УДК 517.95

Стабилизация решения начально-краевой задачи для одномерных изотермических уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред*

Д.А. Прокудин

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)
Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Stabilization of the Solution to the Initial-Boundary Value Problem for One-Dimensional Isothermal Equations of Viscous Compressible Multicomponent Media

D.A. Prokudin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the SB RAS (Novosibirsk, Russia)
Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается начально-краевая задача для одномерных изотермических уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред, являющихся обобщением уравнений Навье — Стокса. В исследуемых уравнениях присутствуют старшие производные от скоростей всех компонент, поскольку, в отличие от уравнений Навье — Стокса, в которых вязкость является скаляром, в многокомпонентном случае, ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений, вязкости образуют матрицу, элементы которой отвечают за вязкое трение. За вязкое трение внутри каждой компоненты отвечают диагональные элементы, а за трение между компонентами — недиагональные. Это не позволяет автоматически распространить известные результаты для уравнений Навье — Стокса на многокомпонентный случай. В случае диагональной матрицы вязкостей уравнения будут связаны только через младшие члены. В работе рассматривается более сложный случай недиагональной матрицы вязкостей. Доказывается стабилизация решения начально-краевой задачи при неограниченном возрастании времени без упрощающих предположений о структуре матрицы вязкостей, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

Ключевые слова: вязкая сжимаемая среда, многокомпонентные течения, стабилизация решения.

The paper considers the initial-boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media, commonly known as a generalization of the Navier — Stokes equations. The studied equations include higher derivatives of the velocities of all components, unlike the Navier — Stokes equations, where viscosity is a scalar variable. Viscosity forms a matrix of elements responsible for viscous friction due to the composite structure of viscous stress tensors for the multicomponent case. Diagonal elements of the matrix stand for viscous friction within each component, and off-diagonal elements stand for friction between components. Such complication does not allow the automatic extension of the known results for the Navier — Stokes equations to the multicomponent case. Thus, for the diagonal matrix, the equations would be linked only through the lower terms. The paper considers a more complex case of an off-diagonal viscosity matrix. We prove the stabilization of the solution of the initial-boundary value problem with an unlimited increase in time without simplifying assumptions about the structure of the viscosity matrix, except for the standard physical requirements of symmetry and positive definiteness.

Keywords: compressible viscous medium, multicomponent flows, stabilization of solution.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-11

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных изотермических уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2020 23) (номер темы: F ZM W 2020 0008 от 24.01.2020).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v\frac{\partial u_i}{\partial x} + K\frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{2}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{3}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{4}$$

Здесь ρ, u_i, $i = 1,\ldots,N$ — соответственно плотность и скорости компонент среды — есть искомые функции времени $t \in [0,T]$, $0 < T < +\infty$, и точки x области течения $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, v — средняя скорость среды, $N \geqslant 2$ — число компонент, $K = \mathrm{const} > 0$, постоянные коэффициенты вязкостей ν_{ij}, $i,j = 1,\ldots,N$ образуют симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$, $\rho_0 \in W_2^1(0,1)$, $\rho_0 > 0$, $u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $i = 1,\ldots,N$.

Основной особенностью исследуемых уравнений является наличие в уравнениях импульсов (2) старших производных от скоростей всех компонент ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений [1]. Это приводит к тому, что результаты, известные для одномерных уравнений Навье — Стокса, не переносятся автоматически на рассматриваемые в данной работе уравнения вязких сжимаемых многокомпонентных сред. Вопросы о стабилизации решений одномерных уравнений Навье — Стокса исследовались в работах [2–6]. Однозначная разрешимость и асимптотическое поведение решения при $t \to +\infty$ рассматриваемых одномерных уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред в политропном случае изучались в работах [7–9]. Аналогичным вопросам для смежных одномерных моделей многокомпонентных сред посвящены работы [10–18].

2. Массовые лагранжевы координаты

При исследовании задачи (1)–(4) будет полезным использование массовых лагранжевых координат. Возьмем за новые независимые переменные t и $y(x,t) = \int\limits_0^x \rho(s,t)\,ds$. Тогда система (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + K\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{6}$$

Область течения Ω при таком переходе отображается в область $\widetilde{\Omega} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < d\}$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0(x)\,dx > 0$, а начальные и граничные условия преобразуются к виду

$$\rho|_{t=0} = \widetilde{\rho}_0(y), \quad u_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{7}$$

$$u_i|_{y=0} = u_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{8}$$

3. Априорные оценки

Умножим уравнения (2) на u_i, просуммируем по i и проинтегрируем по y, с учетом (1) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)dx = -K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 u_i\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big)dx. \tag{9}$$

Так как $\mathbf{N} > 0$, то для второго слагаемого в левой части (9) верно неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)dx \geqslant C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)^2 dx \tag{10}$$

с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\mathbf{N}) > 0$. Далее, умножая (1) на $\ln\rho - \ln d$ и интегрируя по x, для слагаемого в правой части (9) получим

$$-K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 u_i\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big)dx = KN\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)dx = -KN\frac{d}{dt}\int\limits_0^1(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d)\,dx. \tag{11}$$

Таким образом, используя (10) и (11), из (9) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx + KN\frac{d}{dt}\int\limits_0^1(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d)\,dx + C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)^2 dx \leqslant 0. \tag{12}$$

Из (12) после перехода к лагранжевым координатам (t, y) и интегрирования по t получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^d u_i^2 dy + \int_0^d \frac{\rho\ln\rho - (\ln d+1)\rho + d}{\rho}\,dy + \\ + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy d\tau \leqslant C_2, \quad (13)$$

где положительная постоянная $C_2 = C_2\big(C_1, K, N, d, \inf\limits_{(0,d)} \widetilde{\rho}_0, \sup\limits_{(0,d)} \widetilde{\rho}_0, \big\{ \|\widetilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)} \big\}\big)$. Все слагаемые в левой части (13) неотрицательны.

Далее перепишем уравнения (6) в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{K}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\right)\frac{\partial\rho}{\partial y} = \\ = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big), \quad i = 1, \ldots, N, \quad (14)$$

где $\widetilde{\nu}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, N$ — это компоненты матрицы $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1}$. Просуммируем (14) по i, получим

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \widetilde{K}\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho\frac{\partial v}{\partial y}\Big), \quad (15)$$

где $\widetilde{K} = \dfrac{K}{N}\left(\sum\limits_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\right) > 0$. Из уравнения (5) следует, что

$$\rho\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}. \quad (16)$$

Подставим $\rho\dfrac{\partial v}{\partial y}$ из (16) в равенство (15), приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial t\partial y} + \widetilde{K}\frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}. \quad (17)$$

Умножим (17) на $\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial y}$ и проинтегрируем по y, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^d \Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy + \widetilde{K}\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy = \\ = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d \Big(\frac{\partial u_j}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dy. \quad (18)$$

Правую часть (18) преобразуем, интегрируя по частям и используя (8), (16):

$$-\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d \Big(\frac{\partial u_j}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dy = \\ = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d u_j\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dy\right) + \\ + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy. \quad (19)$$

Следовательно из (18) после интегрирования по t получаем, что

$$\frac{1}{2}\int_0^d \Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy + \widetilde{K}\int_0^t\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy d\tau = \\ = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d u_j\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dy + \\ + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^t\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dy d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int_0^d \frac{1}{\widetilde{\rho}_0^2}\Big(\frac{\partial\widetilde{\rho}_0}{\partial y}\Big)^2 dy + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d \frac{\widetilde{u}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\Big(\frac{\partial\widetilde{\rho}_0}{\partial y}\Big)dy.$$

Отсюда и из (13) следует оценка

$$\int_0^d \Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy + \int_0^t\int_0^d \rho\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2 dy d\tau \leqslant C_3, \quad (20)$$

где положительная постоянная $C_3 = C_3\Big(C_2, \widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{K}, N, \inf\limits_{(0,d)}\widetilde{\rho}_0, \|\widetilde{\rho}_0\|_{W_2^1(0,d)}, \{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}\Big)$.

Из уравнения (5) следует, что при каждом $t \in [0, T]$ хотя бы в одной точке $\widetilde{y}(t) \in [0, d]$

$$\rho(t, \widetilde{y}(t)) = d. \quad (21)$$

Тода, поскольку

$$\ln\rho(t, y) = \ln\rho(t, \widetilde{y}(t)) + \int_{\widetilde{y}(t)}^{y} \frac{\partial(\ln\rho(t, s))}{\partial s}ds,$$

то по неравенству Гельдера с учетом (20) и (21) имеем

$$|\ln\rho(y, t)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d}\left\|\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)} \leqslant C_4(C_3, d),$$

откуда непосредственно следует, что

$$0 < \frac{1}{C_5} \leqslant \rho(t, y) \leqslant C_5 < +\infty, \quad C_5 = C_5(C_4). \quad (22)$$

Поэтому из (13), (20) и (22) имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dyd\tau+\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2dy+ \\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2dyd\tau\leqslant C_6(C_2,C_3,C_5). \quad (23)$$

Перейдем к выводу следующей оценки. Для этого умножим (6) на $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}$ и проинтегрируем по y, получим

$$\frac12\frac{d}{dt}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy+\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^d\rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)dy= \\ =-\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)dy+ \\ +K\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)dy. \quad (24)$$

Теперь (24) просуммируем по i и проинтегрируем по t:

$$\frac12\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy-\frac12\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\widetilde{u}_{0i}}{\partial y}\Big)^2dy+ \\ +\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)dyd\tau= \\ =-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)dyd\tau+ \\ +K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)dyd\tau. \quad (25)$$

Для первого и третьего слагаемых в левой части (25) справедлива оценка

$$\frac12\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy+ \\ +\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)dyd\tau\geqslant \\ \geqslant C_7(C_1,C_5)\Big(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy+ \\ +\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2dyd\tau\Big). \quad (26)$$

Для первого слагаемого в правой части (25) ввиду (23) и неравенств ($i=1,\ldots,N$)

$$\Big\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big\|^2_{C[0,d]}\leqslant 2\Big\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big\|_{L_2(0,d)}\Big\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big\|_{L_2(0,d)} \quad (27)$$

имеем оценку

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)dyd\tau\leqslant \\ \leqslant\frac{C_7}{4}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2dyd\tau+C_8, \quad (28)$$

где $C_8 = C_8(C_6, C_7, \mathbf{N}, N)$. Второе слагаемое в правой части (25) оценим следующим образом:

$$K\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)dyd\tau\leqslant \\ \leqslant\frac{C_7}{4}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2dyd\tau+C_9(C_6,C_7,K,N). \quad (29)$$

Таким образом, из (25) в силу (26), (28) и (29) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2dyd\tau\leqslant \\ \leqslant C_{10}\Big(C_7,C_8,C_9,\Big\{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{W_2^1(0,d)}\Big\}\Big). \quad (30)$$

Далее, интегрируя (24) по t, приходим к неравенствам

$$\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dy\right|d\tau\leqslant \\ \leqslant C_{11}\left(C_5,C_6,C_{10},\mathbf{N},K,N\right),\quad i=1,\ldots,N. \quad (31)$$

4. Стабилизация решения при неограниченном возрастании времени

Из (23) и (31) вытекают при $t\to+\infty$ сходимости

$$\Big\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big\|_{L_2(0,d)}\to 0,\quad i=1,\ldots,N. \quad (32)$$

Дифференцируя (5) по y и умножая на $\dfrac{\partial\rho}{\partial y}$ с использованием (27), приходим к оценке

$$\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2dy\right|d\tau\leqslant C_{12}\left(C_5,C_6,C_{10},N\right). \quad (33)$$

Следовательно, при $t\to+\infty$

$$\Big\|\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big\|_{L_2(0,d)}\to 0. \quad (34)$$

Таким образом, доказано (см. (21)), что в норме $W_2^1(0,d)$ при $t \to +\infty$

$$u_i \to 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \rho \to d. \tag{35}$$

Несложно проверить теперь, что такие же сходимости имеют место в эйлеровых переменных в норме $W_2^1(0,1)$.

Заключение

Для системы дифференциальных уравнений вязких сжимаемых многокомпонентных сред с недиагональной, симметричной и положительно определенной матрицей вязкостей проведен анализ асимптотического поведения решения при $t \to +\infty$ начально-краевой задачи в случае одной пространственной переменной. Доказана стабилизация решения начально-краевой задачи.

Библиографический список

1. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. Doi: 10.17377/semi.2017.14.031

2. Злотник А.А., Дюкоме Б. Скорость стабилизации и устойчивость вязких сжимаемых баротропных симметричных течений со свободной границей для общей массовой силы // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 12. Doi: 10.1070/SM2005v196n12ABEH003739

3. Злотник А.А., Нгуен Жа Бао. Свойства и асимптотическое поведение решений одной задачи одномерного движения вязкого баротропного газа // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 5. Doi: 10.1007/BF02110374

4. Злотник А.А. Об уравнениях одномерного движения вязкого баротропного газа при наличии массовой силы // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 5. Doi: 10.1007/BF00970988

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.

6. Кажихов А.В. О стабилизации решений начально-краевой задачи для уравнений баротропной вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 4.

7. Прокудин Д.А. Об однозначной разрешимости начально–краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. Doi: 10.17377/semi.2017.14.049

8. Prokudin D.A. Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. Vol. 894. Doi: 10.1088/1742-6596/894/1/012076

9. Прокудин Д.А. О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2021. Т. 18. № 2. Doi: 10.33048/semi.2021.18.097

10. Li S. On one-dimensional compressible Navier–Stokes equations for a reacting mixture in unbounded domains // Z. Angew. Math. Phys. 2017. Vol. 68. Doi: 10.1007/s00033-017-0851-3

11. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 2. Doi: 10.4213/mzm10346

12. Bresch D., Huang X., Li J. Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system // Commun. Math. Phys. 2012. Vol. 309. Doi: 10.1007/s00220-011-1379-6

13. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 2. Doi: 10.4213/mzm7706

14. Папин А.А. Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 4. Doi: 10.4213/mzm8461

15. Злотник А.А. Слабые решения уравнений движения вязкой сжимаемой реагирующей бинарной смеси: единственность и непрерывная по Липшицу зависимость от данных // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 2. Doi: 10.4213/mzm546

16. Злотник А.А. Равномерные оценки и стабилизация решений системы уравнений одномерного движения многокомпонентной баротропной смеси // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. Doi: 10.1007/BF02304112

17. Петров А.Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. 1982. Т. 56.

18. Кажихов А.В., Петров А.Н. Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. Т. 35.