

УДК 519.688

## Влияние геометрических параметров на характер двухслойных течений с испарением в наклонном канале\*

*Е.Е. Макаров*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия)

## The Impact of Geometrical Parameters on Two-Layer Flow Patterns with Evaporation in an Inclined Channel

*E.E. Makarov*

Altai State University (Barnaul, Russia)  
Institute of Computational Modelling SB RAS (Krasnoyarsk, Russia)

Работа посвящена изучению двухслойных стационарных конвективных течений жидкости и сопутствующего потока газа и пара в наклонных слоях с учетом эффектов тепло- и массопереноса. Термокапиллярная граница раздела полагается недеформируемой. Математическое моделирование двухслойных течений в бесконечном канале с твердыми непроницаемыми стенками осуществляется на основе точных решений специального вида дифференциальных уравнений конвекции. Эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности принимаются во внимание в верхнем слое системы. Пар в газе полагается примесью, не влияющей на свойства. Течение изучается, когда функция концентрации пара отвечает условию нулевого потока на верхней стенке канала. На примере системы «бензин — воздух» изучено влияние толщины слоя на топологию течения. С помощью авторского кода был получен набор данных для построения представленных в статье профилей продольной скорости, полей температуры и концентрации пара в случае различных значений толщин слоев. При этом остальные параметры полагаются фиксированными. Результаты представлены в случае, когда выполнено условие замкнутости потока жидкости и задана величина расхода газа. Показано, что изменение толщины слоя влечет за собой как количественные, так и качественные изменения характеристик процесса течения.

**Ключевые слова:** двухслойная система, наклонный канал, конвекция, испарение, замкнутость потока.

The paper focuses on studying two-layer stationary convective flows of liquid and the accompanying flows of gas and vapor in inclined layers, taking into consideration the effects of heat and mass transfer. The thermocapillary boundary condition is assumed to be non-deformable. Mathematical modeling of two-layer flows in an infinite channel with solid impermeable walls is based on the exact solutions of a special form of differential convective equations. The effects of thermal diffusion and diffusive thermal conductivity are considered in the upper layer of the system. The vapor in the gas is assumed to be an admixture that does not affect the properties of the gas. The flow is studied when the vapor concentration function meets the condition of zero flux on the upper wall of the channel. The influence of the layer thicknesses on the flow topology is studied using the exemplary “benzine — air” system. The author’s programming code helps produce the data set for plotting the profiles of longitudinal velocity and concentration distributions of temperature and vapor for layers with different thicknesses. At the same time, all the other parameters of the system remain fixed. The results presented in the paper are obtained for the case when the closure condition for liquid flow is fulfilled, and at a given value of the gas flow rate. It is shown that a change in the thickness of the layer leads to both quantitative and qualitative changes in the characteristics of the flow process.

**Keywords:** two-layer system, inclined channel, convection, evaporation, closed flow.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-10

### Введение

Развитие сложных наукоемких технологий, разра-

ботка новых экспериментальных методов исследования конвективных процессов требует применения

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243>.

уточненных математических моделей, описывающих течения с границами раздела [1]. Построение точных решений уравнений Обербека — Буссинеска, составляющих основу математической модели конвекции, представляет большой интерес, поскольку решения позволяют эффективно оценить степень влияния различных факторов на характер течения и динамику испарения.

Произвольное ориентирование вектора ускорения силы тяжести является одним из факторов, усложняющих построение решения [2]. В работе [3] построено точное решение специального вида уравнений конвекции в наклонном слое с учетом эффектов Соре и Дюфура, изучено влияние некоторых геометрических и физико-химических параметров на характер течения и интенсивность массопереноса через границу раздела. В [4] получены точные решения уравнений конвекции без учета эффекта Соре для двух типов условий для функции концентрации пара на верхней твердой границе. Изучено двухслойное течение с испарением на границе раздела в условиях замкнутости потоков. Для систем «этанол — азот» и «бензин — воздух» в [4] продемонстрированы различия в характеристиках течений в условиях нормальной и пониженной гравитации. Изучение влияния геометрических параметров на топологию течения в трехслойной системе осуществляется в [5]. Отдельно выделим работы, в которых изучено влияние различных характеристик на устойчивость двухслойных течений с испарением (см., например, [6–9]).

В настоящей работе изучаются эффекты изменения такого геометрического параметра, как толщина жидкого слоя. Исследуется структура течения в наклонном канале, заполненном жидкостью и газопаровой смесью, в предположении о недеформируемой термокапиллярной границе раздела. В верхнем слое учитываются эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности [10]. В качестве условия для функции концентрации пара на верхней стенке канала выбрано условие нулевого потока. Особенностью данной работы является требование выполнения условия замкнутости потока в нижнем слое (в слое жидкости). Решение, построенное при таком условии, обеспечивает наилучшее согласие с условиями проведенных экспериментов [11]. В качестве рабочей системы «жидкость — газ» выбрана система «бензин — воздух».

### 1. Определяющие уравнения и вид точного решения

Рассмотрим следующую задачу: пусть вязкая несжимаемая жидкость и газопаровая смесь заполняют бесконечный прямоугольный наклонный канал с твердыми непроницаемыми стенками. Толщины жидкого и газопарового слоев фиксированы и равны соответственно  $l$  и  $h$ . Распо-

ложим систему координат так, что недеформируемая граница раздела совпадает с осью абсцисс. Вектор силы тяжести  $\vec{g}$  направлен под углом  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) по отношению к подложке (см. рис. 1).

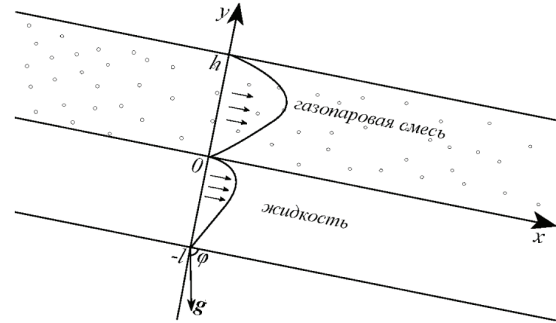


Рис. 1. Схема течения

Для моделирования течений жидкости и смеси газа и пара воспользуемся системой уравнений Обербека — Буссинеска. Дополним математическую модель уравнением диффузии (являющемся следствием закона Фика), которому удовлетворяет функция концентрации пара  $\Omega$ . Определяющая система уравнений представляет собой следующие выражения:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g \cos \varphi (\beta T + \gamma \Omega),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \sin \varphi (\beta T + \gamma \Omega),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \delta \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right),$$

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Здесь:  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат,  $\rho$  — плотность (относительное значение плотности),  $p'$  — модифицированное давление, или отклонение от гидростатического давления ( $p' = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x}$ ,  $\vec{x} = (x, y)$ ),  $p$  — давление,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $T$  — температура,  $\gamma$  — концентрационный коэффициент плотности,  $\Omega$  — концентрация пара в газе,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности,  $D$  — коэффициент диффузии пара в газе,  $\alpha$  — коэффициент Соре,  $\delta$  — коэффициент Дюфура. Отметим, что подчеркнутые слагаемые в первых двух уравнениях системы (1), а также уравнение диффузии учитываются только при моделировании течений в слое газа.

Пусть искомые функции скорости, давления, температуры и концентрации пара системы уравнений (1) имеют специальный вид [1] (см. также [12–14]):

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = Ax + \Theta_i(y), \\ \Omega &= -Bx + \Psi(y), \quad p'_i = p'_i(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  — параметр, определяющий продольный градиент температуры,  $B$  — параметр, определяющий продольный градиент концентрации пара,  $\Theta_i, \Psi$  — слагаемые, входящие в выражения для функций  $T_i$  и  $\Omega$ , зависят только от продольной координаты,  $i$  — номер слоя системы ( $i = 1$  — слой жидкости,  $i = 2$  — слой газопаровой смеси).

Заметим, что вид искомых функций зависит от знака продольного градиента температуры. При положительном значении этого параметра решение обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после подстановки (2) в (1), представляется в виде следующих аналитических выражений [3, 15]:

$$\begin{aligned} u_1(y) &= C_1 \sin(ky) + C_2 \cos(ky) + \\ &+ C_3 \operatorname{sh}(ky) + C_4 \operatorname{ch}(ky), \\ u_2(y) &= \overline{C}_1 \sin(my) \operatorname{sh}(my) + \overline{C}_2 \cos(my) \operatorname{sh}(my) + \\ &+ \overline{C}_3 \sin(my) \operatorname{ch}(my) + \overline{C}_4 \cos(my) \operatorname{ch}(my), \\ T_1(x, y) &= Ax + \frac{F_1}{k_1^2} \left( -C_1 \sin(ky) - C_2 \cos(ky) + \right. \\ &+ C_3 \operatorname{sh}(ky) + C_4 \operatorname{ch}(ky) \left. \right) + C_5 y + C_6, \quad (3) \\ T_2(x, y) &= Ax + \frac{F_1}{2m_1^2} \left( -\overline{C}_1 \cos(my) \operatorname{ch}(my) + \right. \\ &+ \overline{C}_2 \sin(my) \operatorname{ch}(my) - \overline{C}_3 \cos(my) \operatorname{sh}(my) + \\ &+ \overline{C}_4 \sin(my) \operatorname{sh}(my) \left. \right) + \overline{C}_5 y + \overline{C}_6, \\ \Omega(x, y) &= -Bx + \frac{G}{2m_1^2} \left( -\overline{C}_1 \cos(my) \operatorname{ch}(my) + \right. \\ &+ \overline{C}_2 \sin(my) \operatorname{ch}(my) - \overline{C}_3 \cos(my) \operatorname{sh}(my) + \\ &+ \overline{C}_4 \sin(my) \operatorname{sh}(my) \left. \right) + \overline{C}_7 y + \overline{C}_8. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $k, m, F_1, F_2, G$  рассчитываются через физико-химические и геометрические параметры задачи. Константы интегрирования  $C_j$  и  $\overline{C}_j$  ( $j = 1, \dots, 8$ ), входящие в соотношения (3), удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, являющейся следствием граничных условий, сформулированных в пункте 2. Функции давления  $p'_i$  восстанавливаются по своим частным производным на основе первых двух уравнений системы (1). Подробный алгоритм построения точного решения и поиска неизвестных констант интегрирования представлен в работе [3].

## 2. Условия на твердых стенках и границе раздела

Сформулируем условия на границах системы. Пусть на твердых стенках канала выполнено условие прилипания для скорости:

$$u_1|_{y=-l} = 0, \quad u_2|_{y=h} = 0. \quad (4)$$

Температурный режим задан линейным относительно продольной координаты:

$$T_1|_{y=-l} = Ax + \Theta^-, \quad T_2|_{y=h} = Ax + \Theta^+. \quad (5)$$

Здесь  $\Theta^-$  и  $\Theta^+$  — некоторые фиксированные константы.

На границе  $y = h$  функция концентрации пара  $\Omega$  удовлетворяет условию нулевого потока пара:

$$(\Omega_y + \alpha T_{2y})|_{y=h} = 0. \quad (6)$$

На термокапиллярной границе раздела  $y = 0$  выполняются условия непрерывности функций скорости и температуры:

$$u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0}, \quad T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}. \quad (7)$$

Кинематическое условие ( $v_1 = 0$  и  $v_2 = 0$ ) выполняется автоматически в силу вида точного решения (2). Динамическое условие характеризует баланс касательных напряжений на границе раздела и имеет следующий вид:

$$\rho_1 \nu_1 u_{1y} = \rho_2 \nu_2 u_{2y} + \sigma_T T_{1x}|_{y=0}, \quad (8)$$

где  $\sigma_T$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Полагается линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры:  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0)$ ,  $\sigma_0$  — поверхностное натяжение при некоторой начальной температуре  $T_0$ ,  $\sigma_T = \text{const}$ ,  $\sigma_T < 0$ .

Баланс теплового потока с учетом диффузионного потока массы испаряющейся жидкости на границе раздела  $M$  и эффекта диффузионной теплопроводности имеет вид:

$$\kappa_1 T_{1y} - \kappa_2 T_{2y} - \delta \kappa_2 \Omega_y|_{y=0} = -\lambda M, \quad (9)$$

$$M = -D \rho_2 (\Omega_y|_{y=0} + \alpha T_{2y}|_{y=0}).$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\lambda$  — скрытая теплота испарения,  $M$  — массовая скорость испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени жидкости ( $M = \text{const}$ ),  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — коэффициенты теплопроводности жидкости и газа соответственно.

Концентрация насыщенного пара на границе раздела будет определяться согласно следующему соотношению (см. [16]):

$$\Omega|_{y=0} = \Omega_*(1 + \varepsilon(T_2|_{y=0} - T_0)), \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  — параметр, зависящий от характерной температуры и физико-химических свойств газопаровой среды,  $\Omega_*$  — концентрация насыщенного пара при  $T_2 = T_0$ .

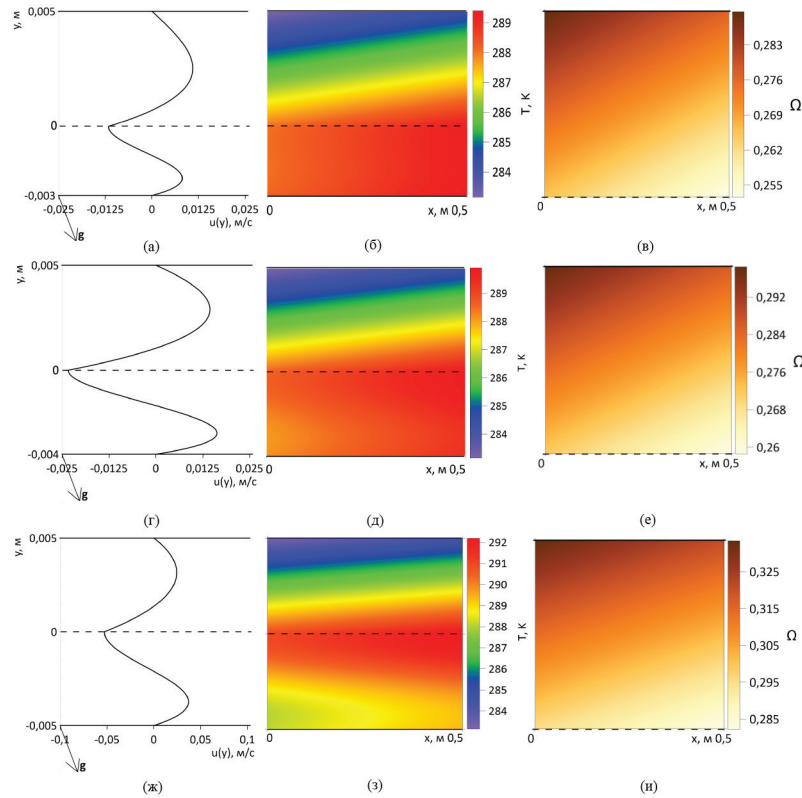


Рис. 2. Профили скорости (а, г, ж), распределение температуры (б, д, з) и концентрации пара (в, е, и) в системе «бензин – воздух»:  $Q = 3.6 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с),  $\varphi = 70^\circ$ ,  $\vartheta^- = 278.15$  K,  $\vartheta^+ = 273.15$  K,  $A = 2.5$  K/м,  $T_0 = 283.15$  K; (а, б, в) –  $l = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $M = 9.288 \cdot 10^{-7}$  кг/(м<sup>2</sup>·с), (г, д, е) –  $l = 4 \cdot 10^{-3}$  м,  $M = 9.288 \cdot 10^{-7}$  кг/(м<sup>2</sup>·с), (ж, з, и) –  $l = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $M = 9.288 \cdot 10^{-7}$  кг/(м<sup>2</sup>·с)

Задача решается при условии заданного расхода газа  $Q$  и в предположении о замкнутости потока в нижнем слое:

$$Q = \int_0^h \rho_2 u_2(y) dy, \quad \int_{-l}^0 u_1(y) dy = 0. \quad (11)$$

### 3. Влияние толщины слоев на характер течений

Рассмотрим влияние толщины жидкого слоя на характер течения в системе. Физико-химические параметры рабочих сред приведены согласно [17]. Заметим, что точные значения коэффициентов термодиффузии и диффузионной теплопроводности для паров бензина неизвестны. Выбранные значения являются модельными и не противоречат известным общим требованиям.

На рисунке 2 представлены профили скорости (рис. 2 а, г, ж), распределение температуры (рис. 2 б, д, з) и концентрации пара (рис. 2 в, е, и) в случае положительного значения продольного градиента температуры  $A$  (нагреватель отнесен вниз по каналу), если толщина газопарового слоя равна  $5 \cdot 10^{-3}$  м. Отмечается рост интенсивности течения с увеличением толщины жидкого слоя. Нижний слой прогревается тем сильнее, чем мень-

ше значения его толщины  $l$ . С увеличением толщины слоя наблюдаются количественные изменения в распределении концентрации пара в верхнем слое (см. рис. 2 в, е, и). Отметим возникновение «холодного» термоклина вблизи нижней твердой стенки канала при  $l = h = 5 \cdot 10^{-3}$  м. (см. рис. 2 з).

Характерной особенностью является то, что незначительное утолщение слоя не приносит изменений в интенсивность массопереноса (см. значения  $M$  в подрисуночной подписи). Заметим, что речь идет только о рассмотренных вариантах при указанных значениях толщин слоев. Для изученных течений характерен процесс испарения ( $M > 0$ ).

### Заключение

В работе проведено математическое моделирование двухслойных течений в наклонном канале с испарением на границе раздела при условии замкнутости потока в жидком слое. Представлены примеры профилей продольной скорости, полей температуры и концентрации пара для системы «бензин – воздух». Показано, что изменение параметра, определяющего толщину слоя влечет за собой как количественные, так и качественные изменения в структуре течения.

### Библиографический список

1. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
3. Makarov E.E. Modeling of Stationary Flows of a Liquid-Gas System in an Inclined Channel Subject to Evaporation. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2023. № 16(1). EDN: RPCLDC
4. Goncharova O.N., Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. Vol. 1. № 3. Doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20
5. Ласковец Е.В. Изучение влияния геометрических параметров системы на характер трехслойных течений в горизонтальном канале // Известия Алт. гос. ун-та. 2023. № 1 (129) Doi: 10.14258/izvasu(2023)1-20
6. Shefer I.A. Influence of the transverse temperature drop on the stability of two-layer fluid flows with evaporation Fluid. 2019. Dyn 54. Doi: 10.1134/S0015462819040098
7. Шефер И.А. Влияние геометрии системы на устойчивость течения испаряющейся жидкости // Прикладная математика и механика. 2018. № 2 (82).
8. Liu R., Liu Q. Linear stability analysis of convection in two-layer system with an evaporating vapor-liquid interface // Acta Mechanica. 2006. Sinica 22. Doi: 10.1007/s10409-006-0106-6
9. Xu G.-F., Liu Q.-S, Qin J., Zhu Z.-Q. Instability in two-sided thermocapillary-buoyancy convection with interfacial phase change // Chinese Physics Letters. 2020. № 1 (37). Doi: 10.1088/0256-307X/37/1/014701
10. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. В 2-х книгах, кн. 1. М., 1991.
11. Lyulin Yu.V., Kabov O.A. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear stress gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2014. № 70. Doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.039
12. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л., 1952.
13. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3.
14. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского гос. ун-та. Сер. Гидродинамика : сб. трудов. 1972. № 4.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
16. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения // Теплофизика высоких температур. 2017. № 6 (55). Doi: 10.7868/S0040364417060072
17. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н., Овчарова А.С. Моделирование конвекции в двухфазной системе в условиях диффузионного испарения в замкнутой области // ПМТФ. 2023. Doi: 10.15372/PMTF202215141