УДК 530.12:512.81

О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли*

О.П. Хромова[1], *В.В. Балащенко*[2]

[1]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2]Белорусский государственный университет (Минск, Белоруссия)

Symmetric Ricci Flows of Semisymmetric Connections on Three-Dimensional Metrical Lie Groups: An Analysis

O.P. Khromova[1], *V.V. Balashchenko*[2]

[1]Altai State University (Barnaul, Russia)
[2]Belarusian State University (Minsk, Belarus)

Потоки Риччи представляют собой уравнения в частных производных и описывают деформацию (псевдо)римановых метрик на многообразии. Решениями потоков Риччи являются солитоны Риччи, которые представляют собой естественное обобщение метрик Эйнштейна. Изучению потоков Риччи, а также их решений посвящены работы многих математиков. В основном данные исследования предполагали, что рассматриваемые многообразия наделены связностью Леви-Чивиты. В настоящей работе рассматриваются многообразия с полусимметрическими связностями, которые включают в себя связность Леви-Чивиты.

Впервые метрические связности с векторным кручением, или полусимметрические связности, на (псевдо)римановых многообразиях исследовалась в работах Э. Картана. Позднее в работах К. Яно и И. Агриколы изучались тензорные поля и геодезические линии таких связностей. Уравнение Эйнштейна полусимметрических связностей на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях рассматривались в работах П.Н. Клепикова, Е.Д. Родионова и О.П. Хромовой.

Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не симметричен. Поэтому естественным является изучение симметрической и кососимметрической частей тензора Риччи. В настоящей работе исследуются симметрические потоки Риччи на трехмерных группах Ли с левоинваринтной (псевдо)римановой метрикой Дж. Милнора и полусимметрической связностью Э. Картана.

Ключевые слова: симметрические потоки Риччи, группы Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики.

The study of Ricci flows, which describe the deformation of (pseudo) Riemannian metrics on a manifold, and their solutions, Ricci solitons, has garnered much attention from mathematicians. However, previous studies have typically focused on manifolds with Levi-Civita connections. This paper breaks new ground by considering manifolds with semisymmetric connections, which also include the Levi-Civita connection. Metric connections with vector torsion, or semisymmetric connections, were first studied by E. Cartan on (pseudo) Riemannian manifolds. Later, K. Yano and I. Agricola studied tensor fields and geodesic lines of such connections, while P.N. Klepikov, E.D. Rodionov, and O.P. Khromova considered the Einstein equation of semisymmetric connections on three-dimensional locally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds. Because the Ricci tensor of a semisymmetric connection is not symmetric in general, we focus on studying the symmetric and skew-symmetric parts of the Ricci tensor. Specifically, we investigate symmetric Ricci flows on three-dimensional Lie groups with J. Milnor's left-invariant (pseudo) Riemannian metric and E. Cartan's semisymmetric connection.

Key words: Ricci symmetric flows, Lie groups, left-invariant Lorentzian metrics.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-23

* Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 22-21-00111).

Предварительные сведения

Пусть G — группа Ли размерности n с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g. Определим на G полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \qquad (1)$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [1] (см. также [2–6]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

$$Ric(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Определим на G однопараметрическое семейство (псевдо)римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -Ric(g(t)). \qquad (2)$$

Уравнение (2) впервые исследовалось Р.Гамильтоном для связности Леви-Чивиты в [7]. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим. Поэтому естественным является рассмотрение симметрической части тензора Риччи и симметрического потока Риччи вида

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -\mathrm{Sym}(Ric(g(t))). \qquad (3)$$

Обозначим через $\mathfrak{g}$ — алгебру Ли группы Ли G. Фиксируем базис $\{E_1, \dots, E\}$ в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[E_i, E_j] = c^k_{ij}E_k, \quad g(E_i,E_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c^k_{ij}g_{ks},$$

где c^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇.

Тогда символы Кристоффеля связности ∇ определяются формулами

$$\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij}V^k - g_{sj}V^s\delta^k_i,$$

где

$$(\Gamma^g)^s_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$$

есть компоненты связности Леви-Чивита ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ^k_i — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи Ric. В базисе $\{E_1, \dots, E_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + c^l_{ij}\Gamma^p_{lk}\right)g_{ps},$$

$$Ric_{ik} = R_{ijks}g^{js},$$

уравнение симметрического потока Риччи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = -Ric(g(t))_{(ij)}. \qquad (4)$$

Исследуем поведение симметрических потоков Риччи для некоторых классических левоинвариантных (псевдо)римановых метрик на трехмерных группах Ли [8].

Теорема 1. [9] *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, такой что*

$$G = SU(2): \quad [E_1,E_2] = E_3, \quad [E_2,E_3] = E_1, \quad [E_3,E_1] = E_2.$$

$$G = SL(2,R): \quad [E_1,E_2] = E_3, \quad [E_2,E_3] = E_1, \quad [E_3,E_1] = -E_2.$$

$$G = E(2): \quad [E_1,E_2] = E_3, \quad [E_2,E_3] = E_1.$$

$$G = E(1,1): \quad [E_1,E_2] = -E_3, \quad [E_2,E_3] = E_1.$$

$$G = H_3: \quad [E_1,E_2] = E_3$$

$$G = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}: \quad [E_i,E_j] = 0, \quad i,j \in \{1,2,3\}.$$

.

Рассмотрим на G семейство левоинвариантных лоренцевых метрик Дж. Милнора, которые ранее изучались K.Onda в [8]

$$g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$, и форма g знакопеременная. Далее, изучая потоки Риччи, будем предполагать, что метрика $g = g(t)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть (G, ∇) — трехмерная группа Ли с полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты, и $g = A(\theta^1)^2 + B(\theta^2)^2 + C(\theta^3)^2$ — семейство левоинвариантных лоренцевых метрик на G, где $\{\theta^i\}$ — кобазис к базису Дж. Милнора $\{E_i\}$. Тогда на G существуют решения симметрического потока Риччи в классе левоинвариантных лоренцевых метрик Дж. Милнора.*

1. Доказательство основной теоремы. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим последовательно все унимодулярные группы Ли, начиная с $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Используя формулы предыдущего раздела, найдем компоненты тензора Риччи и запишем систему равенств (3) , определяющую симметрический поток Риччи группы $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} 2Bv_2Av_1=0,\\ 2v_1Av_3C=0,\\ 2Bv_2v_3C=0,\\ -2Av_3^2C-2Av_2^2B=-\dfrac{2dA}{dt},\\ -2v_3^2BC-2Bv_1^2A=-\dfrac{2dB}{dt},\\ -2Cv_2^2B-2v_1^2AC=-\dfrac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Очевидно, что данная система разрешима при условии, что две координаты векторного поля, определяющего связность тривиальны. Например, для $V=(0,0,v_3)$ уравнение симметрического потока Риччи примет вид

$$\begin{array}{l} 2Av_3^2C=\dfrac{2dA}{dt},\\ 2v_3^2BC=\dfrac{2dB}{dt},\\ 0=\dfrac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Его общим решением является

$$A(t)=c_1e^{c_3v_3^2t},\ B(t)=c_2e^{c_3v_3^2t},\ C(t)=c_3.$$

Рассмотрим симметрический поток Риччи группы Гейзенберга H_3.

$$\begin{array}{l} 2Bv_2Av_1=0,\\ C\left(v_2+2v_1Av_3\right)=0,\\ C\left(-v_1+2Bv_2v_3\right)=0,\\ -\dfrac{C+2Av_3^2BC+2B^2v_2^2A}{B}=-\dfrac{2dA}{dt},\\ -\dfrac{C+2Av_3^2BC+2A^2v_1^2B}{A}=-\dfrac{2dB}{dt},\\ -\dfrac{C\left(-C+2B^2v_2^2A+2A^2v_1^2B\right)}{AB}=-\dfrac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Нетрудно заметить, что подсистема алгебраических уравнений данной системы имеет решение только при векторном поле $V=(0,0,v_3)$. При этом уравнение симметрического потока Риччи примет вид

$$\begin{array}{l} \dfrac{C+2Av_3^2BC}{B}=\dfrac{2dA}{dt},\\ \dfrac{C+2Av_3^2BC}{A}=\dfrac{2dB}{dt},\\ \dfrac{C^2}{AB}=-\dfrac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Его частным решением является

$$A(t)=-2C(t),\ B(t)=\frac{1}{2(v_3)^2C(t)},$$

$$C(t)=\frac{2}{2c_1-(v_3)^2t}.$$

Запишем симметрический поток Риччи группы $E(2)$.

$$\begin{array}{l} Av_3+2Bv_2Av_1=0,\\ Cv_2-Av_2+2v_1Av_3C=0,\\ -Cv_1+2Bv_2v_3C=0,\\ \frac{-C^2+A^2-2Av_3^2BC^2-2Av_2^2B^2C}{BC}=-\frac{2dA}{dt},\\ -\frac{-2AC+C^2+A^2+2Av_3^2BC^2+2Bv_1^2A^2C}{AC}=-\frac{2dB}{dt},\\ -\frac{A^2-C^2+2Av_2^2B^2C+2Bv_1^2A^2C}{AB}=-\frac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Выделим подсистему из алгебраических уравнений и найдем ее решения

1) $A=A, B=B, C=C, V=(0,0,0)$.
2) $A=C, B=B, C=C, V=(0,v_2,0)$.

Первое решение содержит тривиальное векторное поле V. При этом уравнение симметрического потока Риччи примет вид

$$\begin{array}{l} \frac{A^2-C^2}{BC}=-\frac{2dA}{dt},\\ \frac{A^2-2AC+C^2}{AC}=\frac{2dB}{dt},\\ \frac{A^2-C^2}{AB}=\frac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Решения подобных систем исследовались в [8, 10]. Нетрудно заметить, что частными решениями указанного потока Риччи является

1) $A(t)=C(t)=c_1,\ B(t)=c_2$.
2) $A(t)=c_1,\ B(t)=-2t+c_2,\ C(t)=-A(t)$.

Запишем уравнение симметрического потока Риччи для второго решения алгебраической подсистемы

$$\begin{array}{l} 0=\frac{2dB}{dt},\\ 2Cv_2^2B=\frac{2dC}{dt}. \end{array}$$

Его общее решение имеет вид $B(t)=c_1, A(t)=C(t)=c_2e^{c_1v_2^2t}$.

Аналогичным образом исследуются симметрические потоки Риччи и их решения на остальных трехмерных унимодулярных метрических группах Ли с полусимметрической связностью.

2. Заключение. В работе определены симметричные потоки Риччи на трехмерных группах Ли с левоинваринтной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью. Доказано существование их решений относительно полусимметрических связностей, отличных от связности Леви-Чивиты.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. Vol. 42.

2. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. Vol. 15.

3. Muniraja G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. Vol. 3, No 25. DOI: doi:10.12988/ijcms

4. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 45. DOI: 10.1016/j.difgeo.2016.01.004

5. Klepikov P., Rodionov E., Khromova O., Einstein equation on 3-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion //Mathematical notes of NEFU, 2020. 26(4).

6. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 181. № 3. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-41-53

7. Hamilton R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differential Geom. 1982. Is. 2., Vol. 17

8. Onda K. Ricci Flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds // arXiv:0906.1035. 2010 DOI: 10.48550/arXiv.0906.1035

9. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. Vol. 21.

10. Chow B., Knopf D. The Ricci flow: an introduction // Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.