

## Влияние гравитации на характер течения в системе жидкость — газ с учетом массопереноса\*

Е.Е. Макаров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

<sup>2</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, Россия)

## Gravity's Impact on Flow Patterns in Liquid-Gas Systems with Mass Transfer Considerations

E.E. Makarov

Altai State University (Barnaul, Russia)

Institute of Computational Modelling SB RAS (Krasnoyarsk, Russia)

Изучаются стационарные двухслойные конвективные течения жидкости и спутного потока газа в наклонном канале с учетом тепло- и массопереноса на термокапиллярной границе раздела, остающейся недеформируемой. Математическое моделирование проводится на основе точных решений специального вида Остроумова — Бириха уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска, записанных с учетом взаимобратных эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности в газопаровом слое. Пар в газе полагается пассивной примесью и не влияет на свойства газа. Рассмотрен случай, когда функция концентрации пара удовлетворяет условию отсутствия потока на верхней стенке канала. <<HFE-7100-азот>> выбрана в качестве рабочей системы жидкость — газ, для которой приведены примеры профилей скорости, распределения температуры и концентрации пара в верхнем слое. Изучено влияние гравитационного воздействия на характер течения и величину массовой скорости испарения. Результаты представлены в случае, когда выполнено условие замкнутости потока жидкости, при отрицательном значении параметра, определяющего продольный градиент температуры, и при заданной величине расхода газа.

**Ключевые слова:** двухслойное течение, термокапиллярная граница раздела, конвекция, массоперенос, наклонный канал, гравитация.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-21

### Введение

Конвективные течения жидкости и спутного потока газа с учетом тепломассопереноса через границу раздела играют немаловажную роль во многих природных и промышленных системах. Также следует обратить внимание, что взаимобратные эффекты термодиффузии и диффузионной тепло-

This paper investigates bilayer flows of liquid and co-current gas in an inclined channel with considerations for heat and mass transfer at the thermocapillary interface, which remains undeformable. The mathematical modeling is based on exact solutions of the special Ostroumov — Birikh type of Navier — Stokes equations in the Oberbek — Boussinesq approximation, accounting for the effect of thermodiffusion and diffusive thermal conductivity effect in the gas-vapor layer. Vapor in the gas is assumed to be a passive admixture that does not affect the properties of the gas. The paper considers the case with the vapor concentration function satisfying the condition of zero vapor flux on the upper wall of the channel. The working system chosen for this study is <<HFE-7100-nitrogen>>, for which the paper provides examples of velocity profiles, temperature, and vapor concentration distribution in the upper layer. The study analyzes the effect of gravitational influence on the flow pattern and the value of the mass flow rate. The paper presents results for cases when the condition of closed liquid flow is fulfilled, at a negative value of the parameter determining the longitudinal temperature gradient, and at a given value of the gas flow rate.

**Key words:** bilayer system, thermocapillary interface, convection, mass transfer, inclined channel, gravitation.

проводности оказывают существенное влияние на течение жидкости [1]. Такие задачи представляют математический интерес, поскольку процессы конвективного тепломассопереноса достаточно сложны для изучения.

Одним из усложняющих построение решения факторов является наличие произвольно ориен-

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>.

тированного вектора ускорения силы тяжести [2]. В [3] представлен вариант решения для задачи о стекании жидкости в наклонном канале с движущимися твердыми границами при заданном продольном градиенте температуры. Математическому моделированию течения в системе жидкость — газ в наклонном слое посвящена работа [4], где было изучено влияние величины угла наклона канала и температурного режима на структуру течения в системе «этанол — азот».

В настоящей работе изучается влияние гравитации на характеристики течения в наклонном канале, заполненном жидкостью и газопаровой смесью, в предположении о недеформируемой термокапиллярной границе раздела [5]. В верхнем слое учитываются эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности. В качестве условия для функции концентрации пара на верхней стенке канала выбрано условие отсутствия потока пара. В качестве рабочей системы жидкость—газ изучается система «HFE-7100 — азот».

### 1. Постановка задачи о двуслойном течении в наклонном канале с учетом испарения и вид точного решения

Пусть вязкая несжимаемая жидкость и смесь газа и пара заполняют бесконечный наклонный канал с заданными толщинами слоев  $l$  и  $h$  (см. рис. 1). Стенки канала являются твердыми непроницаемыми границами. Система координат выбрана таким образом, что недеформируемая граница раздела задается уравнением  $y = 0$  и совпадает с осью абсцисс  $Ox$ ; вектор силы тяжести  $\mathbf{g}$  направлен под углом  $\varphi$  к подложке ( $\mathbf{g} = (g \cos \varphi, -g \sin \varphi)$ ). В качестве математической модели течений используется система уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска. Функция концентрации пара в верхнем слое удовлетворяет уравнению диффузии. Определяющая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g \cos \varphi (\beta T + \gamma C), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \sin \varphi (\beta T + \gamma C), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \right), \\ u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} &= D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат,  $T$  — функция температуры,  $C$  — функция концентрации пара в газе,  $p'$  — модифицированное давление или отклонение от гидростатического давления ( $p' = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $p$  — давление),  $\rho$  — относительное значение плотности,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\beta$  —

коэффициент теплового расширения,  $\gamma$  — концентрационный коэффициент плотности,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $D$  — коэффициент диффузии пара в газе,  $\alpha$  и  $\delta$  характеризуют эффекты Соре и Дюфура соответственно. Подчеркнутые слагаемые в первых двух уравнениях системы (1), а также последнее уравнение в (1) учитываются только при моделировании в верхнем слое системы жидкость — газ.

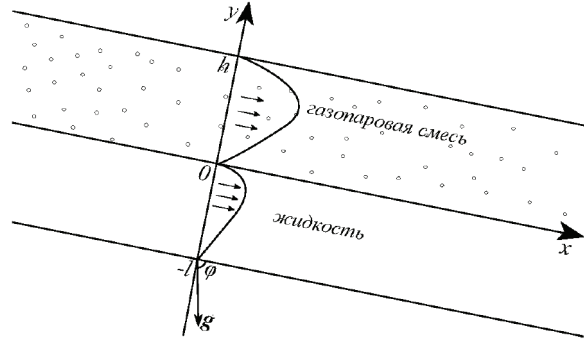


Рис. 1. Геометрия области течения

Пусть решение  $u_i, v_i, p'_i, T_i, C$  системы уравнений (1) имеет специальный вид ([6,7], а также [8]):

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(y), \quad v_i = 0, \quad T_i = Ax + \vartheta_i(y), \\ C &= -Bx + \psi(y), \quad p'_i = p'_i(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A, B$  параметры, определяющие продольные градиенты температуры и концентрации пара,  $\vartheta_i, \psi$  — функции, подлежащие определению. Функции, отмеченные индексом  $i$  ( $i = 1, 2$ ), при  $i = 1$  характеризуют жидкий слой и слой смеси газа и пара при  $i = 2$ .

Вид функций  $u_i(y), \vartheta_i(y)$  и  $\psi(y)$  зависит от знака продольного градиента температуры  $A$  (см. [4]). При отрицательном значении этого параметра решение обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций может быть представлено в виде следующих аналитических выражений [9]:

$$\begin{aligned} u_1(y) &= C_1 \sin(ky) \operatorname{sh}(ky) + C_2 \cos(ky) \operatorname{sh}(ky) + \\ &+ C_3 \sin(ky) \operatorname{ch}(ky) + C_4 \cos(ky) \operatorname{ch}(ky), \\ u_2(y) &= \bar{C}_1 \sin(my) + \bar{C}_2 \cos(my) + \\ &+ \bar{C}_3 \operatorname{sh}(my) + \bar{C}_4 \operatorname{ch}(my), \\ T_1(x, y) &= Ax + \frac{F_1}{2k^2} \left( -C_1 \cos(ky) \operatorname{ch}(ky) + C_2 \sin(ky) \operatorname{ch}(ky) - \right. \\ &\left. - C_3 \cos(ky) \operatorname{sh}(ky) + C_4 \sin(ky) \operatorname{sh}(ky) \right) + C_5 y + C_6, \\ T_2(x, y) &= Ax + \frac{F_2}{m^2} \left( -\bar{C}_1 \sin(my) - \bar{C}_2 \cos(my) + \bar{C}_3 \operatorname{sh}(my) + \right. \\ &\left. + \bar{C}_4 \operatorname{ch}(my) \right) + \bar{C}_5 y + \bar{C}_6, \\ C(x, y) &= -Bx + \frac{G}{m^2} \left( -\bar{C}_1 \sin(my) - \bar{C}_2 \cos(my) + \bar{C}_3 \operatorname{sh}(my) + \right. \\ &\left. + \bar{C}_4 \operatorname{ch}(my) \right) + \bar{C}_7 y + \bar{C}_8. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты  $k, m, F_1, F_2, G$  рассчитываются через физико-химические и геометрические параметры задачи  $A, g, \varphi, \beta_i, \chi_i, \nu_i, D, \delta, \alpha, C_*, \varepsilon, \gamma$ . Константы интегрирования  $C_j$  и  $\bar{C}_j$  ( $j = 1, \dots, 8$ ), входящие в соотношения (3), удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, являющейся следствием граничных условий, сформулированных в пункте 2 (см. [4]). Для замыкания системы уравнений полагаются равными нулю константы  $C_6$  и  $\bar{C}_6$ , входящие в определение функций  $\vartheta_i$ .

Функции давления  $p'_i$  восстанавливаются по своим частным производным на основе первых двух уравнений системы (1).

## 2. Граничные условия

Пусть на твердых стенках канала (см. рис. 1) выполняются условия прилипания для скорости:

$$u_1|_{y=-l} = 0, \quad u_2|_{y=h} = 0, \quad (4)$$

и задано линейное относительно продольной координаты распределение температуры:

$$T_1|_{y=-l} = Ax + \vartheta^-, \quad T_2|_{y=h} = Ax + \vartheta^+. \quad (5)$$

Здесь параметры  $\vartheta^-$  и  $\vartheta^+$  считаются известными.

Рассмотрим случай, когда на верхней границе  $y = h$  функция концентрации пара  $C$  удовлетворяет условию нулевого потока:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial y} + \alpha \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=h} = 0. \quad (6)$$

На термокапиллярной границе раздела  $y = 0$ , являющейся недеформируемой, должны выполняться условия непрерывности скорости и температуры:

$$u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0}, \quad T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}. \quad (7)$$

Также на границе раздела требуется выполнение кинематического и динамического условий. Первое выполняется автоматически ( $v_1 = v_2 = 0$ ) в силу вида точного решения (2).

Динамическое условие, определяющее баланс касательных напряжений, имеет следующий вид:

$$\rho_1 \nu_1 u_{1y} = \rho_2 \nu_2 u_{2y} + \sigma_T \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad (8)$$

где  $\sigma_T$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Предполагается линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры:  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0)$ ,  $\sigma_0$  — поверхностное натяжение при некоторой начальной температуре  $T_0$ ,  $\sigma_T = const$ ,  $\sigma_T < 0$ .

Условие переноса тепла на границе раздела с учетом диффузионного потока массы  $M$  и эффекта Дюфура имеет вид [10]:

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \delta \kappa_2 \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\lambda M,$$

$$M = -D\rho_2 \left( \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} + \alpha \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0} \right). \quad (9)$$

Здесь:  $\lambda$  — скрытая теплота испарения,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — коэффициенты теплопроводности,  $M$  — массовая скорость испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени жидкости ( $M = const$ ). Положительные и отрицательные значения  $M$  соответствуют процессам испарения и конденсации соответственно.

Концентрация насыщенного пара на границе раздела будет определяться по следующей формуле [11]:

$$C|_{y=0} = C_*(1 + \varepsilon(T_2|_{y=0} - T_0)), \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, зависящий от характерной температуры и физико-химических свойств среды,  $C_*$  — концентрация насыщенного пара при некоторой начальной температуре  $T_0$ .

В верхнем слое полагается заданным расход газа  $Q$ , в жидком слое задача решается в условиях замкнутости потока. Эти предположения записываются в виде следующих выражений:

$$Q = \int_0^h \rho_2 u_2(y) dy, \quad \int_{-l}^0 u_1(y) dy = 0. \quad (11)$$

## 3. Примеры течений

Рассмотрим в качестве жидкости, заполняющей нижний слой, НФЕ-7100. Жидкость НФЕ-7100 — сегрегированный гидрофторэфир, имеющий широкое применение в промышленности в системах термостабилизации и охлаждения. Пусть этанол — газ, находящийся в верхнем слое. Физико-химические параметры рабочих сред приведены в порядке {НФЕ-7100, азот} (или только НФЕ-7100) согласно [12, 13]:  $\rho = \{1.5 \cdot 10^3, 1.2\}$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = \{0.38 \cdot 10^{-6}, 0.15 \cdot 10^{-4}\}$  м<sup>2</sup>/с;  $\beta = \{1.8 \cdot 10^{-3}, 3.67 \cdot 10^{-3}\}$  К<sup>-1</sup>;  $\chi = \{0.4 \cdot 10^{-7}, 0.3 \cdot 10^{-4}\}$  м<sup>2</sup>/с;  $\kappa = \{0.07, 0.02717\}$  Вт/(м·К);  $\sigma_T = \{-0.15 \cdot 10^{-2}\}$  Н/(м·К);  $D = \{0.07 \cdot 10^{-4}\}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = \{1.11 \cdot 10^5\}$  Вт·с/кг;  $C_* = \{0.45\}$  (соответствует равновесной температуре  $T_0 = 293.15$  К);  $\gamma = \{-0.5\}$ ;  $\varepsilon = \{0.04\}$ . Толщины жидкого и газопарового слоев полагаются равными  $5 \cdot 10^{-3}$  м, величина угла  $\varphi$  задана и имеет значение  $70^\circ$ , значение расхода газа в верхнем слое системы равно  $3.6 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с). Коэффициенты Сорэ и Дюфура принимаются равными  $10^{-4}$  К<sup>-1</sup> и  $10^{-4}$  К соответственно. Параметрами, определяющими внешнее тепловое воздействие на канал, являются продольный градиент температуры  $A$  и значение  $\vartheta^-$  или  $\vartheta^+$  (см. (5)). Величины  $\vartheta^-$  и  $\vartheta^+$  полагаются заданными и равными  $\vartheta^- = 298.15$  К и  $\vartheta^+ = 273.15$  К.

Рассмотрим влияние гравитации на структуру течения и интенсивность испарения в условиях нормальной гравитации ( $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>). На рисунке 2 представлены профили скорости ( $u, v$ ),

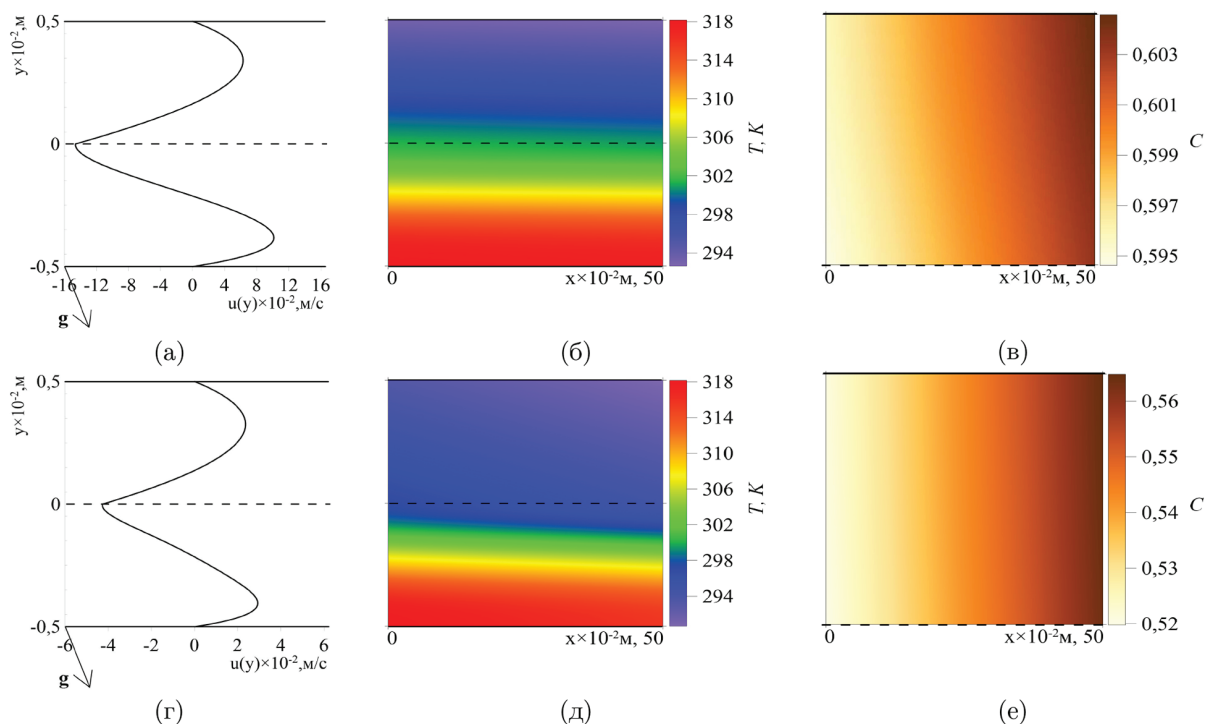


Рис. 2. Профили скорости (а, г), распределение температуры (б, д) и концентрации пара (в, е) в системе «HFCE-7100 – азот»:  $\varphi = 70^\circ$ ,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ , (а,б,в) –  $A = -1 \text{ К/м}$ ,  $M = -0.632 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , (г,д,е) –  $A = -5 \text{ К/м}$ ,  $M = -3.159 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$

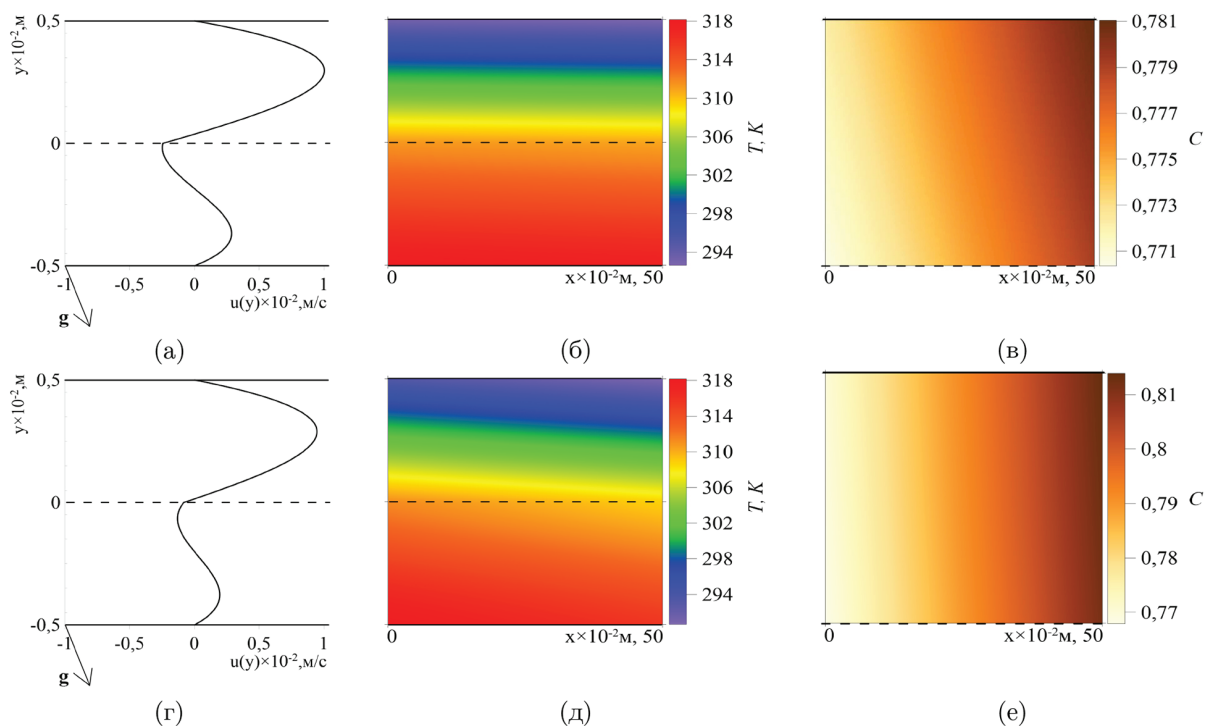


Рис. 3. Профили скорости (а, г), распределение температуры (б, д) и концентрации пара (в, е) в системе «HFCE-7100 – азот»:  $\varphi = 70^\circ$ ,  $g = 9.81 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ , (а,б,в) –  $A = -1 \text{ К/м}$ ,  $M = -0.632 \cdot 10^{-7} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , (г,д,е) –  $A = -5 \text{ К/м}$ ,  $M = -3.159 \cdot 10^{-7} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$

распределение температуры (б, д) и концентрации пара (в, е) в случае отрицательного значения градиента температуры  $A$ , что соответствует отнесению нагревателя вверх по каналу. Интенсивность течения, в том числе возвратного вблизи грани-

цы раздела фаз, ослабевает с ростом значения  $|A|$  (рис. 2 (а, г)). Граница раздела прогревается слабее (см. рис. 2 (б, д)). В верхнем слое отмечается процесс конденсации, который усиливается с увеличением  $|A|$  (см. рис. 2 (в, е) и значения  $M$ ).

На рисунке 3 представлены типичные картины течения в условиях пониженной гравитации ( $g = 9.81 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ ). Уменьшение гравитационного воздействия приводит к количественным изменениям в профили скорости (см. рис. 3 (а, г)), но не влечет качественных, обусловленных замкнутостью потока в жидком слое (11). Газовый слой прогревается сильнее, нежели в предыдущем случае (см. распределение температуры на рис. 3 (б, д)). Массовая скорость испарения  $M$  принимает значение равно  $-0.632 \cdot 10^{-7} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$  при  $A = -1 \text{ К/м}$ , и значение  $M = -3.159 \cdot 10^{-7} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , если продольный градиент температуры  $A$  равен  $-5 \text{ К/м}$ . Тем самым продемонстрировано влияние нагрева на изменение интенсивности массопереноса на границе раздела (см. также. рис. 2 (в, е)).

### Заключение

В работе проведено математическое моделирование двухслойных конвективных течений с учетом тепло- и массопереноса на недеформируемой термокапиллярной границе раздела с учетом эффектов Соре и Дюфура в наклонном канале. Приведены примеры профилей продольной скорости, полей температуры и концентраций пара для системы «HFE-7100 — азот». Для изученных режимов течений характерной особенностью является процесс конденсации пара на границе раздела, в то время как течения в условиях, когда нагреватель отнесен вниз по потоку, сопровождался процессом испарения (см. [4]). Показано, что понижение уровня гравитации влечет за собой количественные и качественные изменения в структуре течения.

## Библиографический список

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., 1964.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
3. Гончарова О.Н., Южкова Ю.Е. Моделирование конвективного течения в наклонном слое с движущимися границами // Известия Алт. гос. ун-та. 2010. Вып. 1-1(65).
4. Makarov E.E. Modeling of Stationary Flows of a Liquid-Gas System in an Inclined Channel Subject to Evaporation. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2023. Vol. 16(1). 1–11.
5. Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 2.
6. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л., 1952.
7. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3.
8. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского госуниверситета. Сер. Гидродинамика. 1972. № 4.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
10. Rezanova E.V. Construction of Exact Solution Describing Three-layer Flows with Evaporation in a Horizontal Channel. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2021. Vol. 14 (1).
11. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Люлин Ю.В., Кабов О.А. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения // Теплофизика высоких температур. 2017. № 6 (55).
12. Lyulin Y., Kabov O., Iorio C.S., Chikov S., Glushchuk A., Marchuk I., Queeckers P. Liquids-candidates for CIMEX-1 experiments on ISS // Manuscript: CIMEX Meeting. Bruxelles, 2009, May 15.
13. Краткий справочник физико-химических величин / под ред. А.А. Равделя, А.М. Пономаревой. СПб., 1998.