УДК 514.765

Об одном уравнении в теории солитонов Риччи с полусимметрической связностью*

П.Н. Клепиков[1], М.В. Куркина[2], Е.Д. Родионов[1], О.П. Хромова[1]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Ханты-Мансийская государственная медицинская академия (Ханты-Мансийск, Россия)

On an Equation in the Ricci Solitons Theory with a Semisymmetric Connection

P.N. Klepikov[1], M.V. Kurkina[2], E.D. Rodionov[1], O.P. Khromova[1]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Khanty-Mansiysk State Medical Academy (Khanty-Mansiysk, Russia)

Исследованию солитонов Риччи, в том числе инвариантных солитонов Риччи, со связностями различного типа посвящены работы многих математиков.

Впервые метрические связности с векторным кручением, или полусимметрические связности, на (псевдо)римановых многообразиях исследовались в работах Э. Картана. Позднее в работах К. Яно и И. Агриколы изучались тензорные поля и геодезические линии таких связностей. Уравнение Эйнштейна полусимметрических связностей на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях рассматривались в работах П.Н. Клепикова, Е.Д. Родионова и О.П. Хромовой.

В предыдущей работе авторов исследованы инвариантные солитоны Риччи с полусимметрической связностью — важный подкласс в классе однородных солитонов Риччи. Получена классификация инвариантных солитонов Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью, отличной от связности Леви-Чивиты. Доказано, что в этом случае существуют инвариантные солитоны Риччи с неконформно-киллинговым векторным полем. При этом часть приведенных доказательств была дана с помощью пакетов аналитических вычислений.

В данной работе исследуются инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметрической связностью. Даны аналитические доказательства всех теорем, завершающих классификацию таких солитонов.

Ключевые слова: инвариантные солитоны Риччи, группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, полусимметрические связности.

The study of Ricci solitons and invariant Ricci solitons with connections of various types has garnered much attention from many mathematicians. Metric connections with vector torsion, or semisymmetric connections, were first studied by E. Cartan on (pseudo) Riemannian manifolds. Later, K. Yano and I. Agricola studied tensor fields and geodesic lines of such connections, while P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, and O.P. Khromova considered the Einstein equation of semisymmetric connections on three-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds.

In the previous paper, the authors studied invariant Ricci solitons with a semisymmetric connection. They are an important subclass of the class of homogeneous Ricci solitons. We obtained the classification of invariant Ricci solitons on three-dimensional Lie groups with a left-invariant Riemannian metric and a semisymmetric connection different from the Levi–Civita connection. Also, the existence of invariant Ricci solitons with a non-conformal Killing vector field was proved for the such case. Moreover, a part of the proofs was obtained using the analytical calculation software packages.

In this paper, we investigate invariant Ricci solitons on three-dimensional nonunimodular Lie groups with a left-invariant Riemannian metric and a semisymmet-ric connection. Analytical proofs of all theorems completing the classification of such solitons are presented.

Keywords: invariant Ricci solitons, Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, semisymmetric connection.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-09

1. Предварительные сведения

Римановы многообразия со связностью Леви-Чивиты широко известны и исследуются в работах многих математиков. Однако возможно рассматривать риманово многообразие со связностью, отличной от связности Леви-Чивиты.

* Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 22-21-00111).

Одной из таких связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], является метрическая связность ∇ с векторным кручением, или полусимметрическая связность, которая определяется формулой:

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты, g — метрический тензор.

Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [1–10]).

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи r не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема [9, 10].

Теорема 1 [7, 8]. *Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π, определяемая равенством $\pi(X) = g(X,V)$ для любого векторного поля X на M, замкнута, т.е. $d\pi = 0$.*

Метрика g полного риманова многообразия (M,g) называется *солитоном Риччи*, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \qquad (2)$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется *однородным солитоном Риччи*, а если $M = G$ — группа Ли и поле P левоинвариантно — *инвариантным солитоном Риччи*.

Если риманово многообразие (M,g) со связностью Леви-Чивиты есть многообразие Эйнштейна или изометрично прямому произведению многообразия Эйнштейна и евклидова пространства, то его метрика g называется *тривиальным солитоном Риччи*.

Теорема 2 [11]. *Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.*

В неунимодулярном случае аналогичный результат для связности Леви-Чивиты до размерности четыре включительно получен П.Н. Клепиковым и Д.Н. Оскорбиным [12].

Исследование инвариантных солитонов Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полусимметричной связностью проводилось авторами в [10], где получена их полная классификация и доказано существование нетривиальных инвариантных солитонов Риччи. Однако в одном из случаев не было приведено аналитическое доказательство данной классификации. В настоящей работе мы исследуем данный случай, что соответствует случаю (iii) работы [10, с. 68].

2. Исследование уравнения солитона

При заданных условиях работы [10, с. 68] данное уравнение солитона Риччи имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}V^2\left(\beta + \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right) + V^1V^3 = P^2\beta + \\
+P^3\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}, \\
\frac{1}{2}V^3\left(-\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - \beta\right) + V^1V^2 = -\frac{\beta V^3}{V^2}P^2 - \\
-\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}P^3, \\
-\beta V^3 + V^1V^2 + \frac{1}{2}V^3\left(\beta - \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right) = \\
= -\frac{\beta V^3}{V^2}P^2 - \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}P^3, \\
\frac{1}{2}V^2\left(\beta - \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right) + V^3\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2} + \\
+V^1V^3 = P^2\beta + P^3\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}, \\
\frac{(\beta V^3 + 2V^2)\beta(V^3)^2}{(V^2)^3} + \beta\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2} + \\
+\frac{1}{2}V^1\left(\beta - \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right) - V^2V^3 = \\
= P^1\left(\beta - \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right), \\
-\frac{\beta^2(V^3)^2}{(V^2)^2} + 2\frac{\beta V^3}{V^2}V^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right)^2 - \\
-\frac{1}{2}\beta^2 - (V^3)^2 + \frac{\beta V^3(\beta V^3 + 2V^2)}{(V^2)^2} - \frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}V^1 - \\
-(V^1)^2 = \Lambda + 2P^1\left(-\frac{\beta V^3}{V^2}\right), \\
-(V^2)^2 - (V^1)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right)^2 - \\
-\left(\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{\beta V^3(\beta V^3 + 2V^2)}{(V^2)^2} + \\
+\frac{\beta V^3}{V^2}V^1 - 2\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}V^1 = \Lambda - 2P^1\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}, \\
-\frac{\beta^2(V^3)^2}{(V^2)^2} + \frac{\beta V^3}{V^2}V^1 + \frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\beta - \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{(\beta V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2}\right)^2 - (V^3)^2 - (V^2)^2 - \\
-\left(\frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}\right)^2 - \frac{\beta V^3 + 2V^2}{V^2}V^1 - \frac{1}{2}\beta^2 = \Lambda.
\end{gathered}$$

Здесь β — структурная константа трехмерной группы Ли G, $V = (V^1, V^2, V^3)$ — векторное поле, задающее полусимметрическую связность (1), $P = (P^1, P^2, P^3)$ — векторное поле, определяющее солитон Риччи (2), Λ — константа Эйнштейна (см. подробнее [10]).

Докажем, что данная система уравнений не имеет решений в действительных числах.

Если первое уравнение системы домножить на $\frac{V^3}{V^2}$ и сложить со вторым уравнением, то получим

$$\frac{V^1((V^2)^2 + (V^3)^2)}{V^2} = 0,$$

откуда $V^1 = 0$. Тогда из суммы четвертого и пятого уравнений выразим

$$\Lambda = -\frac{1}{2}(V^2)^2 - \frac{1}{2}(V^3)^2 + 2P^1 - 2.$$

Рассмотрим случай 1: $\beta \neq 0$. Выразим из первого уравнения

$$P^2 = \frac{\beta(V^2)^2 + 2(V^3 - 2P^3)V^2 - V^3\beta(2P^3 - V^3)}{2V^2\beta}.$$

Разобьем случай 1 на два подслучая. Случай 1.1 $\beta V^3 + 2V^2 \neq 0$. Тогда из разности шестого и пятого уравнений имеем:

$$P^1 = -\frac{\beta^2(V^2)^2 + \beta^2(V^3)^2 + (V^2)^2(V^3)^2}{2V^2(\beta V^3 + 2V^2)}.$$

После подстановки в исходную систему сумма третьего уравнения, домноженного на $\frac{V^3}{V^2}$, и пятого уравнения примет вид

$$-\frac{((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)((V^2)^2 + (V^3)^2)}{2(V^2)^2} = 0.$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах.

Случай 1.2. Пусть $\beta V^3 + 2V^2 = 0$. Из третьего уравнения системы выражаем $P^1 = \frac{1}{2}(V^3)^2$. Но тогда шестое уравнение примет вид:

$$\frac{1}{8}(\beta^2 + 12)(V^3)^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + 2 = 0.$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах.

Случай 2. Пусть $\beta = 0$. Из первого уравнения системы имеем $V^3 = 2P^3$, а из шестого

$$P^1 = -\frac{(V^2)^4 + 16(P^3)^2}{4(V^2)^2} - (P^3)^2 - 1.$$

Тогда четвертое уравнение системы примет вид

$$\frac{(V^2)^4 + 16(P^3)^2 + 4(V^2)^2}{(V^2)^2} = 0.$$

Данное уравнение не имеет решений в действительных числах. Таким образом, исходная система уравнений в случае (iii) работы [10, с. 68] неразрешима.

Заключение

В настоящей работе исследованы инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинваринтной римановой метрикой и полусимметрической связностью. Приведено аналитическое решение системы нелинейных алгебраических уравнений, возникающей в процессе изучения данных солитонов, что завершает классификацию таких солитонов.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. Vol. 15.

3. Schouten J.A. Ricci-Calculus. An introdustion to tensor analisis and geometrical Application Springer-Verlag. — Berlin-Cöttingen-Heidelberg, 1954.

4. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. Vol. 3. № 25. Doi: 10.12988/ijcms

5. Agricola I.,Thier C. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion // Annals of Global Analysis and Geometry. 2004. Vol. 26.

6. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 45. Doi: 10.1016/j.difgeo.2016.01.004

7. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. pure appl. Math. 1985. Vol. 16. № 7.

8. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 1995. Vol. 54.

9. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические

обзоры. 2020. Т. 181. № 3 Doi: 10.36535/0233-6723-2020-181-41-53

10. Klepikov P.N., Rodionov E.D., Khromova O.P., Three-dimensional nonunimodular Lie groups with a Riemannian metric of an invariant Ricci soliton and a semisymmetric metric connection // Russian Mathematics. 2020. Vol. 66. № 5. Doi: 10.3103/S1066369X2205005X

11. Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. 1997. Vol. 17.

12. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Homogeneous Invariant Ricci Solitons on Four-dimensional Lie Groups // Izvestiya of Altai State University. 2015. Vol. 85, № 1/2. Doi: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21