УДК 511.8

Критерий однородности отображения

И.В. Поликанова

Алтайский государственный педагогический университет
(Барнаул, Россия)

A Criterion for Mapping Homogeneity

I.V. Polikanova

Altai State Pedagogical University (Barnaul, Russia)

Светлой памяти учителя
Славского Виктора Владимировича

Предлагается определение однородного отображения, базирующееся на понятии действия группы. Показывается, как в этих терминах можно описать большинство обобщений понятия «однородная функция», будь то положительная, абсолютная, ограниченная однородности, лямбда-однородность или однородные распределения.

Основной результат. *Пусть некоторая группа действует на множестве задания и на множестве значений отображения, причем на множестве значений — коммутативно. Отображение однородно относительно этих действий тогда и только тогда, когда условие однородности справедливо для порождающего множества этой группы.*

Чаще всего множества задания и множества значений отображений представляют собой векторные пространства, а в качестве действующей группы выступает мультипликативная группа основного поля или ее подгруппы. Поэтому важно знать их порождающие множества. Например, для мультипликативной группы R^+ положительных действительных чисел таковыми являются числовые промежутки, возможно, с исключенными из них нулевыми множествами. Как следствие получаем, что однородность функции, понимаемой традиционно, обеспечивается выполнением условия однородности для произвольного промежутка из R^+. Данный факт ранее был установлен только для дифференцируемых функций с помощью известного тождества Эйлера для однородных функций.

Ключевые слова: однородная функция, положительно однородная функция, абсолютно однородная функция, ограниченно однородная функция, лямбда-однородная функция, однородная обобщенная функция.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-22

The paper proposes a definition of a homogeneous mapping based on the concept of a group action. This definition can be used to describe generalizations of the concept of "homogeneous function," including positive, absolute, limited homogeneity, lambda-homogeneity, and homogeneous distributions. The main result is as follows: if a group acts on the set of assignments and values of the mapping, and acts commutatively on the set of values, then the mapping is homogeneous with respect to these actions if and only if the homogeneity condition is satisfied for the generating set of this group.

In most cases, the assignment sets and value sets of mappings are vector spaces, and the multiplicative group of the main field or its subgroup acts as an acting group. Therefore, it is important to know their generating sets. For example, for the multiplicative group R^+ of positive real numbers, these are numerical intervals, possibly with excluded null sets. Thus, it follows that the homogeneity of a function, understood traditionally, is guaranteed by the fulfillment of the homogeneity condition for any numerical interval from R^+. This fact was previously only established for differentiable functions using the well-known Euler identity for homogeneous functions.

Key words: homogeneous function, positively homogeneous function, absolutely homogeneous function, boundedly homogeneous function, lambda-homogeneous function, homogeneous generalized function.

Введение

Однородные функции встречаются во многих разделах математики. О приложениях однородных функций в физике и экономике можно ознакомиться в [1]. Фундаментальным положением теории однородных функций служит критерий положительной однородности функции, гласящий, что функция $f : R^k \to R$ положительно однородна степени $q \in R$ тогда и только тогда, когда выполняется тождество Эйлера [2]:

$$\sum_{i=1}^{k} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = qf(x).$$

Данный факт получил дальнейшие обобщения и приложения в [1, 3 - 6]. С помощью тождества Эйлера устанавливается другой критерий положительной однородности: дифференцируемая функция положительно-однородна тогда и только тогда, когда для нее условие однородности выполнено на любом числовом интервале (a, b), состоящем из положительных чисел (в [7] приведено доказательство). В статье выявляется групповая основа данного факта, что позволяет обобщить его на большинство из известных вариаций понятия однородности. Дифференцируемость функции оказывается ни при чем.

1. Однородное отображение

Введем обозначения для множеств чисел: N — натуральных, Z — целых, R — действительных, R^+ — положительных действительных, C — комплексных, $R^* = R \setminus \{0\}$, $C^* = C \setminus \{0\}$. Здесь R^*, R^+, C^* рассматриваются как мультипликативные группы относительно операции умножения, знак которого будем опускать на письме. R^k — k-ая декартова степень множества R.

Приведем известные понятия однородности, озаглавив их как в [7]. Ниже X — векторное пространство (чаще всего R^k или конус в нем с вершиной в нуле), число q целое, а иногда действительное или даже комплексное.

1. *Традиционные.*

Функция $f : X \to R$ *однородна*, если для всех $t \in R^*$ выполнено *условие однородности*

$$\forall x \in X \quad f(tx) = tf(x), \tag{1}$$

и *однородна порядка* q, если

$$\forall x \in X \quad f(tx) = t^q f(x). \tag{2}$$

Говорят о

a) *положительной однородности* (порядка q), если условие (2) выполнено для всех $t \in R^+$;

b) *ограниченной однородности*, если условие (2) выполнено для всех $t \in A$, где A подгруппа группы R^*;

c) *абсолютной однородности*, если условие однородности имеет вид:

$$\forall x \in X \quad f(tx) = |t|^q f(x). \tag{3}$$

2. *Альтернативное.*

Функция $f : X \to R$, $f \neq 0$ *однородна*, если существует функция $g : R \to R$ из некоторого класса функций такая, что для всех $t \in R^*$

$$\forall x \in X \quad f(tx) = g(t)f(x). \tag{4}$$

3. *Лямбда-однородность.* [8]

Функция $f : X \to R$ называется λ-*однородной порядка* q для набора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, если для всех $t \in R^*$ и всех $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in X$

$$f(t^{\lambda_1}x_1, t^{\lambda_2}x_2, ..., t^{\lambda_k}x_k) = t^q f(x_1, x_2, ..., x_k). \tag{5}$$

4. *Обобщенно-однородные функции* [9].

Обобщенно-однородная функция порядка q это линейный непрерывный функционал T, определенный на пространстве S «достаточно хороших» функций, удовлетворяющий условию:

$$T[\varphi(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, ..., \frac{x_k}{t})] = t^{q+k}T[\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)]. \tag{6}$$

Определение 1. Говорят, что мультипликативная *группа* G *действует* на множестве X, если задано отображение $\theta : G \times X \to X$ такое, что в обозначениях $\theta(g, x) = g * x$ справедливо:

1) $(gh) * x = g * (h * x)$,

2) $e * x = x$, где e — единица группы G.

Приведем теперь понятие однородного отображения [10].

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ назовем *однородным порядка* q *относительно действий группы* G на множествах X и Y, обозначаемых соответственно $\circ$ и $*$, если для всех $t \in G$

$$\forall x \in X \quad f(t \circ x) = t^q * f(x). \tag{7}$$

Заметим, что элемент t^q определен для $q \in Z$, в случае $G = R^*$ для $q \in R$, и $q \in C$ для $G = C^*$.

Покажем, как задать действия групп, чтобы рассмотренные выше понятия однородности можно было подвести под определение 2.

1. В традиционных определениях полагаем $X = R^k$, $Y = R$, $G = R^*$ или ее подгруппы R^+ в a) или A в b) (например, $A = \{e^{ma} | \ m \in Z\}$ для $a \in R$), действия группы G есть умножения на действительное число – соответственно вектора в X и действительного числа в Y. Факт, что умножение вектора на число является действием, тривиален.

2. Если функция f «альтернативно» однородна, то X, Y, G имеют тот же смысл, что и ранее, действие $\circ$ группы G на X понимается как умножение на действительное число, а действие $*$ определим формулой: $t * y = g(t)y$. Проверим, что данная формула действительно задает действие. Из формулы (4) для всех $t, h \in R^*$ и всех $x \in X$ имеем: $g(th)f(x) = f(thx) = f(t(hx)) = g(t)f(hx) = g(t)g(h)f(x)$. Для $f \neq 0$, найдется

$x \in X$, для которого $f(x) \neq 0$. Поделив равенство $g(th)f(x) = g(t)g(h)f(x)$ на это значение, получим: $g(th) = g(t)g(h)$ для всех $t, h \in R^*$. При $t = h = 1$ получаем $g(1) = g(1)^2$. Но $g(1) \neq 0$, так как иначе условие (4) привело бы к противоречию с данностью $f \neq 0$. Значит, $g(1) = 1$. Тогда $(th) * y = g(th)y = g(t)g(h)y = g(t)(g(h)y) = t * (h * y)$ и $1 * y = g(1)y = y$. Итак, оба требования определения 1 выполнены, а условие (4) можно записать в виде:

$$\forall x \in X \quad f(t \circ x) = t * f(x).$$

Итог: «альтернативная» однородность представляет собой однородность 1-го порядка относительно указанных действий группы R^*.

Абсолютная однородность может рассматриваться как альтернативная при $g(t) = |t|^q$, так как для функции $|t|^q$ условия $g(th) = g(t)g(h)$ и $g(1) = 1$ выполнены.

3. Для λ-однородной функции f множества X, Y определены, как в случае 1. Формулы

$$t \circ (x_1, x_2, ..., x_k) = (t^{\lambda_1} x_1, t^{\lambda_2} x_2, ..., t^{\lambda_k} x_k), \; t * y = ty,$$

как нетрудно убедиться, задают действия группы $G = R^*$ на них. Тогда формула (5) может быть переписана так: $f(t \circ x) = t^q * f(x)$, что означает однородность функции f того же порядка q относительно указанных действий группы R^*.

4. Для обобщенно-однородной функции T порядка q полагаем: $X = S$, $Y = R$. Действие группы R^* на Y определим как обычное умножение действительных чисел. Покажем, что формула

$$t \circ \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{t} x\right), \text{ где } x = (x_1, x_2, ..., x_k),$$

определяет действие на X. Действительно,

$$t \circ (h \circ \varphi(x)) = t \circ \varphi\left(\frac{1}{h} x\right) = \varphi\left(\frac{1}{t}\left(\frac{1}{h} x\right)\right) =$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{th} x\right) = th \circ \varphi(x). \Rightarrow t \circ (h \circ \varphi(x)) = th \circ \varphi(x).$$

$$1 \circ \varphi(x) = \varphi(x).$$

И формула (6) может быть записана в виде:

$$T[t \circ \varphi] = t^{q+k} * T[\varphi].$$

Поэтому обобщенно-однородная функция порядка q является однородной порядка $q + k$ относительно указанных действий групп.

Примером однородного отображения, не являющегося функцией, служит линейное отображение одного векторного пространства в другое, где действия группы R^* определяются как умножение действительного числа на вектор, в частности, линейный оператор взятия производной.

2. Критерий однородности

Будем говорить, что *группа G действует на множестве Y коммутативно*, если для любых $g, h \in G$, $y \in Y$ справедливо: $(gh) * y = (hg) * y$ [10].

Очевидно, что коммутативная группа всегда определяет коммутативное действие. Однако некоммутативная группа также может определять коммутативные действия. Например, полная линейная группа GL_k преобразований k-мерного векторного пространства V^k допускает 2 вида действий на R^*: для матрицы $A \in GL_k$, $q \in R$,

$$A *_q t = |\det A|^q \, t,$$

$$A \circ_q t = \delta_A \, |\det A|^q \, t,$$

$\delta_A = 1$ при $\det A > 0$, и $\delta_A = -1$ при $\det A < 0$.

Очевидно, эти действия коммутативны, хотя группа GL_k некоммутативна.

Предложение 1. Если группа G действует на множестве Y коммутативно, то

$$(gh)^n * y = (g^n h^n) * y$$

для любых $g, h \in G$, $y \in Y$, $n \in Z$.

Доказательство. Докажем утверждение методом математической индукции. Случай $n \in N$. При $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для степени $n - 1$, где $n > 1$, т. е.

$$(gh)^{n-1} * y = (g^{n-1} h^{n-1}) * y$$

для любых $g, h \in G$, $y \in Y$. Принимая во внимание коммутативность действия группы G на Y, получим:

$$\begin{gathered}(gh)^n * y = [(gh)^{n-1} gh] * y = \\ = (gh)^{n-1} * [(gh) * y] = (gh)^{n-1} * [(hg) * y] = \\ = (g^{n-1} h^{n-1}) * [(hg) * y] = [(g^{n-1} h^{n-1})(hg)] * y = \\ = [(g^{n-1} h^n) g] * y = [g(g^{n-1} h^n)] * y = (g^n h^n) * y.\end{gathered}$$

Таким образом, формула верна и для степени n, а значит, для всех $n \in N$. Докажем равенство

$$(gh)^{-n} * y = (g^{-n} h^{-n}) * y$$

для всех натуральных n и нуля. При $n = 0$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для степени $n - 1$, где $n > 0$, т. е.

$$(gh)^{1-n} * y = (g^{1-n} h^{1-n}) * y$$

для любых $g, h \in G$, $y \in Y$. В силу коммутативности действия группы G на Y имеем:

$$\begin{gathered}(gh)^{-n} * y = [(gh)^{1-n} (gh)^{-1}] * y = \\ = (gh)^{1-n} * [(gh)^{-1} * y] = (g^{1-n} h^{1-n}) * [(gh)^{-1} * y] = \\ = [g^{1-n} h^{1-n} (gh)^{-1}] * y = (g^{1-n} h^{1-n} h^{-1} g^{-1}) * y = \\ = [(g^{1-n} h^{-n}) g^{-1}] * y = [g^{-1} (g^{1-n} h^{-n})] * y = \\ = (g^{-n} h^{-n}) * y.\end{gathered}$$

Формула верна и для $n \in N$. Предложение доказано полностью.

Предложение 2. Если группа G действует на множестве Y коммутативно, то для всякого $n \in Z$ формула
$$g *_n y = g^n * y \tag{8}$$
также определяет действие на Y.

Доказательство. Проверим выполнение условий 1), 2) определения 1:
$$g *_n (h *_n y) = g^n * (h^n * y) = (g^n h^n) * y =$$
$$= (gh)^n * y = (gh) *_n y,$$
$$e *_n x = e^n * x = e * x = x.$$
Доказательство основано на предложении 1.

Замечание 1. Из предложения 2 следует, что однородность отображения любого порядка в случае коммутативного действия группы на множестве значений Y всегда можно рассматривать как просто однородность (1-го порядка), определяемую формулой (1), переопределив действие на Y.

Для отображения $f : X \to Y$ и группы G, действующей на множествах X и Y, определим *множества однородности порядка* q
$$G_f^q = \{t \in G |\ (\forall x \in X)(f(t \circ x) = t^q * f(x))\},$$
где $q \in Z$, либо $q \in R$ в случае $G = R^*$, либо $q \in C$ в случае $G = C^*$. Заметим, что они не пусты для всех f и q, поскольку единица группы $e \in G_f^q$. Тогда определение однородности порядка q отображения f относительно действий группы G на множествах X и Y принимает вид:
$$G_f^q = G.$$

Лемма. Если $t \in G_f^q$, то для всех $m \in Z$ справедливо: $t^m \in G_f^q$.

Доказательство. Случай $m = 0$ тривиален. Для $m \in N$ доказывается индукцией. При $m = 1$ утверждение выполнено в силу условия: $t \in G_f^q$. При индукционном предположении: $t^{m-1} \in G_f^q$, означающем, что
$$\forall x \in X \quad (f(t^{m-1} \circ x) = (t^{m-1})^q * f(x),$$
получим: $\quad f(t^m \circ x) = f(t \circ (t^{m-1} \circ x)) =$
$$= t^q * f(t^{m-1} \circ x) = t^q * ((t^{m-1})^q * f(x)) =$$
$$= (t^q (t^{m-1})^q) * f(x) = (t^m)^q * f(x).$$
Это означает: $t^m \in G_f^q$.

Равенство $f(t^m \circ x) = (t^m)^q * f(x)$ по доказанному выполняется для всех $x \in X$ и $m \in N$. Поэтому оно будет выполняться и для $t^{-m} \circ x \in X$, т. е. $f(t^m \circ (t^{-m} \circ x)) = (t^m)^q * f(t^{-m} \circ x)$. Но $t^m \circ (t^{-m} \circ x) = (t^m t^{-m}) \circ x = e \circ x = x$, откуда следует:
$$f(x) = (t^m)^q * f(t^{-m} * x).$$
Тогда
$$(t^{-m})^q * f(x) = (t^{-m})^q * ((t^m)^q * f(t^{-m} * x)) =$$
$$= ((t^{-m})^q (t^m)^q) * f(t^{-m} * x)) = e * f(t^{-m} * x) =$$
$$= f(t^{-m} * x).$$
Показали: $f(t^{-m} * x) = (t^{-m})^q * f(x)$, где $m \in N$. Утверждение доказано для всех $m \in Z$.

Теорема 1. Если группа G действует на Y коммутативно, то G_f^q — ее подгруппа.

Доказательство. Заметим, что $G_f^q \subset G$. В силу леммы, если $t \in G_f^q$, то и $t^{-1} \in G_f^q$. Кроме того, если $t, h \in G_f^q$, то для всех $x \in X$ по предложению 1 справедливо
$$f((th) \circ x) = f(t \circ (h \circ x)) = (t)^q * f(h \circ x) =$$
$$= (t)^q * ((h)^q * f(x)) = (t^q h^q) * f(x) = (th)^q * f(x),$$
т. е. $th \in G_f^q$. Значит, G_f^q — подгруппа группы G.

Порождающим множеством мультипликативной группы G называется такое его подмножество $Q \subset M$, что всякий элемент $t \in G$ представим в виде $t = p_1 p_2 \dots p_l$; где $p_1, p_2 \dots p_l \in Q$.

Следовательно, $G_f^q = G$, если подгруппа G_f^q содержит какое-нибудь порождающее множество группы G. Иначе это можно сформулировать так.

Теорема 2. (Критерий однородности отображения.) Пусть группа G действует на множествах X и Y, причем на Y она действует коммутативно. Отображение $f : X \to Y$ является однородным порядка q относительно действий группы G на множествах X и Y тогда и только тогда, когда условие (7) выполнено для всех t из множества, порождающего группу G.

3. Порождающие множества

Обратим внимание, что для всех рассмотренных выше однородных отображений действующей группой выступает группа R^* или ее подруппы. Они коммутативны, а, значит, определяют коммутативные действия на множестве значений отображения, и теорема 2 к ним применима. В связи с этим интерес представляют порождающие множества группы R^*. Очевидно, если $M \subset R^+$ порождает группу R^+, то множество $M \cup \{-1\}$ порождает группу R^*. Поэтому достаточно найти порождающие множества группы R^+.

Теорема 3. Пусть $(a, b) \subset R^+$ и $\gamma \in (a, b)$ — произвольное число. Тогда для любого $t \in R^+$ найдутся числа $n \in N$ и $x \in (a, b)$ такие, что
$$t = x^n \gamma^{-n}. \tag{9}$$

Доказательство. Число $x = \gamma t^{\frac{1}{n}} \in (a, b)$ при достаточно больших $n \in N$, поскольку $\gamma \in (a, b)$, а $t^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$.

Следствие 1. Всякий промежуток $(a, b) \subset R^+$ порождает мультипликативную группу R^+.

Следствие 2. Всякое положительное алгебраическое число представимо в виде произведения не более чем двух целых степеней трансцендентных чисел из заданного промежутка $(a, b) \subset R^+$.

Доказательство. Действительно, если в теореме 4 положить число γ трансцендентным, то для заданного алгебраического числа $t \in R^+$ число x, удовлетворяющее равенству (5), может быть только трансцендентным.

Ранее автором было установлено [11], что всякое трансцендентное положительное число представимо в виде произведения не более чем двух целых степеней трансцендентных чисел из заданного промежутка. Данный факт совокупно со следствием 2 влечет следующее утверждение.

Теорема 4. Всякое действительное положительное число представимо в виде произведения не более чем двух целых степеней трансцендентных чисел из заданного промежутка $(a, b) \subset R^+$.

Теорема 4 улучшает результат, полученный автором ранее в [11], утверждавший возможность представления всякого действительного положительного числа в виде произведения не более четырех целых степеней трансцендентных чисел из заданного интервала.

Следствие 3. Множество трансцендентных чисел произвольного числового интервала $(a, b) \subset R^+$ порождает мультипликативную группу R^+.

Теорема 5. Пусть P — нулевое подмножество (т.е. имеющее σ-аддитивную меру нуль) интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}^+$ найдутся числа $y, \gamma \in (a, b) \setminus P$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $t = y^n \gamma^{-n}$.

Доказательство. Пусть P — нулевое подмножество интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$, t — произвольное число из R^+. Тогда множество

$$S_t = \left\{ pt^{-\frac{1}{n}} \,|\, p \in P, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

также нулевое, будучи счетным объединением нулевых множеств $\left\{ pt^{-\frac{1}{n}} \,|\, p \in P \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Также нулевым будет и множество $P \cup S_t$. Поэтому в множестве $(a, b) \setminus (P \cup S_t)$ найдется число γ. Тогда числа $y_n = \gamma t^{\frac{1}{n}} \notin P$ ни при каком $n \in \mathbb{N}$, так как иначе число γ принадлежало бы множеству S_t в противоречии с его выбором. Поскольку $\gamma \in (a, b)$, а $t^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$, то $y_n \in (a, b)$ при достаточно больших натуральных n и при таких n число t представимо в виде: $t = y_n^n \gamma^{-n}$, где $y_n, \gamma \in (a, b) \setminus P$.

Из этой теоремы следствие 3 выводится путем исключения из (a, b) счетного множества алгебраических чисел. А на основании критерия однородности получаем:

Теорема 6. Отображение однородно относительно действий группы R^+ тогда и только тогда, когда условие однородности (7) выполнено на произвольном числовом интервале $(a, b) \subset R^+$ с исключенным из него нулевым множеством, в частности, на множестве трансцендентных чисел произвольного числового интервала $(a, b) \subset R^+$.

Заключение

Установлен критерий однородности отображения относительно действий групп вообще и действия группы R^* в частности. Последний обобщает результат о положительной однородности дифференцируемых функций, сформулированный во введении. Обобщение достигается как за счет расширения класса однородных отображений, охватывающих, как показано в статье, большинство известных вариаций понятия однородности, так и за счет «уменьшения» порождающего множества действующей группы, обеспечивающего однородность «в целом». Непосредственная проверка условия однородности на всем множестве однородности для известных нам действующих групп не отличается от проверки однородности на его подмножестве. Поэтому значение критерия заключается, скорее всего, в выявлении групповой основы понятия однородности.

Библиографический список

1. Elghibi M., Othman H.A., A.-H.A. Al-Noshri. Homogeneous functions: New characterizations and applications // Transactions of a. Razmadze Mathematical Institute 171. 2017.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М., 2009. Т. 1.

3. Shah V., Sharma J. Extension of Euler's Theorem of homogeneous functions for finite variables and higher derivatives // Int J Eng Innovative Technol. 2014. Vol. 4. № 1.

4. Hiwarekar A.P. Extension of Euler's Theorem of homogeneous functions to higher derivatives // Bull Marathwada Math. Soc. 2009. Vol. 10. № 1.

5. Martinez F., Martinez-Vidal I., Paredes S., Wiley. Conformable Euler's Theorem of homogeneous functions // A Comp and Math Methods. 2019. 1:e 1048. https://doi.org/10.1002/cmm4.1048.

6. Adewumi M. Homogeneous Functions, Eulers Theorem and Partial Molar Quantities // сайт Pen State College of Earth and Mineral Sciences. https://www.e-education.psu.edu/png520/search/node/homogeneous. (дата обращения: 17.11.2022)

7. Однородная функция // Wikipedia.org: универсальная интернет-энциклопедия со свободным контентом,

русскоязычный раздел, 2001. https://ru.wikipedia.org/wiki/Однородная функция (дата обращения: 17.11.2022).

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика : учебник для вузов : в 3 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление М., 2004.

9. Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Однородные функции и их приложения // УМН. 1955. Т. 10. Вып. 3 (65).

10. Поликанова И.В. Отображения, однородные относительно действия групп // Вестник АлтГПА. Серия: Ест. и точн. науки. 2014. № 20.

11. Поликанова И.В. Некоторые критерии однородности функции // Вестник БГПУ. Серия: Ест. и точн. науки. 2008. № 8.