УДК 515.165.7

Собственные значения оператора Риччи четырехмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии*

П.Н. Клепиков[1], Е.Д. Родионов[2]

[1]Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)
[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Eigenvalues of Ricci Operator of Four-Dimensional Locally Homogeneous Riemannian Manifolds with Nontrivial Isotropy Subgroup

P.N. Klepikov[1], E.D. Rodionov[2]

[1]Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russia)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Собственные значения операторов кривизны связаны с топологией римановых многообразий, что было показано в работах Дж. Милнора, В.Н. Берестовского, Е.Д. Родионова, В.В. Славского и Ю.Г. Никонорова.

Собственные значения оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовались Дж. Милнором. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных метрических группах Ли, а также на трехмерных римановых локально однородных пространствах. Аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны и оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым и О.П. Хромовой.

В четырехмерном случае известны работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова, в которых определены возможные сигнатуры кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли.

Данная работа посвящена решению задачи о предписанных собственных значениях оператора Риччи для четырехмерных локально однородных римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Ключевые слова: оператор Риччи, собственные значения, локально однородные римановы многообразия, алгебры Ли.

The topology of Riemannian manifolds can be linked to the eigenvalues of curvature operators, which was demonstrated in the works of J. Milnor, V.N. Berestovsky, V.V. Slavkii, E.D. Rodionov, and Yu.G. Nikonorov. J. Milnor studied the eigenvalues of the Ricci curvature operator of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups, and identified possible signatures of the Ricci operator for three-dimensional Lie groups. O. Kowalski and S. Nikcevic later resolved the problem of prescribed spectrum values of the Ricci operator on three-dimensional metric Lie groups and Riemannian locally homogeneous spaces. D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, and O.P. Khomova also obtained similar results for the one-dimensional curvature operator and the sectional curvature operator. A.G. Kremlev and Yu.G. Nikonorov investigated the four-dimensional case and studied the possible signatures of the Ricci curvature of left-invariant Riemannian metrics on Lie groups. In this study, we aim to solve the problem of prescribed eigenvalues of the Ricci operator on locally homogeneous Riemannian manifolds with a nontrivial isotropy subgroup.

Key words: Ricci operator, eigenvalues, locally homogeneous Riemannian manifolds, Lie algebras.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-16

*Первый автор поддержан Математическим Центром в Академгородке (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2022–282), второй автор поддержан РНФ (грант № 22–21–00111).

1. Введение и основные результаты

Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии. Связь между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства изучалась в работах Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Е.Д. Родионова, В.В. Славского [3].

Спектр оператора кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли исследовался Дж. Милнором [1]. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой им были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Позднее О. Ковальский, С. Никшевич решили задачу о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных метрических группах Ли, а также трехмерных римановых локально-однородных пространствах [4]. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, О.П. Хромовой [5, 6].

В четырехмерном случае известны работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [7, 8], в которых определены возможные сигнатуры кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли, однако задача о предписанном операторе Риччи в данном случае пока не решена.

В более высоких размерностях существуют лишь частичные результаты. Например, в работе [9] Ю.Г. Никоноров показал, что оператор Риччи неунимодулярной разрешимой группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет как минимум два отрицательных собственных значения.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Четыре действительных числа ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 являются собственными значениями оператора Риччи некоторого четырехмерного локально однородного риманова многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии тогда и только тогда, когда они с точностью до переобозначения удовлетворяют одному (или нескольким) из следующих условий:*

- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$;
- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, $\rho_4 = 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$;
- $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, $\rho_4 < 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0$, $2\rho_4 - 3\rho_1 > 0$;
- $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $2\rho_1 + \rho_4 < 0$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2+\rho_4^2}{2\rho_1+\rho_4} < 0$;
- $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_4 = 0$.

Данная теорема является компиляцией результатов, которые будут получены далее.

2. Основные обозначения и факты

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять матрицу оператора Риччи на локально однородном римановом многообразии (подробнее см. [10–12]).

Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности n, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim \mathfrak{h}$, $m = \dim \mathfrak{m}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k,$$
$$[h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k \tag{1}$$

и запишем условие инвариантности метрического тензора g:

$$(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h, \tag{2}$$

где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Далее с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора найдем компоненты связности Леви-Чивита ∇:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}\right), \\ \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R, тензора Риччи r и оператора Риччи ρ:

$$\begin{aligned} R_{ijks} &= \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps}, \\ r_{ik} &= R_{ijks} g^{js}, \quad \rho_i^k = r_{is} g^{sk}. \end{aligned} \tag{4}$$

В данной работе мы будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий, полученную в работе [13]. В этой работе для каждого из 186 случаев указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_i)$. Далее по тексту мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, “$2.1^3.5$”).

3. Собственные значения оператора Риччи

Затем мы последовательно рассмотрим все случаи из классификации работы [13], которые допускают риманову метрику (29 типов пространств из 186). Для каждого случая найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы четыре действительных числа ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 являлись собственными значениями оператора Риччи.

Но сначала перечислим все случаи, в которых оператор Риччи тривиален, а значит, его собственными значениями могут быть лишь нули. Это случаи $1.1^2.12$, $2.1^3.6$, $3.4^2.1$, $3.5^2.4$, $4.2^2.3$, $6.1^2.3$. Это утверждение мы не будем подробно рассматривать, так как его доказательство выполняется прямыми вычислениями компонент оператора Риччи с помощью формул (3) и (4).

Далее мы последовательно рассмотрим все случаи, не упомянутые ранее. Первый разберем подробнее, вычисления в остальных случаях аналогичны.

Пространство $1.1^2.1$**.** В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0$, $2\rho_4 - 3\rho_1 > 0$.

Скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -u_2,$$
$$[u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = 2u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Вычислим представление изотропии (1):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (2) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0,$$
$$-2\alpha_{13} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0,$$
$$-\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

и определяет риманову метрику тогда и только тогда, когда $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $\alpha_{44} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 > 0$.

Теперь с помощью формул (3) и (4) вычислим матрицу оператора Риччи. Ее ненулевые компоненты будут иметь вид:

$$\rho_{11} = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{22} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{24} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{33} = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_{44} = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + 8\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_3 = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 16\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$\rho_4 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0.$$

Отметим, что

$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{12\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = 2\rho_4 < 0,$$

а также

$$2\rho_4 - 3\rho_1 = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2} > 0.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_4 < 0, \quad 2\rho_4 - 3\rho_1 > 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = \frac{2}{3}(2\rho_4 - 3\rho_1) > 0$, $\alpha_{44} = -\frac{6}{\rho_4} > 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{33} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{-4(2\rho_4 - 3\rho_1)}{\rho_4} > 0$.

Пространство $1.1^2.2$**.** В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять одному (или нескольким) из условий

- либо $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 < 0$;
- либо $\rho_1 < 0$, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$;
- либо $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $2\rho_1 + \rho_4 < 0$, $\rho_1 \neq \rho_4$, $\rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} < 0$.

Пусть $p = 1$, тогда оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0.$$

Собственные значения могут быть равны любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = -\frac{4}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = -\rho_1$.

Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны между собой $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 3 > 0$.

Пусть $p = -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = -\frac{6\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственное значение ρ_1 может быть равно любому отрицательному числу, потому что можно положить $\alpha_{44} = -\frac{7}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$ и $\alpha_{22} = -\rho_1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны ρ_1, 0, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 6 > 0$.

Пусть теперь $p \neq 1$, $p \neq -2$, тогда оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} \neq 0,$$
$$\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0,$$
$$\rho_4 = -\frac{\alpha_{22}p(p+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2}.$$

Заметим, что

$$2\rho_1 + \rho_4 = -\frac{\alpha_{22}(p+2)^2}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \frac{\rho_4}{\rho_1} = p \neq 1,$$

а также

$$\frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} = -\frac{\alpha_{22}(p^2+2)}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} = \rho_3.$$

Осталось заметить, что ρ_1, ρ_3 и ρ_4 могут быть произвольными при выполнении условий

$$\rho_1 \neq 0,\ 2\rho_1 + \rho_4 < 0,\ \rho_1 \neq \rho_4,\ \rho_3 = \frac{2\rho_1^2 + \rho_4^2}{2\rho_1 + \rho_4} < 0.$$

Действительно, положим $\alpha_{22} = -\frac{1}{2\rho_1+\rho_4}$ $\alpha_{44} = -\frac{2\rho_1+\rho_4}{\rho_1^2}$, $\alpha_{24} = 0$, $p = \frac{\rho_4}{\rho_1} \notin \{-2, 1\}$, α_{33} выберем произвольным положительным числом. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и ρ_4, а $\alpha_{33} > 0$ и $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{1}{\rho_1^2} > 0$.

Пространство $1.1^2.3$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22} - 2\alpha_{33}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2} > 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что

$$\rho_1 + \rho_3 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0.$$

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условий $\rho_1 + \rho_3 > 0$, $\rho_3 > 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$.

Пространство $1.1^2.4$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 > 0$, $\rho_1 + \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{2\alpha_{33} + \alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}, \quad \rho_3 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}^2} > 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Из приведенных выражений видно, что

$$\rho_1 + \rho_3 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0.$$

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть произвольными при выполнении условий $\rho_1 + \rho_3 < 0$, $\rho_3 > 0$. Положим $\alpha_{22} = \frac{2\rho_3}{(\rho_1+\rho_3)^2}$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_1+\rho_3}$, $\alpha_{44} = \alpha_{22}$, а $\alpha_{24} = 0$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, ρ_3 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = \frac{4\rho_3^2}{(\rho_1+\rho_3)^4} > 0$.

Пространство $1.1^2.5$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2} < 0, \quad \rho_4 = 0.$$

При $\alpha_{22} > 0$ выражение $-\frac{\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2}$ может принимать любое отрицательное значение.

Пространство $1.1^2.6$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0,\ \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым отрицательным числом, а ρ_3 — положительным. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = \frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$.

Пространство $1.1^2.7$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}^2 - \alpha_{22}\alpha_{44}} < 0,\ \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0.$$

Заметим, что ρ_1 и ρ_3 могут быть любыми отрицательными числами. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = -\frac{1}{\rho_3}$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$.

Пространство $1.1^2.8$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Заметим, что ρ_1 может быть любым отрицательным числом. Действительно, пусть $\alpha_{22} = -\rho_1$, $\alpha_{44} = -\frac{2}{\rho_1}$, $\alpha_{24} = 1$, $\alpha_{33} = 1$. Тогда собственные значения оператора Риччи будут равны $\rho_1 = \rho_2$, 0 и 0, а $\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 1 > 0$.

Пространство $1.1^2.9$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами.

Пространство $1.1^2.10$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

В данном случае оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами.

Пространство $1.1^2.11$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{6}{\alpha_{33}} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами.

Пространство $2.1^3.1$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 > 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{\alpha_{44}} > 0.$$

Пары собственных значений $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми положительными числами.

Пространство $2.1^3.2$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}} < 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами, а $\rho_3 = \rho_4$ — любыми отрицательными.

Пространство $2.1^3.3$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 < 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = -\frac{1}{\alpha_{44}} < 0.$$

Пары собственных значений $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_3 = \rho_4$ могут быть любыми отрицательными числами.

Пространство $2.1^3.4$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 > 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{\alpha_{33}} > 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми положительными числами.

Пространство $2.1^3.5$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 < 0$ и $\rho_3 = \rho_4 = 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\alpha_{33}} < 0, \quad \rho_3 = \rho_4 = 0.$$

Собственные значения $\rho_1 = \rho_2$ могут быть любыми отрицательными числами.

Пространство $3.5^2.1$. В данном случае числа ρ_i должны быть попарно равны и отрицательны.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}} < 0.$$

Собственное значение может быть любым отрицательным числом.

Пространство $3.5^2.2$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 < 0$ и $\rho_4 = 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -\frac{2}{\alpha_{33}} < 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым отрицательным числом.

Пространство $3.5^2.3$. В данном случае числа ρ_i должны удовлетворять условиям $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 > 0$ и $\rho_4 = 0$.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{2}{\alpha_{33}} > 0, \quad \rho_4 = 0.$$

Собственное значение $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ может быть любым положительным числом.

Пространство $4.2^2.1$**.** В данном случае числа ρ_i должны быть попарно равны и положительны.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{6}{\alpha_{44}} > 0.$$

Собственное значение может быть любым положительным числом.

Пространство $4.2^2.2$**.** В данном случае числа ρ_i должны быть попарно равны и отрицательны.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{6}{\alpha_{44}} < 0.$$

Собственное значение может быть любым отрицательным числом.

Пространство $6.1^2.1$**.** В данном случае числа ρ_i должны быть попарно равны и отрицательны.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -\frac{3}{\alpha_{44}} < 0.$$

Собственное значение может быть любым отрицательным числом.

Пространство $6.1^2.2$**.** В данном случае числа ρ_i должны быть попарно равны и положительны.

Оператор Риччи ρ имеет собственные значения

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{3}{\alpha_{44}} > 0.$$

Собственное значение может быть любым положительным числом.

Заключение

В данной работе получены необходимые и достаточные условия на четыре числа, чтобы они являлись собственными значениями оператора Риччи некоторого четырехмерного локально однородного риманова многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии. В дальнейшем планируется рассмотреть случай четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий.

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. 1976. Vol. 21. DOI: 10.1016/S0001-8708(76)80002-3.
2. Berestovsky V.N. Homogenious Riemannian manifolds of positive Ricci curvature // Mat. Zametki. 1995. Vol. 55. № 3. DOI: 10.1007/BF02304766.
3. Rodionov E.D., Slavkii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three-dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference. Brno, 1999.
4. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. № 1. DOI: 10.1007/BF00240002.
5. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия Алт. гос. ун-та. 2013. № 1/1.
6. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия Алт. гос. ун-та. 2010. № 1–2.
7. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11. № 2. DOI: 10.3103/S1055134409040038.
8. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12. № 1. DOI: 10.3103/S1055134410010013.
9. Nikonorov Yu.G. Negative eigenvalues of the Ricci operator of solvable metric Lie algebras // Geometriae Dedicata. 2014. Vol. 170. DOI: 10.1007/s10711-013-9871-0.
10. Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений для определения основных геометрических характеристик нередуктивных однородных псевдоримановых многообразий // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники : сборник трудов всеросс. конф. Барнаул, 2015.
11. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях // Известия Алт. гос. ун-та. 2017. № 4(96). DOI: 10.14258/izvasu(2017)4-19.
12. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J. 2014. Vol. 66. DOI: 10.2748/tmj/1396875661.
13. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. 2001. Vol. 8.