УДК 514.763

О геометрии почти квази-пара-сасакиевых многообразий, оснащенных канонической N-связностью

С.В. Галаев, Е.А. Кокин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

On the Geometry of Almost Quasi-Para-Sasakian Manifolds Equipped with a Canonical N-Connection

S.V. Galaev, E.A. Kokin

Saratov State University (Saratov, Russia)

Вводится понятие почти квази-пара-сасакиева многообразия. В отличие от известной ранее квази-пара-сасакиевой структуры почти квази-пара-сасакиева структура не является нормальной структурой. Свойство нормальности в исследуемом в статье случае заменяется на более слабое свойство почти нормальности. Почти нормальные структуры аналогичны по своим свойствам интегрируемым тензорным структурам. Приводятся необходимые примеры. В частности, приводится пример почти квази-пара-сасакиевой структуры, естественным образом определяемой на распределении нулевой кривизны субриманова многообразия контактного типа. На почти квази-пара-сасакиевом многообразии определяется связность с кручением специального строения, названная в работе продолженной связностью. Продолженная связность определяется с помощью внутренней связности и эндоморфизма, сохраняющего распределение почти (пара)контактного многообразия. Доказывается, что продолженная связность с кососимметрическим кручением определена однозначно и является метрической связностью. Находятся условия, при которых почти квази-пара-сасакиево многообразие является η-Эйнштейновым многообразием относительно продолженной связности с кососимметрическим кручением.

Ключевые слова: почти квази-пара-сасакиево многообразие, внутренняя связность, продолженная кососимметрическая связность, η-Эйнштейново многообразие.

This paper introduces the concept of an almost quasi-para-Sasakian manifold, which differs from the previously known quasi-para-Sasakian structure in that it is not a normal structure. Instead, it possesses a weaker property called almost normality, similar in properties to integrable tensor structures. Several examples are given, including an almost quasi-para-Sasakian structure defined on the distribution of zero curvature of a sub-Riemannian manifold of contact type.

An extended connection with skew-symmetric torsion is defined on an almost quasi-para-Sasakian manifold, which is unique and defined using an intrinsic connection and an endomorphism that preserves the distribution of an almost (para-)contact manifold. The paper proves that the extended connection is a metric connection, and it is also demonstrated that an almost quasi-para-Sasakian manifold can be an η-Einstein manifold with respect to an extended connection with skew-symmetric torsion, provided certain conditions are met.

Key words: almost quasi-para-Sasakian manifold, intrinsic connection, extended skew-symmetric connection, η-Einstein manifold.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-13

Введение

В настоящей статье рассматриваются так называемые продолженные связности или, по-другому, — N-связности ∇^N, определяемые на почти (пара)контактном метрическом многообразии или, более общо, на субримановом многообразии контактного типа, с заданной на нем парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N\colon TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$ [1]. К настоящему времени первым из авторов настоящей статьи опубликованы десятки работ, посвященных разным аспектам геометрии продолженных связностей (см., например, [2, 3]). Особое место в этих работах уделяется продолженным связностям с кососимметрическим кручением. Такие связности находят богатые приложения в теоретической физике [4, 5]. С.В. Галаеву в настоящей статье принадлежит следующий результат: на всяком субримановом многообразии контактного типа существует, причем единственная, продолженная связность с кососимметрическим кручением. Отсюда, в частности, следует, что если на почти (пара)контактном метрическом многообразии существует единственная связность с кососимметрическим кручением, то эта связность является продолженной связностью. Примером такого многообразия служит многообразие Сасаки. Связности с кососимметрическим кручением на почти параконтактных метрических многообразиях подробно исследованы в работе С. Замкового [6]. При этом С. Замковой рассматривает класс канонических связностей $\widetilde{\nabla}_X Y$. Каноническая связность (по С. Замковому) — это метрическая связность такая, что $\widetilde{\nabla}_X \eta = \widetilde{\nabla}_X \vec{\xi} = 0$. Полученные С. Замковым результаты повторяют в контексте геометрии почти параконтактных структур известные результаты из геометрии почти контактных метрических многообразий [7, 8].

Почти квази-пара-сасакиевы структуры введены авторами настоящей статьи. Такие структуры относятся к классу почти нормальных структур. Понятие почти нормальной структуры введено в работе [7]. Мотивацией для введения понятия почти нормальной структуры послужил тот факт, что именно такие структуры естественным образом возникают на распределениях нулевой кривизны субримановых многообразий контактного типа [9]. Класс почти квази-пара-сасакиевых структур расширяет класс квази-пара-сасакиевых структур, изучение которых, по-видимому, начинается с работы [10]. Во многом источником идей здесь являются классические работы по квази-сасакиевым многообразиям [8, 11, 12, 13].

Почти параконтактное метрическое многообразие ($AQPS$-многообразие) названо С.В. Галаевым в настоящей работе почти нормальным, если оказывается справедливым равенство $\widetilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$. Под почти квази-пара-сасакиевым многообразием понимается почти нормальное почти параконтактное многообразие нечетного ранга с замкнутой фундаментальной формой. Для почти (пара)контактных метрических многообразий нечетного ранга справедливо равенство $d\eta(\vec{\xi},\cdot)$. В частности, нормальные почти (пара)контактные метрические многообразия являются многообразиями нечетного ранга. $AQPS$-многообразие является обобщением квази-пара-сасакиева многообразия и сводится к последнему, если $d\eta = -\varphi^* d\eta$. В предлагаемой работе на $AQPS$-многообразии изучаются связности с кручением $\dot{\nabla}$ специального вида. А именно: пусть $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита. Определим связность $\dot{\nabla}$ следующем образом:

$$\dot{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + (\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\widetilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N)Y.$$

Настоящая работа состоит из двух основных частей. В первой части приводятся основные понятия геометрии $AQPS$-многообразий. Во второй части вводится понятие N-связности с кососимметрическим кручением. Находятся условия, при которых $AQPS$-многообразия являются многообразиями η-Эйнштейна относительно канонической связности.

1. Геометрические свойства почти квази-парасасакиевых многообразий

Рассмотрим почти параконтактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — заданная на многообразии M почти параконтактная метрическая структура, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — псевдориманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = I - \eta \otimes \vec{\xi}$, 2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$,

3) $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker(\eta)$ называется распределением почти параконтактной структуры.

Для параконтактных метрических многообразий выполняются также следующие условия:

5) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 6) $\eta \circ \varphi = 0$, 7) $\eta(X) = g(X, \vec{\xi})$, $X \in \Gamma(TM)$ [6, 14].

Кососимметрический тензор $\Omega(X,Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти параконтактная метрическая структура называется параконтактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \otimes D^\perp$. Иногда, если отпадает необходимость использования эндоморфизма φ, мы говорим не о почти параконтактной метрической структуре, а о субримановой структуре контактного типа [15, с. 58–62].

Карту $k(x^i)$ ($i, j, k = 1, ..., n$; $a, b, c = 1, ..., n - 1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [11]. Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \otimes D^\perp$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля

$P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D:$D = span(\vec{e}_a)$.

Для адаптированных карт $k'(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}),\ x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти (пара)контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D) или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},\ \text{где}\ A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}.$$

Имеет место равенство $[\vec{\mathbf{e}}_{\mathrm{a}} \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть ∇ — внутренняя линейная связность [15, 16] на многообразии с почти (пара)контактной метрической структурой.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Отсюда следует, что производные $\partial_n \Gamma^d_{ac}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Ранг субримановой структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p + 1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг субримановой структуры равен $2p + 1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений, основанных на применении равенства

$$2\tilde{\Gamma}^m_{ij} = g^{km}(\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{lj}) + \Omega^m_{ij} \qquad (\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}, \Omega^n_{an} = \partial_n \Gamma^n_a),$$

убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},\ \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab},\ \tilde{\Gamma}^b_{ab} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a,\ \tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a,\ \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab} \partial_n \Gamma^n_b,$$

$$\text{где}\ \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),\ \psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac},\ C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C^b_a = g^{bc} C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм ψ:$TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X, Y) = \dfrac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(X, Y)$, $g(CX, Y) = (CX, Y)$. Из условия $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ следует, что $\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a = 0$ и $\Gamma^n_{nn} = \quad {}^{ab}\partial_n \Gamma^n_b = \quad$.

Почти параконтактное метрическое многообразие M называется нормальным многообразием, если выполняется условие $N^{(1)}_\varphi = N_\varphi - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Многообразием пара-сасаки называется нормальное параконтактное метрическое многообразие.

Назовем почти параконтактное метрическое многообразие почти квази-пара-сасакиевым многообразием (*AQPS*-многообразием), если выполняются следующие условия: $d\Omega = 0$, $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, $d\eta(\vec{\xi}, \cdot) = 0$. Многообразие, для которого выполняется условие $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, названо нами почти нормальным многообразием.

Таким образом, почти нормальное многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Замечание 1. В работе [11] введено понятие интегрируемой допустимой тензорной структуры. В той же работе было доказано, что почти контактная метрическая структура почти нормальна тогда и только тогда, когда поле структурного эндоморфизма представляет собой интегрируемую тензорную структуру.

Пусть P:$TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \otimes D^\perp$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 2. Для любого почти параконтактного метрического многообразия выполняется следующее равенство: $PN^{(1)}_{\varphi} = \widetilde{N}_{\varphi}$.

Отметим, что выполняется следующее соотношение:

$$N^{(1)}_{\varphi}(X,Y) = \widetilde{N}_{\varphi}(X,Y) - 2(d\eta(X,Y) + d\eta(\varphi X, \varphi Y))\vec{\xi}\ .$$

Приведем два примера почти параконтактных метрических многообразий.

Пример 1. Пусть $M = \{(x,y,z,u,v) \in R^5 : y \neq 0\}$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти параконтактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь: 1) $D = < \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - y\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ — естественный базис пространства R^5, 2) $\vec{\xi} = \partial_5$, 3) $\eta = dz + ydx$, 4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi} = 0$, 5) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = g_{55} = 1$. Если $i \neq j$, то $g_{ij} = 0$. Непосредственно проверяется, что почти контактное многообразие M не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N^{(1)}_{\varphi}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \varphi^2[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [\vec{e}_3, \vec{e}_4] - \varphi[\vec{e}_3, \vec{e}_2] - 2d\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\vec{\xi} = \eta([\vec{e}_1, \vec{e}_2]) = \eta(\vec{\xi})\vec{\xi} = \vec{\xi}\ .$$

Таким образом, рассматриваемая структура не является нормальной структурой. В то же время $\widetilde{N}_{\varphi}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2d\eta(\vec{e}_3, \vec{e}_4)\vec{\xi} = 0$. Тем самым мы имеем дело с почти нормальной структурой. Далее, пусть теперь структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ отличается от рассматриваемой ранее структуры другим заданием эндоморфизма $\varphi : \varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_2 = -\vec{e}_2$, $\varphi\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_4$, $\varphi\vec{\xi} = 0$ и другим заданием метрического тензора: $g_{14} = g_{41} = -g_{23} = -g_{32} = g_{55} = 1$. Для этой структуры $d\eta = -\varphi^* d\eta$. Действительно, $d\eta(\varphi\vec{e}_1, \varphi\vec{e}_1) = -d\eta(\varphi\vec{e}_1, \varphi\vec{e}_1)$.

Пример 2. Пусть D — распределение субриманова многообразия контактного типа [15]. Адаптированной карте $k(x^i)$ многообразия M поставим в соответствие адаптированную карту $\tilde{k}(x^I)$. $(x^I) = (x^i, x^{n+a})$. Если $\vec{p} \in D_x$, то $\tilde{k} : \vec{p} \to (x^i, x^{n+a})$, где $\vec{p} = x^{n+a}\vec{e}_a$.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - \Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}$, ∂_n, $\partial_{n+a}) = (A_I)$ определяют [16] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a$, $\Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc}x^{n+c}dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов

Пусть ∇ — внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена $R(X, Y)Z$.

Определим на многообразии D почти параконтактную структуру $(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $JX^h = X^v$, $JX^v = X^h$. Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Определим далее на многообразии M метрику $\tilde{g}$, посредством равенства:

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = -\tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X,Y),\ \tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0\ .$$

Легко проверяется, что структура $(\widetilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n$, $\lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти параконтактной метрической структурой. Более того, если M — субриманово многообразие с нулевым тензором Схоутена, то продолженная почти параконтактная метрическая структура $(\widetilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти квази-пара-сасакиевой структурой.

Как известно, для нормальных почти параконтактных многообразий справедливы следующие равенства [6]:

$$N^{(1)}_{\varphi}(X,Y) = N_{\varphi}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\vec{\xi} = 0; \qquad (1)$$

$$N^{(2)}_{\varphi}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)\xi X = 0; \qquad (2)$$

$$N^{(3)}_{\varphi}(X) = (L_{\vec{\xi}}\varphi)X = 0; \qquad (3)$$

$$N^{(4)}_{\varphi}(X) = (L_{\vec{\xi}}\eta)X = 0\ . \qquad (4)$$

При этом равенство (1) влечет равенства (2)–(4).

Следующие два предложения уточняют приведенное выше утверждение в случае почти нормальной структуры.

Предложение 3. Пусть M — почти нормальное почти параконтактное многообразие, тогда равенство

$$\widetilde{N}_{\varphi}(X,Y) = N_{\varphi}(X,Y) + d\eta(\varphi X, \varphi Y)\vec{\xi} = 0 \qquad (5)$$

влечет выполнение равенств (3), (4).

Доказательство. Подставляя в равенство (5) $Y = \vec{\xi}$, получаем:

$$0 = N_{\varphi}(X, \vec{\xi}) = \varphi^2[X, \vec{\xi}] - \varphi[\varphi X, \vec{\xi}] = \varphi((L_{\vec{\xi}}\varphi)X)$$

или, $N^{(3)}_{\varphi}(X) = (L_{\vec{\xi}}\varphi)X = 0$. Обратимся к равенству (4). Имеем:

$$(L_{\vec{\xi}}\eta)X = d\eta(\vec{\xi}, X) + X\eta(\vec{\xi}) = d\eta(\vec{\xi}, X) = 0.$$

Предложение 4. Пусть M — почти нормальное почти параконтактное многообразие, тогда равенство $N^{(2)}_{\varphi}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Справедливость предложения 4 подтверждается равенством

$$(L_{\varphi X}\eta)Y = d\eta(\varphi X, Y).$$

2. Почти контактные кэлеровы многообразия с канонической кососимметрической связностью

На субримановом многообразии, наделенном эндоморфизмом $N{:}TM \to TM$ касательного расслоения многообразия M, определим продолженную N-связность $\dot{\nabla}$, следующим образом выражающуюся через связность Леви-Чивита ∇:

$$\dot{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + (\widetilde{\nabla}_X \eta)(Y)\vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N)Y .$$

Имеет место

Предложение 5. Линейная связность $\dot{\nabla}$, заданная на субримановом многообразии контактного типа, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты G^i_{jk} связности $\dot{\nabla}$ имеют вид

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),\ G^b_{na} = N^b_a,\ G^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a.$$

Тензор кручения $S(X, Y)$ связности $\dot{\nabla}$ имеет следующий вид:

$$S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX,$$
$$X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Его не нулевые компоненты представлены в адаптированных координатах следующим образом:

$$S^n_{ab} = 2\omega_{ab},\ S^b_{na} = N^b_a.$$

Положим $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z),\ X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M. В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X,Y,Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_a, \partial_n) = 2\omega_{ab},$$
$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$
$$\tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Тензор $\tilde{S}(X,Y,Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$. Тем самым предложение 5 доказано.

В случае, когда $N = 2\psi$, связность $\dot{\nabla}$ будем называть канонической связностью.

Заметим, что каноническая связность в случае субримановой структуры четного ранга не является метрической связностью. Действительно, $\dot{\nabla}_n g_{na} = -G^n_{na} = \partial_n \Gamma^n_a$.

Пусть $K(X, Y, Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ тензор кривизны канонической связности $\dot{\nabla}$. Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X, Y, Z)$. Имеем:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} + 4\omega_{ab}\psi^d_c.$$
$$K^d_{anc} = 2\nabla_a \psi^d_c.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [16], определяемого равенством

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y \vec{Z} - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y],Z],\ Q = 1 - P.$$

Инвариантное представление тензора $K(X,Y)\vec{Z}$ имеет вид:

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(Y)(\nabla_X N)Z - \eta(X)(\nabla_Y N)Z + 4\omega(X,Y)\psi(Z),\ X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Тензорное поле $\mathrm{r}(X,Y) = \mathrm{tr}(Y \to R(X,Y)Z, X,Y,Z \in \Gamma(D)$ будем называть тензором Риччи — Схоутена.

Назовем почти квази-сасакиево многообразие η-Эйнштейновым многообразием относительно канонической связности, если выполняется равенство $k = \lambda g + \mu\eta \otimes \eta,\ \lambda,\ \mu \in R$.

Используя адаптированные координаты, выпишем компоненты тензора Риччи $k(X, Y)$ связности ∇^N:

$$k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{ad}\psi^d_b,$$
$$k_{an} = k_{nn} = 0,$$
$$k_{na} = -\nabla_d \psi^d_a.$$

Из определения эндоморфизма ψ следует, что равенство $\nabla\omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\nabla\psi = 0$. Таким образом, компоненты тензора Риччи $k(X, Y)$ связности $\dot{\nabla}$ с параллельным эндоморфизмом ψ принимают вид:

$$k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{ad}\psi^d_b,$$
$$k_{an} = K_{na} = K_{nn} = 0.$$

Тем самым оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. Почти квази-пара-сасакиево многообразие является η-Эйнштейновым многообразием относительно канонической связности с параллельным эндоморфизмом ψ тогда и только тогда, когда

$$\lambda + \mu = 0,$$
$$\mathrm{r}(X,Y) + 4\omega(X,\psi Y) = \lambda g(X,Y).\ X,Y \in \Gamma(D).$$

Заключение

Как следует из теоремы, существование η-Эйнштейновой метрики на почти квази-сасакиевом многообразии относительно канонической связности существенно зависит от строения тензора Риччи —

Схоутена — комитанта тензора кривизны Схоутена. Представляется интересным исследовать зависимость геометрии почти (пара)контактных метрических многообразий от строения тензора кривизны Схоутена.

Библиографический список

1. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского ун-та. Новая серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. №3. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.

2. Галаев С.В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 3. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.310.

3. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестник Башкирского ун-та. 2016. Т. 21. № 3.

4. Agricola I., Ferreira A.C. Einstein manifolds with skew torsion // Q. J. Math. 2014. Vol. 65. № 3. DOI: 10.1093/qmath/hat050.

5. Friedrich T., Ivanov S. Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory // AsianJ. Math. 2002. Vol. 6. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0102142.

6. Zamkovoy S. Canonical connections on paracontact manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom. 2009. Vol. 36. https://doi.org/10.48550/arXiv.0707.1787.

7. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. Birkhäuser. Boston. 2002. Vol. 203.

8. Kanemaki S. Quasi-Sasakian manifolds // Tohoku Math. J. 1977. Vol. 29.

9. Букушева А.В. Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 64. DOI: 10.17223/19988621/64/1.

10. Küpeli Erken I. Curvature Properties of Quasi-Para-Sasakian Manifolds // International electronic journal of geometry. 2019. Vol. 12. № 2. https://doi.org/10.48550/arXiv.1807.04138.

11. Blair D.E. The theory of quasi-Sasakian structures // J. Differential Geom. 1967. Vol. 1.

12. Olszak Z. Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds // Tensor. 1982. Vol. 38. https://doi.org/10.48550/arXiv.1209.5886.

13. Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank 2p + 1 // J. Differential Geom. 1971. Vol. 5.

14. Welyczko J., On Legendre Curves in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric // Manifolds. Result. Math. 2009. Vol. 54. https://doi.org/10.1007/s00025-009-0364-2.

15. Букушева А.В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2015. № 46.

16. Galaev S.V Intrinsic geometry of almost contact kählerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31.