ \ p = -\rho g\beta A z^2 \,/\, 2, \ \ T' = -Az, \tag{7}$$

где $A = const$. В дальнейшем T будет обозначать возмущение температуры, а $\overline{p}$ — возмущение давления. Линеаризация системы (2) на решении (7) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\nu\Delta\mathbf{v} + \kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t} - \beta\mathbf{g}T, \ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0, \ \frac{\partial T}{\partial t} - Aw = \chi\Delta T. \tag{8}$$

Точно такие же уравнения получаются при линеаризации системы (6) на решении (7). Линеаризация уравнений наследственной модели (5) на решении (7) дает уравнения

$$\theta\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\theta}{\rho}\frac{\partial\nabla p}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\theta\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t} + \nu\Delta\mathbf{v} + \kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t} - \beta\mathbf{g}\theta\frac{\partial T}{\partial t} - \beta\mathbf{g}T,$$
$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \ \ \frac{\partial T}{\partial t} - Aw = \chi\Delta T. \tag{9}$$

Обозначим через a толщину слоя. Если границы слоя являются твердыми непроницаемыми плоскостями, то для обеих систем (8), (9) ставятся краевые условия

$$\mathbf{v} = 0, T = 0, z = 0 \text{ и } z = a. \tag{10}$$

Если нижняя граница слоя — твердая плоскость, а верхняя является свободной поверхностью, то краевые условия имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, T = 0, z = 0; \ w = 0, \ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, z = a. \tag{11}$$

Рассмотрим еще задачу, в которой обе границы слоя являются свободными:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, z = 0 \text{ и } z = a. \tag{12}$$

В теории конвективной устойчивости ньютоновской жидкости условия (12) порождают модель Рэлея [1]. Задаче (8), (12) трудно придать физический смысл, однако она значительно проще задач (8), (10) и (8), (11). Мы сохраним за задачей (8), (12) название «модель Рэлея».

Система (8) допускает решения в виде нормальных возмущений

$$w = f(z)\,\mathrm{Re}[\exp(\lambda t + ik_x x + ik_y y)], \ \ T = h(z)\,\mathrm{Re}[\exp(\lambda t + ik_x x + ik_y y)], \tag{13}$$

где λ — искомый декремент возмущений, а k_x и k_y — вещественные волновые числа по осям x и y. Для амплитуд возмущений $f(z)$ и $h(z)$ получается система уравнений

$$\lambda(f'' - k^2 f) = [\kappa\lambda + \nu](f^{IV} - 2k^2 f'' + k^4 f) - \beta g k^2 h,$$
$$\lambda h = \chi(h'' - k^2 h) + Af. \tag{14}$$

Здесь обозначено $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Краевые условия (10) приводят к следующим условиям для функций f и h:

$$f = f' = 0,\ h = 0,\ z = 0 \text{ и } z = a. \qquad (15)$$

Вследствие условий (11) получаются краевые условия для функций f и h:

$$f = f' = 0,\ h = 0,\ z = 0,\ f = f'' = 0,\ h = 0,\ z = a. \qquad (16)$$

Наконец, в модели Рэлея, соответствующей условиям (12), мы будем иметь условия для функций f и h:

$$f = f'' = 0,\ h = 0, z = 0 \text{ и } z = a. \qquad (17)$$

3. Принцип монотонности возмущений

Обозначим через $Ra = \dfrac{g\beta A a^4}{\nu\chi}$ число Рэлея. С физической точки зрения наиболее интересный случай (подогрев снизу) соответствует положительным значениям параметра A. Нашей целью является нахождение критических чисел Рэлея, т.е. таких значений параметра Ra_*, что при $Ra > Ra_*$ существует собственное число λ задач (14), (15); (14), (16); (14), (17) с $\operatorname{Re}\lambda > 0$. В задачах конвективной устойчивости ньютоновской жидкости большую роль играет принцип монотонности возмущений. Он утверждает, что декременты нормальных возмущений вещественны, так что все нормальные возмущения изменяются со временем — затухают или нарастают — монотонно. Этот принцип впервые был получен для плоского горизонтального слоя в работе [8], а в общем случае — в работе [9] (см. также монографию [1]). Если данный принцип справедлив, то для отыскания критических чисел Рэлея в спектральной задаче достаточно положить $\lambda = 0$.

Оказывается, что принцип монотонности возмущений имеет место и в задачах (14), (15) и (14), (16). Рассмотрим задачу (14), (15). Умножим первое и второе уравнения (14) на f^* и h^* соответственно и проинтегрируем полученные равенства по интервалу $[0,\,a]$. Используя условия (15), мы получим:

$$-\lambda\int_0^a (\left|f'\right|^2 + k^2\left|f\right|^2)dz = \int_0^a [(\kappa\lambda+\nu)(\left|f''\right|^2 + 2k^2\left|f'\right|^2 + k^4\left|f\right|^2) - \beta g k^2 f^* h]dz,$$
$$\lambda\int_0^a \left|h\right|^2 dz = \int_0^a [-\chi(\left|h'\right|^2 + k^2\left|h\right|^2) + A f h^*]dz. \qquad (18)$$

Вычитая из этих равенств комплексно-сопряженные соответственно, будем иметь:

$$-(\lambda-\lambda^*)\int_0^a (\left|f'\right|^2 + k^2\left|f\right|^2)dz =$$
$$= \int_0^a [\kappa(\lambda-\lambda^*)(\left|f''\right|^2 + 2k^2\left|f'\right|^2 + k^4\left|f\right|^2) - \beta g k^2(f^*h - fh^*)]dz,$$
$$(\lambda-\lambda^*)\int_0^a \left|h\right|^2 dz = A\int_0^a (fh^* - f^*h)]dz. \qquad (19)$$

Умножим первое из равенств (19) на A, а второе — на $\beta g k^2$ и сложим полученные соотношения. Мы получим:

$$-(\lambda-\lambda^*)A\int_0^a (\left|f'\right|^2 + k^2\left|f\right|^2)dz - (\lambda-\lambda^*)\beta g k^2\int_0^a \left|h\right|^2 dz =$$
$$= A\int_0^a [\kappa(\lambda-\lambda^*)(\left|f''\right|^2 + 2k^2\left|f'\right|^2 + k^4\left|f\right|^2)]dz. \qquad (20)$$

Предположим, что $A>0$ (подогрев снизу). Отделяя в соотношении (20) вещественную и мнимую части, мы приходим к равенству:

$$2\operatorname{Im}\lambda\left\{A\int_0^a\left[\kappa\left(\left|f''\right|^2 + 2k^2\left|f'\right|^2 + k^4\left|f\right|^2\right) + \left|f'\right|^2 + k^2\left|f\right|^2\right]dz + \beta g k^2\int_0^a \left|h\right|^2 dz\right\} = 0.$$

Тем самым при $A > 0$ для нетривиальных решений задачи (14), (15) выполнено равенство $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

В соответствии с принципом монотонности возмущений для отыскания критического числа Рэлея следует положить в уравнениях (14) $\lambda = 0$. При этом система (14) совпадает с той, которая возникает в классической задаче конвективной устойчивости ньютоновской жидкости [1]. Численное решение этой задачи дает значение $Ra_* \approx 1707,762$, ему соответствует критическое волновое число $k_* \approx 3,116$. Принцип монотонности возмущений для задач (14), (16) и (14), (17) устанавливается аналогично.

4. Задача Рэлея

В отличие от задач (14), (15) и (14), (16), задача (14), (17) имеет точное решение

$$f = F\sin(\pi z / a), \quad h = H\sin(\pi z / a), \tag{21}$$

где F и H — постоянные. Подстановка выражений (21) в систему (14) приводит к дисперсионному уравнению

$$(k^2 + \pi^2 a^{-2})[\lambda + \chi(k^2 + \pi^2 a^{-2})][\lambda + (k^2 + \pi^2 a^{-2})(\kappa\lambda + \nu)] = A\beta g k^2. \tag{22}$$

Введем безразмерное волновое число $l = ak$ и безразмерный (вообще говоря, комплексный) декремент $\omega = a^2\nu^{-1}\lambda$. Вследствие (22) величина ω является корнем квадратного уравнения

$$(l^2 + \pi^2)[\omega \Pr + (l^2 + \pi^2)][\omega + (l^2 + \pi^2)(\gamma\omega + 1)] = l^2 \mathrm{Ra}, \tag{23}$$

где введены обозначения $\Pr = \nu / \chi$ (число Прандтля), $\gamma = a^{-2}\kappa$ (безразмерный коэффициент релаксационной вязкости).

Выражение для корней уравнения (23) имеет вид:

$$\begin{gathered} \omega_{1,2} = \{2[1 + \gamma(l^2 + \pi^2)]\Pr\}^{-1}[-\{(l^2 + \pi^2)[\Pr + 1 + \gamma(l^2 + \pi^2)]\} \pm \\ \pm\Big\langle\{(l^2 + \pi^2)[\Pr - 1 - \gamma(l^2 + \pi^2)]\}^2 + l^2(l^2 + \pi^2)^{-1}[1 + \gamma(l^2 + \pi^2)]\Pr Ra\Big\rangle^{1/2}]. \end{gathered} \tag{24}$$

Корню ω_1 в выражении (24) соответствует знак «плюс», а корню ω_2 — знак «минус». Согласно принципу монотонности возмущений в случае подогрева снизу ($Ra > 0$) корни уравнения (24) вещественны. Критическое число Рэлея определяется из соотношения $\omega = 0$ по формуле $Ra_* = \min l^{-2}(l^2 + \pi^2)^3$, $l > 0$, что дает $Ra_* = 27\pi^4 / 4 \approx 657,511$. Оно достигается при значении волнового числа $l_* = 2^{-1/2}\pi \approx 2,221$ [1]. Если $Ra < 0$ (подогрев сверху) и $|Ra|$ достаточно велик, то корни уравнения (23) становятся комплексными; при этом $\operatorname{Re}\omega < 0$.

Рассмотрим теперь задачу Рэлея для уравнений (9). Дисперсионное уравнение здесь принимает вид

$$(k^2 + \pi^2 a^{-2})[\lambda + \chi(k^2 + \pi^2 a^{-2})]\{\lambda(\theta\lambda + 1) + (k^2 + \pi^2 a^{-2})[(\theta\nu + \kappa)\lambda + \nu]\} = A\beta g(\theta\lambda + 1)k^2.$$

Безразмерный комплексный декремент $\bar\omega = a^2\nu^{-1}\lambda$ есть корень кубического уравнения

$$(l^2 + \pi^2)[\bar\omega \Pr + (l^2 + \pi^2)]\{\bar\omega(\tau\bar\omega + 1) + (l^2 + \pi^2)[(\tau + \gamma)\bar\omega + 1]\} = (\tau\bar\omega + 1)l^2 \mathrm{Ra}, \tag{25}$$

где $\tau = \nu a^{-2}\theta$ — безразмерное время релаксации напряжений сдвига. Величина τ является очень малой (при толщине слоя 1 см для воды ее значения имеют порядок 10^{-7}). Представление корней уравнения (25) при $\tau \to 0$ имеет вид

$$\bar\omega_1 = \omega_1 + O(\tau), \; \bar\omega_2 = \omega_2 + O(\tau), \; \bar\omega_3 = -1/\tau + O(1),$$

где ω_1 и ω_2 — корни уравнения (23). Таким образом, учет дополнительного релаксационного фактора не приводит к качественному изменению ситуации в задаче Рэлея.

Заключение

Вывод о том, что релаксационные свойства жидкости второго порядка и водного раствора полимеров в моделях [5], [7] не приводят к изменению критического числа Рэлея, на первый взгляд может показаться странным. По нашему предположению, это связано с тем, что основное состояние жидкости является состоянием покоя. Представляет значительный интерес исследовать задачу о конвективной устойчивости релаксирующей жидкости, подверженной действию вибраций. Известно, что вертикальные вибрации способны стабилизировать состояние относительного равновесия ньютоновской жидкости в слое, подогреваемом снизу [10]. С другой стороны, горизонтальные вибрации оказывают дестабилизирующее воздействие [11, 12]. Могут ли релаксационные свойства жидкости стабилизировать ее состояние относительного равновесия при наложении на систему горизонтальных вибраций?

Библиографический список

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
2. Straughan B. Energy stability in the Benard problem for a fluid of second grade // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1983.Vol. 34.
3. Bouteraa M., Varé T., Nouar C., Becker S., Ouhajjou J. Rayleigh-Bénard convection in non-Newtonian fluids: Experimental and theoretical investigations // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. Doi:10.1063/5.0070983
4. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-deformation relations for isotropic materials // Arch. Rational Mech. Anal. 1955. Vol. 4.
5. Войткунский Я.И., Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Труды ЛКИ. 1970. Вып. LXIX.
6. Пухначев В.В., Фроловская О.А. Модель Войткунского — Амфилохиева — Павловского движения водных растворов полимеров // Труды МИАН. 2018. Т. 300. Doi:10.1134/S0371968518010144
7. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Доклады АН СССР. 1971. Т. 200.
8. Pellew A., Southwell R.V. On maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc. 1940. Vol. A176. № 966.
9. Сорокин В.С. Вариационный метод в теории конвекции // ПММ. 1953. Т. 17. № 1.
10. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5.
11. Зеньковская С.М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 1.
12. Зеньковская С.М. О влиянии вибрации на возникновение конвекции. Деп. рукопись. ВИНИТИ. 1978.