МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.95:519.63

Локальная разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения сыпучей смеси

И.Г. Ахмерова, А.С. Правдивцев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Local Solvability of a Boundary Value Problem for One-Dimensional Motion of a Granular Matter

I.G. Akhmerova, A.S. Pravdivtsev

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работе рассматривается движение сыпучей среды при вертикальном встряхивании для неглубокого слоя. Сыпучий материал является одним из самых распространенных в природе, и его исследованию в последние десятилетия уделяется большое внимание. Данный материал, с одной стороны, ведет себя как жидкость, так как способен вытекать из емкости и принимать до некоторой степени еу форму. С другой стороны, такой материал может вести себя как твердое тело. В данной статье начальной точкой считается состояние Leidenfrost, а сыпучая среда напоминает жидкость, нагретую снизу. Целью работы является доказательство теоремы о локальной разрешимости начально-краевой задачи для одномерного движения сыпучей среды с учетом вибраций с использованием гидродинамического подхода к описанию данного материала. Во введении дано краткое описание рассматриваемой проблемы, а также проведен обзор близких по теме работ. В пункте 1 рассмотрена одномерная изотермическая задача движения сыпучей среды, которая описывается гидродинамической моделью, а сыпучий материал рассматривается как сплошная среда. Проведено преобразование исходной системы уравнений, сформулирована теорема существования обобщенного решения. В пункте 2 доказана локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи в пространствах С.Л. Соболева и Гельдера.

Ключевые слова: гранулярная температура, плотность, сыпучая среда, разрешимость.

This paper investigates the motion of a granular medium for a shallow, vertically shaken bed. Granular matter is one of the most common in nature, and its study has received much attention in recent decades. On the one hand, such a matter behaves like a fluid and has the ability to take the form of its container and to leak away. On the other hand, its behavior is similar to a solid. This work assumes the Leidenfrost state as an initial state with granular matter resembling a fluid heated up from below. The goal is to establish the theorem on the local solvability of the initial-boundary value problem for the one-dimensional motion of a granular medium with consideration to vibrations and scopes of the hydrodynamical approach. The introduction gives brief overviews of the problem and related studies. The Section 1 discusses the one-dimensional isothermal problem for the motion of a granular matter, which is treated like a continuous medium, within the scopes of the hydrodynamical model. The original set of equations is rearranged, and the theorem on the existence of a generalized solution is established. The Section 2 proves the local temporal solvability of the initial-boundary problem Sobolev's and Holder's spaces.

Keywords: granular temperature, density, granular medium, solvability.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-08

Введение

Сыпучий материал — это совокупность большого количества дискретных твердых частиц. Как правило, промежутки между частицами заполнены воздухом или водой, поэтому гранулированный поток представляет собой многофазный процесс. Однако если частицы плотно упакованы или плотность частиц намного выше плотности межзерновой жидкости или газа, то только частицы, а не жидкость (газ) или взаимодействие жидкости (газа) и частиц будут играть наибольшую роль в переносе импульса в материале, и в этом случае межчастичную жидкость (газ) можно не учитывать. Гранулированный материал, как правило, попадает в эту предельную категорию и, таким образом, может рассматриватся как дисперсная однофазная, а не многофазная смесь.

Во многих физических процессах сыпучие материалы ведут себя как жидкие, поэтому важным вопросом в исследовании сыпучести является переход к гидродинамическому описанию этих материалов [1–11]. На данный момент проведено много исследований сыпучести, посвященных описанию ее поведения теорией сплошных сред [9, 12–15]. При исследовании движения сыпучей среды при вертикальном встряхивании в открытом контейнере было установлено, что эксперементальные и численные результаты объясняются с помощью теории гидродинамики [16]. Гидродинамическая модель близка по структуре системе уравнений вязкого газа [17] с зависящей от плотности вязкостью [18]. Вопросы разрешимости задач для близких по структуре моделей рассматривались в работах [19–23].

В данной статье для системы уравнений одномерного нестационарного изотермического движения сыпучей среды, где вязкость зависит от плотности и температы и давление является уравнением идеального газа типа VanderWaals [24], доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассматривается движение, обусловленное подъемной силой для неглубокого, вертикально встряхиваемого гранулированного слоя. Система дифференциальных уравнений, описывающих одномерное изотермическое движение сыпучей среды, состоит из уравнений сохранения массы и импульса [16]

$$\frac{\partial(mn)}{\partial t}+\frac{\partial(mnu)}{\partial x}=0,$$

$$mn\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=mng-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left([2\mu+\lambda]\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Здесь (x,t) — эйлеровы координаты; n — численная плотность; m — масса одной частицы; u — скорость; p — давление; μ — сдвиговая вязкость; λ — объемная вязкость; g — ускорение свободного падения. Уравнение состояния VanderWaals неадекватно для описания высокого давления, поэтому используем интерполяционную форму. В приложениях используются следующие зависимости [24, 25, 26]: $p(n,T)=nT\frac{n_c+n}{n_c-n}$; $\lambda(n,T)=-2/3\mu(n,T)$, $\mu(n,T)=m\kappa Pr$, $\kappa(n,T)=\frac{n(\alpha l+d)^2}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$. Здесь n_c — численная плотность гексагональной плотноупакованной решетки; d — диаметр гранул; $\kappa(n,T)$ — коэффициент теплопроводности; $l=\frac{n_c-n}{\sqrt{8}nd(n_c-an)}$ — средний свободный пробег, для констант $a=1-\sqrt{3/8}$, $\alpha=0,6$ было заимствовано значение из [26]; Pr — число Прандтля; $T(x,t)$ — гранулярная температура, определяемая колебаниями средней скорости частиц, т.е. $1/2k_BT=1/2m(<u^2>-<u>^2)$, где k_B — постоянная Больцмана.

Полагая, что плотность потока $\rho(x,t)$ равна mn [3], приходим к системе уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho g-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left([2\mu+\lambda]\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{2}$$

решаемая в области $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,L)$, при начальных и краевых условиях

$$u|_{t=0}=u^0(x),\quad \rho|_{t=0}=\rho^0(x),$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=L}=0. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t)$ — плотность; $p(\rho,T)$ — давление, удовлетворяет интерполяционной форме уравнения состояния VanderWaals. Искомыми являются величины $u(x,t),\rho(x,t)$.

В настоящей работе доказана локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи (1) – (3) в пространствах С.Л. Соболева и Гельдера. Существование сильного решения на достаточно малом промежутке времени доказывается с помощью метода Бубнова — Галеркина. Доказательство теоремы в идейном плане следует доказательству аналогичного результата для вязкого теплопроводного газа [17].

При доказательстве разрешимости задачи (1) – (3) в малом по времени удобно использовать другие независимые переменные, а именно координаты Лагранжа. Пусть $y=y(\zeta,x,t)$ — решение задачи Коши: $\frac{\partial y}{\partial\zeta}=u(y,\zeta)$, $\quad y|_{\zeta=t}=x$. Положим $\xi=y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $\rho(\xi,t)=\rho^0(\xi)J(\xi,t)$, где $J(\xi,t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}$ — якобиан перехода [17]. Переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу $\rho^0(\xi)d\xi=d\bar{x}$, $\quad\bar{x}(\xi)=\int\limits_0^\xi\rho^0(\eta)d\eta\in[0,L]$ и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{4}{3}\mu(\rho,T)\rho\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial p(\rho,T)}{\partial x}+g. \tag{5}$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$u|_{t=0}=u^0(x),\quad \rho|_{t=0}=\rho^0(x),$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=L}=0. \tag{6}$$

Перейдем в (4) и (5) к безразмерным переменным: $x'=\frac{x}{x_1}$, $t'=\frac{t}{t_1}$, $u'=\frac{u}{u_1}$, $\rho'=\frac{\rho}{\rho_c}$, $T'=\frac{T}{T_0}$, $l'=\frac{l}{l_1}$, $l_1=d$, $t_1=\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{T_0}}$, $u_1=\frac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{m}}$, где $x_1=\int\limits_0^L\rho^0(\xi)d\xi=\rho_cd$, $T_0\propto m(af)^2$ — заданная гранулярная температура на дне, a — амплитуда, а f — частота колебаний, генерирующих вибростендом, на котором стоит открытый контейнер, частично заполненный гранулами. Подставим безразмерные переменные в уравнения состояния, полагая $\rho = mn$ и $\rho_c = mn_c$ [3]: $p = \frac{\rho_c T_0}{m} p'$, $\kappa = \frac{\rho_c d^2}{ml_1} \sqrt{\frac{T_0}{m}} \kappa'$, $\mu = mPr\kappa = \frac{\rho_c d^2}{l_1} \sqrt{\frac{T_0}{m}} \mu'$, $\mu' = Pr\kappa'$. Тогда область изменения x' есть единичный отрезок [0,1], а система уравнений (4) и (5) принимает следующий вид (штрихи опускаются):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + G, \tag{8}$$

где $G = \frac{mgd}{T_0}$ — безразмерное слагаемое, содержащее в себе безразмерную силу колебаний $S = \frac{T_0}{mgd} = \frac{a^2\omega^2}{gd}$ $(\omega = 2\pi f)$, которая представляет собой отношение кинетической энергии, вводимой в систему вибрирующей нижней частью и потенциальной энергии, связанной с диаметром частицы.

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x),$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \tag{9}$$

Сформулируем основной результат статьи.

Определение. Обобщенным решением задачи (7) – (9) называется совокупность функций $(u(x,t), \rho(x,t))$ из пространств: $\rho(t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, $u(t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^2(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, удовлетворяющих уравнениям (7) – (8) и неравенству $0 < \rho(x,t) < 1 < \frac{1}{a}$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема. Пусть данные задачи (7) – (9) подчиняются следующим условиям гладкости: $(u^0, \rho^0) \in W_2^1(\Omega)$, $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Пусть функции $p(\rho)$, $\kappa(\rho)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\rho(x,t) \in (0, 1/a)$ и удовлетворяют условиям: $k_0^{-1}\rho^{q_1}(1-\rho)^{q_2}(1-a\rho)^{q_3} \le \kappa(\rho) \le k_0\rho^{q_4}(1-\rho)^{q_5}(1-a\rho)^{q_6}$, $k_0^{-1}\rho^{q_7}(1+\rho)^{q_8}(1-\rho)^{q_9} \le p(\rho) \le k_0\rho^{q_{10}}(1+\rho)^{q_{11}}(1-\rho)^{q_{12}}$, $|(\kappa(\rho)'_\rho| \le k_0\rho^{q_{13}}(1-\rho)^{q_{14}}(1-a\rho)^{q_{15}}$, $|(p(\rho)'_\rho| \le k_0\rho^{q_{16}}(1+\rho)^{q_{17}}(1-\rho)^{q_{18}}$, где $k_0 = const > 0$, $q_1, ..., q_{18}$ — фиксированные вещественные параметры.

Если выполнены условия

$$0 < b_0 \le \rho^0(x) \le B_0 < 1/a, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{10}$$

где b_0, B_0 — известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 \in (0,T)$ такое, что для всех $t \le t_0$ существует обобщенное решение $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ задачи (7)–(9).

2. Локальная разрешимость

Локальное обобщенное решение будем строить как предел приближенных решений (ρ^n, u^n), где u^n выражаются в виде конечной суммы: $u^n(x,t) = \sum_{i=1}^n u_i^n(t) sin(\pi i x)$ с неизвестными коэффициентами $u_i^n(t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Для определения этих коэффициентов потребуем, чтобы уравнение (8) выполнялось приближенно:

$$\int_0^1 [\frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu^n\rho^n\frac{\partial u^n}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - G] sin(\pi i x) dx = 0. \tag{11}$$

Неизвестные коэффициенты $u_i^n(t)$ находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_i^n}{dt} = \Phi_i^n(u_1^n, ..., u_n^n; \rho^n),$$

$$\Phi_i^n = 2\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu^n\rho^n\frac{\partial u^n}{\partial x}\right) - \frac{\partial p^n}{\partial x} + G) sin(\pi i x) dx. \tag{12}$$

Начальные данные для системы (12) возьмем из разложений начальных функций $u^0(x)$ в ряды Фурье по синусам:

$$u_i^n(0) = u_i^0 \equiv \equiv 2\int_0^1 u^0(x) sin(\pi i x) dx, \ i = 1, ..., n. \tag{13}$$

Функцию $\rho^n(x,t)$ определим из решения задачи:

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} + (\rho^n)^2 \frac{\partial u^n}{\partial x} = 0, \ \rho^n|_{t=0} = \rho^0(x). \tag{14}$$

Из (14) для $\rho^n(x,t)$ получим следующее соотношение:

$$\rho^n(x,t) = \frac{\rho^0(x)}{1 + \rho^0(x)\int_0^t \frac{\partial u^n}{\partial x}(x,\tau) d\tau}. \tag{15}$$

Таким образом, приближенное решение (u^n, ρ^n) удовлетворяет задаче Коши (12)–(14), локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном $n = 1, 2, ...$ следует из теоремы Коши — Пикара для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [27].

Еще одно условие, из которого в дальнейшем выбирается величина промежутка t_0, связано с требованием положительности $\rho^n(x,t)$. Поскольку $0 < b_0 \le \rho^0(x) < B_0 < 1/a$, потребуем, чтобы в (15) выполнялись соотношения

$$0 < \frac{b_0}{2} \le \rho^n(x,t) \le \frac{1+aB_0}{2a} < 1/a \qquad (16)$$

для всех n и при $x \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$. Кроме того, из (15) и (16) получим

$$|\rho_x^n| \le C(1 + \int\limits_0^t |u_{xx}^n| d\tau). \qquad (17)$$

Лемма. Существует такое значение $t_0 > 0$, что при всех n на интервале $[0,t_0]$ для решения u^n задачи (12), (13) справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le t_0} ||u_x^n(t)||^2 + \int\limits_0^{t_0} ||u_{xx}^n||^2 + ||u_t^n||^2 dt \le N.$$

Доказательство. Положим $z_n(t) = ||u^n(t)||^2 + ||u_x^n(t)||^2 + \alpha\left(\int\limits_0^t ||u_{xx}^n(\tau)||^2 d\tau\right)$, где вещественный параметр $\alpha \in (0,1)$ будет указан позже.

Каждое из уравнений (11) умножим на $u_i^n(t)$, просуммируем по i от 1 до n и проинтегрируем по x от 0 до 1. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (u^n)^2 dx + \int\limits_0^1 \frac{4}{3}\mu(\rho^n)\rho^n(u_x^n)^2 dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 u^n \frac{\partial p(\rho^n)}{\partial x} dx + \int\limits_0^1 u^n G dx. \qquad (18)$$

Функции $\frac{\rho^n}{1-\rho^n}$; $\frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}$; $\frac{\rho^n(1+\rho^n)}{(1-\rho^n)^2}$; $p'(\rho^n)_{\rho^n}$ в силу (16) равномерно по n ограничены при всех $\rho^n \in (0,1/a)$. Оценим слагаемые правой части равенства (18) с учетом (17), неравенств Гельдера, Коши и Юнга. Поскольку $\mu(\rho^n)\rho^n \ge \nu_0 \equiv k_0^{-1}(\frac{b_0}{2})^{q_1+1}(1-\frac{1+aB_0}{2a})^{q_2}(\frac{1-aB_0}{2})^{q_3}$, то приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}||u^n(t)||^2 + \nu_0||u_x^n||^2 \le C(z_n(t) + ||g(t)||^2). \qquad (19)$$

Здесь и далее C — положительная постоянная, не зависящая от n.

Каждое из уравнений (11) умножим на $(i\pi)^2 u_i^n(t)$ и просуммируем по i от 1 до n. Учитывая равенство $\sum_{i=1}^n u_i^n (i\pi)^2 sin(i\pi x) = -u_{xx}^n$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (u_x^n)^2 dx + \frac{4}{3}\int\limits_0^1 \mu(\rho^n)\rho^n(u_{xx}^n)^2 dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\int\limits_0^1 u_{xx}^n(\mu(\rho^n))'_x\rho^n u_x^n dx - \frac{4}{3}\int\limits_0^1 u_{xx}^n\mu(\rho^n)\rho_x^n u_x^n dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 u_{xx}^n \frac{\partial p(\rho^n)}{\partial x} dx + \int\limits_0^1 u_{xx}^n G dx. \qquad (20)$$

Функции $\rho^n\mu'_{\rho^n}$; $\mu(\rho^n)$; p'_{ρ^n} в силу (15) равномерно по n ограничены при всех $\rho^n \in (0,1/a)$. Из равенства (20) с учетом (17), неравенств Гельдера, Коши и Юнга следует оценка

$$\frac{d}{dt}||u_x^n||^2 + \frac{8}{3}\nu_0||u_{xx}^n||^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i||u_{xx}^n||^2 + C(z_n(t) + z_n^3(t) + ||g(t)||^2). \qquad (21)$$

Сложим неравенства (19) и (21)

$$\frac{d}{dt}(||u^n(t)||^2 + ||u_x^n(t)||^2) + \frac{8}{3}\nu_0||u_{xx}^n(t)||^2 + \nu_0||u_x^n(t)||^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i||u_{xx}^n||^2 + C(z_n(t) + z_n^3(t) + ||g(t)||^2)$$

и выберем $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ из условия $\sum\limits_{i=1}^4 \varepsilon_i = \frac{8}{3}\nu^0 - \alpha$ (если $\nu^0 \le 1$, то положим $\alpha = \nu^0/2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ выберем из условия $\sum\limits_{i=1}^4 \varepsilon_i = \frac{8}{3}\nu^0 - \frac{\nu^0}{2} = \frac{13\nu^0}{6}$; если $\nu^0 > 1$, то положим $\alpha = 1/2$ и $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ выберем из условия $\sum\limits_{i=1}^4 \varepsilon_i = \frac{8}{3}\nu^0 - 1/2$). Тогда последнее неравенство можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dz_n(t)}{dt} \le C(z_n^3(t) + ||g(t)||^2), \qquad (22)$$

где C не зависит от n. Из (22) следует равномерная по n ограниченность, $z_n(t)$, при всех $t \le t_0$, где $t_0 < \frac{1}{C}(z^n(0) + C\int\limits_0^T ||g(\tau)||^2 d\tau)^{-2}$. При таком выборе t_0 из (22) следует, что для всех n справедливо неравенство

$$\max_{0\le t\le t_0} ||u_x^n(t)||^2 + \int\limits_0^{t_0} ||u_{xx}^n||^2 dt \le N \qquad (23)$$

с постоянной N, не зависящей от n.

Вернемся к неравенству (16). Из равенства (15) легко получить $\frac{b_0}{1+2^{1/2}B_0N^{1/2}t_0^{3/4}} \le \rho^n(x,t) \le \frac{B_0}{1-2^{1/2}B_0N^{1/2}t_0^{3/4}}$, где N постоянная из (23). Если выбрать $t_0 \le min((\frac{1-aB_0}{(1+aB_0)2^{1/2}B_0N^{1/2}})^{4/3}$, $\frac{1}{C}(z^n(0) + C\int\limits_0^T ||g(\tau)||^2 d\tau)^{-2})$, то получим неравенство (16) соответственно при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,t_0]$. из уравнений (12) следуют указанные в лемме оценки для u_t^n. Лемма доказана.

Оценки Леммы и (16) позволяют выделить из последовательностей $\{\rho^n\}$, $\{u^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Предельным переходом в равенствах (11) и (14) показывается, что предельные функции ρ, u дают обобщенное решение в промежутке $[0,t_0]$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Jenkins J.T., Savage S.B. A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 130.

2. Haff P.K. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 134.

3. Jenkins J., Richman M. Boundary conditions for plane flows of smooth nearly elastic circular discs // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 171.

4. Campbell C.S. Rapid granular flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1990. Vol. 22.

5. Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P. Granular solids, liquids, and gases // Rev. Mod. Phys. 1996. Vol. 68.

6. Behringer R.P., Jaeger H.M., Nagel S.R. The physics of granular materials // Phys. Today. 1996. Vol. 49.

7. Sela N., Goldhirsch I. Hydrodynamic equations for rapid flows of smooth inelastic spheres to Burnett order // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 361.

8. Brey J.J., Dufty J.W., Kim C.S., Santos A. Hydrodynamics for granular flow at low density // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. № 4.

9. Kadanoff L.P. Built upon sand: theoretical ideas inspired by granular flows // Rev. Mod. Phys. 1999. Vol. 71. № 1.

10. Goldhirsch I. Rapid granular flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. Vol. 35. Doi: 10.1146/annurev.fluid.35.101101.161114

11. Goldhirsch I., Noskowicz S., Bar-Lev O. Nearly smooth granular gases // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. Doi: 10.1103/PhysRevLett.95.068002

12. Du Y., Li H., Kadanoff L.P. Breakdown of hydrodynamics in a one-dimensional system of inelastic particles // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74. № 8.

13. Sela N., Goldhirsch I. Hydrodynamics of a one-dimensional granular medium // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7 (3). Doi: 10.1063/1.868648

14. Duran J. Sand, Powders and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials // Springer. New-YorkPhys. 1999. Doi: 10.1063/1.868648

15. Aranson I.S., Tsimring L.S. Patterns and collective behavior in granular media: theoretical concepts // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. № 2. Doi: 10.1103/RevModPhys.78.641

16. Eshuis P., van der Weele K., Alam M., Gerner H.J., van der Hoef M., Kuipers H., Luding S. van der Meer D., Lohse D. Buoyancy driven convection in vertically shaken granular matter: experiment, numerics, and theory // Granular Matter. 2013. Vol. 15. Doi: 10.1007/s10035-013-0440-x

17. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск. 1983.

18. Канель Я.И. Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4. № 4.

19. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. 1999. № 114.

20. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным системы уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. 2000. № 116.

21. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. 2010. Vol. 87. № 2.

22. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // Mathematical Notes. 2014. Vol. 96. № 2.

23. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей // Ред. Сиб. мат. журн. СО АН РФ. Новосибирск. 2004. Деп. ВИНИТИ. № 37.

24. Grossman E.L., Zhou T., Ben-Naim E. Towards granular hydrodynamics in two-dimensions // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. № 4.

25. Eshuis P., van der Weele K., van der Meer D., Lohse D. Granular leidenfrost effect: experiment and theory of floating particleclusters // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. Doi: 10.1103/PhysRevLett.95.258001

26. Meerson B., Pöschel T., Bromberg Y. Close-packed floating clusters: granular hydrodynamics beyond the freezing point? // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. № 2. Doi: 10.1103/PhysRevLett.91.024301

27. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.