

УДК 519.6:004.94

## Математическое и компьютерное моделирование динамики экономических показателей региона

П.И. Кузьмин<sup>1</sup>, В.В. Мищенко<sup>1</sup>, И.М. Супонина<sup>2</sup>, Н.М. Улеско<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

<sup>2</sup>Управление Федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю и Республике Алтай (Барнаул, Россия)

## Mathematical and Computer Modelling of Regional Economic Indicator's Dynamics

P.I. Kuzmin<sup>1</sup>, V.V. Mishchenko<sup>1</sup>, I.M. Suponina<sup>2</sup>, N.M. Ulesko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Altai State University (Barnaul, Russia)

<sup>2</sup>Office of the Federal State Statistics Service for the Altai Territory and the Republic of Altai (Barnaul, Russia)

Работа посвящена построению системы одновременных уравнений для анализа социально-экономического развития региона, основанных на совокупности взаимосвязанных показателей, характеризующих состояние и развитие экономики региона за относительно спокойный период времени с 2009 по 2019 гг. При исследовании используется авторская математическая модель взаимной связи валового регионального продукта (ВРП) с совокупностью основных региональных показателей Алтайского края. Численные методы базируются на статистической информации Управления Федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю и Республике Алтай.

Модель учитывает увеличение количества занятых в теневой экономике. По проведенным вычислительным процедурам установлено, что система уравнений адекватно оценивает степень влияния факторных переменных на изменение экономических показателей региона. На основе исследования математической и компьютерной модели численными методами обоснован вывод о причинах оттока населения из региона. Более того, доказано, что любое увеличение численности занятых, даже в теневой экономике, повлечет за собой значительный рост валового регионального продукта.

**Ключевые слова:** валовой региональный продукт, система одновременных уравнений, эконометрическая модель, численные методы, компьютерное моделирование.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-18

### Введение

В странах с развитой экономикой решению задач оптимизации процессов макро- и микроэкономики успешно помогает математическое и компью-

The aim of this research is to develop a system of simultaneous equations to analyze the socio-economic development of a region. The equations are constructed using interrelated indicators that reflect the state and development of the region's economy over a relatively quiet period from 2009 to 2019. The author's mathematical model, which relates the gross regional product (GRP) to the main regional indicators of the Altai Krai, is used in this study. Statistical data from the Federal State Statistics Service for the Altai Krai and the Republic of Altai are used for numerical methods. The model accounts for the increase in the number of people employed in the shadow economy. The computational procedures show that the system of equations adequately assesses the impact of factor variables on the change in the economic indicators of the region. By using numerical methods, the study concludes that the outflow of population from the region can be attributed to certain factors. The research also demonstrates that an increase in the number of people employed, even in the shadow economy, leads to a significant increase in the gross regional product.

**Key words:** gross regional product, system of simultaneous equations, econometric model, numerical methods, computer simulation.

терное моделирование, которое достигло серьезных успехов [1].

В данной работе методами математического и компьютерного моделирования исследована связь валово-

вого регионального продукта с совокупностью основных региональных показателей Алтайского края за период 2009–2019 гг. На первом этапе был проведен содержательный анализ факторов, включаемых в модель [1–4], далее эти показатели были пересчитаны на основе индекса-дефлятора и индексов физического объема [5–7]. В вычислительных процедурах были использованы данные сайта Росстата по Алтайскому краю [4, 8, 9].

Исследовательские разделы работы направлены на оценку эндогенных переменных модели, в том числе:  $C_t$  — фактическое потребление домашних хозяйств на  $t$ -м отрезке времени, млн руб.;  $Y_t$  — валовой региональный продукт, млн руб.;  $I_t$  — инвестиции в основной капитал на  $t$ -м отрезке времени, млн руб.;  $K_t$  — основные фонды на конец года по полной учетной стоимости организаций, млн руб.

По проведенным вычислительным процедурам были установлены высокие степени влияния включенных в уравнения системы факторных переменных на изменение анализируемых статистических показателей региона.

Результаты работы имеют теоретическое значение для исследования динамики экономических показателей региона и прикладную направленность для правительства Алтайского края при обосновании перспективной экономической политики.

### 1. Математическое моделирование динамики экономических показателей Алтайского края

В результате предварительного анализа, с учетом расчетов и замечаний, система одновременных уравнений модели была построена для статистических данных Алтайского края и имеет следующий вид:

$$C_t = a_1 + a_2 \cdot Y_t + a_3 \cdot W2_t + \mu 1_t, t = 2009, \dots, 2019; \quad (1)$$

$$Y_t = b_1 + b_2 \cdot K_{t-1} + b_3 \cdot L_t + b_4 \cdot I_{t-1} + \mu 2_t; \quad (2)$$

$$I_t = c_1 + c_2 \cdot Y_t + \mu 3_t; \quad (3)$$

$$K_t = d_1 + d_2 \cdot Y_t + d_3 \cdot Y_t + d_4 \cdot K_{t-1} + \mu 4_t. \quad (4)$$

В выражениях (1)–(4) использованы в дополнение к введению следующие обозначения:  $\mu 1_t, \dots, \mu 4_t$  — невязки уравнений;  $a_1, \dots, d_4$  — коэффициенты влияния факторных переменных в уравнениях соответственно.

### 2. Анализ статистики экономических показателей Алтайского края

Идентификация параметров модели и ее исследование численными методами проведены с использованием статистической информации Управления Федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю и Республике Алтай. Динамика ВРП приведена в таблице 1, где  $Y_{t, \text{тек}}$  — значения ВРП в текущих ценах;  $IY_t$  — индекс физического объема ВРП Алтайского края, в процентах к предыдущему году;  $IDY_t$  — индекс-дефлятор, % [10–12].

Валовой региональный продукт был приведен к ценам 2016 г. двумя способами (столбцы 5, 6 табл. 1). В первом способе ( $Y1_t$ ) был использован цепной индекс-дефлятор ВРП. Например, валовой региональный продукт  $Y1_{2014}$  2014 г. в ценах 2016 г. был рассчитан следующим образом:

$$Y1_{2014} = Y1_{2014, \text{тек}} \cdot (IY_{2015} \cdot IY_{2016}) / 100^2. \quad (5)$$

Во втором способе оценки ВРП ( $Y2_t$ ) был использован индекс физического объема ВРП. Для расчета валового регионального продукта 2018 г. в ценах 2016 г. была использована соответствующая формула индекса физического объема [5].

Таблица 1

Статистические и приведенные данные по валовому региональному продукту Алтайского края за 2009–2019 гг.

Годы	$Y_{t, \text{тек}}$ , млн руб.	$IY_t$ , %	$IDY_t$ , %	$Y1_t$ , млн руб.	$Y2_t$ , млн руб.
2009	265613,3	94,7	108,2	466379,93	466379,93
2010	302900,7	103,2	110,5	481304,09	481304,09
2011	332117,9	103,9	105,5	500074,95	500074,95
2012	368995,2	101,6	109,4	508076,15	508076,15
2013	416110,3	104,9	107,5	532971,88	532971,88
2014	447906,9	100,4	106,7	535103,77	535103,77
2015	487903,2	100,5	108,9	537779,29	537779,29
2016	532401,5	99	103,3	532401,5	532401,5
2017	545303	100,7	110,3	536128,31	536128,31
2018	579740,5	102	101,7	546850,87	546850,87
2019	630813,8	102,3	104,2	559428,45	559428,45

В расчетах в качестве  $Y_t$  использовались средние значения для  $Y1_t$  и  $Y2_t$ .

Статистические и оценочные данные среднегодовой численности занятых в экономике Алтайского края приведены в таблице 2.

В связи с тем что приведенные во втором столбце таблицы 2 данные по количеству занятых в экономи-

ке  $L_{t,стат}$  имеют отрицательный коэффициент корреляции со значениями валового регионального продукта Алтайского края, были учтены два дополнительных фактора — эквивалент полной занятости  $L_{t,экв}$  (тыс. условных работников) и численность занятых в неформальном секторе  $L_{t,неформ}$  (тыс. чел.).

Таблица 2

Уточненные статистические данные по Алтайскому краю по среднегодовой численности занятых в экономике, тыс. чел.

Годы	$L_{t,стат}$	$L_{t,экв}$	$L_{t,неформ}$	$L_t$
2009	1071,4		242	1313,4
2010	1093,4		259,21	1352,61
2011	1092,8		268,66	1361,5
2012	1091,8		276	1367,8
2013	1090,1	1150	244,1	1364,2
2014	1069,6	1200	192,82	1327,6
2015	1055,9	1281	165,52	1334,0
2016	1017,5	1200	247	1355,8
2017	1008,5	1200	221,6	1325,9
2018	1023,4	1200	229,99	1341,7
2019	1018,1	1150	292,3	1376,4

Среднегодовая численность занятых с учетом эквивалента полной занятости и занятых в неформальной экономике  $L_t$  вычислена по формуле:

$$L_t = \frac{L_{t,стат} + L_{t,экв}}{2} + L_{t,неформ}. \quad (6)$$

С учетом сделанных поправок коэффициент корреляции между значениями валового регионального продукта и количеством занятых стал положительным и равен 0,406.

Для построения модели экономики региона были использованы дополнительно к  $L_t$  следующие экзогенные переменные.

$K_{t-1}$  — стоимость основных производственных фондов на конец года по полной учетной стоимости по полному кругу организаций, пересчитанные по индексу физического объема основных фондов в ценах 2016 г., млн руб.

$I_{t-1}$  — инвестиции в основной капитал предыдущего периода в ценах 2016 г., пересчитанные с помощью индекса физического объема, млн руб.

$W2_t$  — среднемесячная номинальная заработная плата работников в органах местного самоуправления Алтайского края, руб.

Методика анализа соответствующих статистических данных для вычисления и приведения к сопоставимым значениям для этих переменных описана в работах [10–11]. Итоговые данные для построения эконометрических моделей приведены в таблице 3.

Таблица 3

Исходные данные экономики Алтайского края за 2009–2019 гг.

Годы	$K_t$	$I_t$	$W2_t$	$C_t$
2009	750374,39	74641	15498,27	434451,55
2010	763631,14	86061,08	16149,2	431592,36
2011	808436,97	98539,939	17166,6	489068,85
2012	818543,4	110463,27	18969,09	511647,67
2013	827244,15	116207,36	19898,58	519262,39
2014	831380,37	117485,64	19878,68	527569,47

Окончание таблицы 3

Годы	$K_t$	$I_t$	$W2_t$	$C_t$
2015	840525,55	83649,78	17870,93	510044,78
2016	871625	75284,8	17585	536572,5
2017	906490	86652,8	18200,48	609222,42
2018	938217,15	102856,88	19874,92	661382,9313
2019	1124922,36	101454,09	20848,79	702887,3414

### 3. Компьютерное моделирование динамики экономических показателей Алтайского края

В правой части системы одновременных уравнений (1)–(4) наряду с эндогенными переменными находятся экзогенные (внешние) переменные, представленные в приведенной форме модели, коэффициенты которой тоже необходимо определить. Соответствующая приведенная форма имеет вид:

$$C_t = d_{10} + d_{11} \cdot K_{t-1} + d_{12} \cdot L_t + d_{13} \cdot I_{t-1} + d_{14} \cdot W2_t; \quad (7)$$

$$Y_t = d_{20} + d_{21} \cdot K_{t-1} + d_{22} \cdot L_t + d_{23} \cdot I_{t-1} + d_{24} \cdot W2_t; \quad (8)$$

$$I_t = d_{30} + d_{31} \cdot K_{t-1} + d_{32} \cdot L_t + d_{33} \cdot I_{t-1} + d_{34} \cdot W2_t; \quad (9)$$

$$K_t = d_{40} + d_{41} \cdot K_{t-1} + d_{42} \cdot L_t + d_{43} \cdot I_{t-1} + d_{44} \cdot W2_t. \quad (10)$$

Пользуясь необходимым условием идентифицируемости, получим, что все 4 уравнения структурной формы модели являются сверхидентифицируемыми, что позволило вычислить коэффициенты уравнений структурной формы модели двухшаговым методом наименьших квадратов [8, 9].

По проведенным вычислительным процедурам было установлено, что рассчитанные коэффициенты детерминации ( $R^2$ ) по каждому уравнению показывают высокую степень влияния включенных в уравнения системы факторных переменных на изменение анализируемых статистических показателей региона.

После вычислительных процедур двухшагового метода наименьших квадратов для вычислений коэффициентов первого уравнения, т.е. фактического потребления домашних хозяйств, были получены результаты, приведенные в таблице 4.

Таблица 4

Оценки параметров уравнения (1)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$R^2$	$F$
-639511	1,874	12,006	0,788	0,004

Рассмотрим приведенный в таблице 4 коэффициент  $a_1 = 1,874$ . Содержательно это означает, что при увеличении ВРП на 1 млн руб. фактический объем потребления домашних хозяйств в среднем будет увеличиваться на 1,874 млн руб.

Коэффициент  $a_3 = 12,006$  свидетельствует о том, что существует прямая пропорциональная связь между оплатой труда наемных работников и потреблени-

ем домашних хозяйств, т.е. с ростом оплаты труда наемных работников возрастает и фактический объем потребления домашних хозяйств.

Следующим моделируемым статистическим показателем является валовой региональный продукт, изменение которого характеризуется вторым уравнением системы (табл. 5).

Таблица 5

Оценки параметров уравнения (2)

$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$R^2$	$F$
-113097	0,3903	211,0526	0,1237	0,8112	0,0136

Согласно приведенному в таблице 5 коэффициенту детерминации можно сделать вывод о том, что валовой региональный продукт на 81,12 % зависит от совокупности факторных переменных, включенных во второе уравнение системы и, следовательно, на 18,88 % от других факторов, что подтверждается правильным отбором факторов, оказывающих не-

посредственное влияние на валовой региональный продукт.

Коэффициент  $b_2 = 0,3903$  показывает, что при увеличении стоимости основных производственных фондов Алтайского края прошлого периода на 1 млн руб. валовой региональный продукт увеличится примерно на 390 тыс. руб.

Коэффициент  $b_3 = 211,0526$  показывает, что при увеличении количества занятых на тысячу человек валовой региональный продукт увеличится на 211 млн руб. Поскольку в начале статьи было отмечено, что пришлось учитывать работников, занятых и в неформальной экономике, получается, что любое увеличение количества занятых в любых формах экономики повлечет за собой значительное увеличение валового регионального продукта.

В настоящее время происходит постоянный отток населения Алтайского края в другие регионы. Определим уровень фактического потребления домохозяйств при сохранении среднегодовой численности занятых в экономике края.

Для ответа на этот вопрос подставим в уравнение (2) средние значения входящих в правую часть переменных, зафиксировав на среднем уровне и средне-

годовую численность занятых. В результате получим среднее значение валового регионального продукта на уровне 509927,96 млн руб. Подставим эту величину в уравнение (1) при средней оплате труда и получим, что фактическое потребление домохозяйств составит 540016,11 млн руб., что составляет 76,83 % от уровня фактического потребления 2019 г. Таким образом, даже если бы работники не уезжали, фактическое потребление домохозяйств уменьшалось бы.

Содержательный смысл коэффициента  $b_4 = 0,1237$  состоит в том, что увеличение инвестиций прошлого периода в экономику Алтайского края на 1 млн руб. повлечет за собой увеличение валового регионального продукта на 123 тыс. руб.

При построении модели уравнения (3) возникли трудности, поэтому регрессионная модель была построена за последние 2016–2019 гг. (табл. 6).

Таблица 6

Оценки параметров уравнения (3)

$c_1$	$c_2$	$R^2$	$F$
-14412	0,4442	0,4675	0,68378

Коэффициент  $c_2 = 0,4442$  показывает, что при увеличении валового регионального продукта на 1 млн руб. инвестиции в среднем будут увеличиваться более чем на 444 тыс. руб.

Последнее уравнение (4) моделировало изменение стоимости основных производственных фондов (капитала) Алтайского края от соответствующих факторов (табл. 7).

Таблица 7

Оценки параметров уравнения (4)

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$R^2$	$F$
-984987	2,7353	0,3945	0,508	0,8677	0,00479

Так, коэффициент детерминации  $R^2 = 0,8677$  показывает, что набор стоящих справа в уравнении переменных недостаточно полно определяет изменение стоимости основных производственных фондов.

Коэффициент  $d_2 = 2,7353$  свидетельствует о том, что с увеличением валового регионального продукта на один миллион рублей стоимость основных производственных фондов будет в среднем увеличиваться более чем на 2 млн 735 тыс. руб.

Коэффициент  $d_3 = 0,3945$  показывает, что с увеличением инвестиций на 1 млн руб. стоимость основных производственных фондов будет в среднем увеличиться на 394 тыс. руб.

Переход к стандартизованным переменным в уравнении (4) и применение к ним метода наименьших квадратов показывает степени влияния этих факторов на стоимость основных производственных фондов. Влияние валового регионального продукта (коэффициент равен 1,1447) больше, чем влияние инвестиций, так как соответствующий коэффициент равен 0,2134.

### Заключение

Переход к стандартизованным переменным в уравнении (2) и применение к ним метода наименьших квадратов показывает степени влияния этих факторов на валовой региональный продукт. На первом месте по степени влияния (коэффициент равен 0,8787) находится стоимость основных производственных фондов (капитал) предыдущего периода. На втором месте по степени влияния на валовой региональный продукт оказался такой фактор, как количество занятых в экономике, так как соответствующий коэффициент равен 0,14378. На последнем месте оказались инвестиции предыдущего периода с коэффициентом 0,077742.

Поскольку капитал предыдущего периода не является переменной управления (его уже не изменить), то получается, что нужно увеличить количество занятых в формальной и неформальной экономике для увеличения валового регионального продукта.

Как было отмечено ранее, в 2020 г. была также построена система одновременных уравнений [11, 12], уста-

навливающих связь валового регионального продукта (ВРП) с совокупностью основных региональных показателей Алтайского края за период 2006–2017 гг. Если сравнить влияние факторов за период 2009–2019 гг.

на валовой региональный продукт, то на первом месте по степени влияния за последние годы стало количество занятых в формальной и неформальной экономике.

### Библиографический список

1. Суспицын С.А. Барометры социально-экономического положения регионов России. Новосибирск, 2004.
2. Кузьмин П.И. Эконометрические модели региона. Барнаул, 2006.
3. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М., 1975.
4. Lawrence R. Klein and the Economic Forecasting — A Survey. - S.G. Hall, A. Roudoi, L.L.Albu, A.C. Calin // Romanian Journal of Economic Forecasting. 2014. Vol. XVII (1).
5. Официальный сайт Алтайкрайстата. <http://akstat.gks.ru>.
6. Федеральная служба государственной статистики: официальный сайт. <http://www.gks.ru>.
7. ЕМИСС. Государственная статистика. <https://fedstat.ru/indicator/40661>.
8. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. М., 2004.
9. Эконометрика: учебник для магистров / под ред. И.И. Елисеевой. М., 2014.
10. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М., 1975.
11. Кузьмин П.И., Мищенко В.В., Мищенко И.К., Криворучкая А.М. Обоснование влияния инвестиций в отдельные отрасли на экономический рост методом имитационного моделирования // Финансовый бизнес. 2018. № 6 (197).
12. Кузьмин П.И., Зиновьев А.Г. Использование аналога модели Клейна при оценке и анализе развития экономики региона // Экономика. Профессия. Бизнес. 2020. № 2.