МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.6: 339.137.2

Об особенностях подходов к исследованию моделей коллективного поведения на конкурентных рынках

Ю.Г. Алгазина[1], *Д.Г. Алгазина*[2]

[1]Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)
[2]Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Approaches to Studying Collective Behavior Models in Competitive Markets: Peculiarities and Insights

Yu.G. Algazina[1], *D.G. Algazina*[2]

[1]Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)
[2]Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается проблема достижения равновесия Нэша на рынке олигополии при отсутствии общего знания с применением рефлексивных повторяющихся игр и моделей динамики коллективного поведения. Обсуждаются два подхода, которые направлены на исследование условий сходимости динамик для случая линейной модели олигополии с произвольным числом агентов, рефлексирующих по Курно или Штакельбергу. Первый подход основан на применении функций-индикаторов, которые указывают агентам, в какую сторону им следует изменять собственные выпуски, чтобы достичь оптимума при существующих выпусках конкурентов. Второй подход основан на применении норм матриц перехода от итерации к итерации в вычислительном процессе. Приведены результаты авторских исследований и модельных вычислительных экспериментов, необходимые математические леммы и утверждения. Показаны особенности подходов, касающиеся условий на индивидуальный выбор агентов, выполнение которых гарантирует сходимость к равновесию динамик коллективного поведения для дуополии и произвольного числа агентов на рынке; критериев сходимости динамик; вычислений функций-индикаторов и норм матриц перехода.

Ключевые слова: олигополия, рефлексивное коллективное поведение, функции-индикаторы, нормы матриц перехода, вычислительные эксперименты.

The paper addresses the problem of achieving Nash equilibrium in an oligopoly market where common knowledge is absent. It explores two approaches to study the convergence conditions of the dynamics in a linear oligopoly model with any number of Cournot or Stackelberg reflexive agents.

The first approach utilizes indicator functions to guide agents in adjusting their outputs to reach the optimum under existing competitors' outputs. The second approach uses norms of transition matrices from iteration to iteration in the computational process. The paper presents the authors' research results, including necessary mathematical lemmas and statements, and computational experiments with the models.

The paper emphasizes several important features of the approaches, such as the conditions for individual agent choices that ensure the convergence to equilibrium of collective behavior dynamics for duopoly and any number of agents in the market, the convergence criteria of the dynamics, and the calculation of indicator functions and norms of transition matrices.

Key words: oligopoly, reflexive collective behavior, indicator functions, norms of transition matrices, computational experiments.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-12

Введение

Многочисленные исследования олигопольных рынков свидетельствуют об отсутствии общего знания среди их участников (агентов) (см., например, [1–3]). В условиях конкуренции агенты не заинтересованы раскрывать конкурентам информацию, являющуюся существенной для принятия ими решений. Эксперименты показывают [4], что достижению общего знания также могут препятствовать ограниченные когнитивные и вычислительные возможности агентов, отсутствие уверенности одних агентов в том, что другие агенты имеют заинтересованность в нем и будут стремиться к нему, неполная и асимметричная информированность.

Отсутствие общего знания приводит к тому, что каждый агент, желая максимизировать свою целевую функцию, следует в рамках своей информированности некоторой повторяемой процедуре принятия индивидуальных решений. Наилучшее действие (решение) агента зависит в общем случае от того, какое действие выберет любой другой агент, что трудно однозначно знать априори, и поэтому он вынужден рефлексировать, т.е. предсказывать поведение конкурентов и выбирать свои действия уже с учетом своего прогноза. Определяющим эффектом рефлексии является достижение равновесия.

Теоретической основой для построения и исследования рефлексивных процессов являются теория игр [1] и теория коллективного поведения [5]. Они дополняют друг друга тем, что рефлексивные игры позволяют использовать процедуры коллективного поведения и результаты размышлений агентов, приводящие к равновесию Нэша [6].

Цель настоящей статьи — проведение сравнительного анализа двух подходов, направленных на исследование вычислительных процедур коллективного поведения для случая линейной модели олигополии. Один из подходов основан на применении функций-индикаторов, другой — норм матриц перехода между итерациями в вычислительном процессе.

Работы в этом направлении являются актуальными ввиду значимости понимания процессов принятия решений на реальных современных конкурентных рынках и сближения с ними теоретических моделей.

Модель олигополии

Рассматривается модель олигополии, состоящей из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов с целевыми функциями

$$\Pi_i\,(p(Q), q_i) = p(Q)\, q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \tag{1}$$

линейными функциями затрат

$$\phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i \tag{2}$$

и линейной обратной функцией спроса

$$p(Q) = a - bQ. \tag{3}$$

Здесь: $i \in N = \{1,\ldots,n\}$, q_i — выпуск i-го агента, $Q = \sum_{i\in N} q_i$ — суммарный объем выпуска агентов, c_i, d_i — предельные и постоянные издержки i-го агента, $p(Q)$ — рыночная цена, a, b — параметры спроса. Состояние олигополии в момент времени t (t = 0, 1, 2, ...) задается вектором $q^t = (q_1^t,\ldots q_i^t,\ldots q_n^t)$.

Пусть смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [5] — в каждый момент времени (t + 1) каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов в предыдущий момент времени t и изменяет свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$, следуя следующей итерационной процедуре

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t),\ i \in N. \tag{4}$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0;1]$ — параметр, независимо выбираемый каждым i-м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели.

Текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ — такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [7]. Здесь $q_{-i}^t = (q_1^t,\ldots,q_{i-1}^t,q_{i+1}^t\ldots,q_n^t)$ — обстановка i-го агента, вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t, за исключением i-го агента.

Агент может отвечать на действия конкурентов одним из двух способов: 1) рефлексировать по Курно [8]; 2) рефлексировать по Штакельбергу [9].

Обозначим: N_c — множество агентов с рефлексией по Курно, N_s — множество агентов с рефлексией по Штакельбергу; $N_c \cup N_s = N$ и $N_c \cap N_s = \varnothing$, $|N_c| = n_c$, $|N_s| = n_s$, $n_c + n_s = n$.

Агент с рефлексией по Курно, точно зная выпуски q_{-i}^t остальных агентов в предыдущий момент времени и не ожидая их изменения в текущий момент времени, рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле (см., например, [10, 11]).

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2} \quad (i \in N_c). \tag{5}$$

Агент $i \in N_s$ с рефлексией по Штакельбергу, зная выпуски q_{-i}^t остальных агентов в предыдущий момент времени и ожидая от них поведения по Курно, полагает, что в точности знает реакцию остальных агентов на свои действия, и рассчитывает текущее положение цели по формуле [10, 11]:

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{n(h_i - Q_{-i}^t)}{1+n} \quad (i \in N_s). \tag{6}$$

Здесь: $h_i = \dfrac{a - c_i}{b}$, $Q_{-i}^t = \sum_{j \neq i} q_j^t$ — суммарный выпуск «окружением» i-го агента.

В модели (1)–(3), как в игре в нормальной форме, равновесие Нэша $q^* = (q_1^*, ..., q_i^*, ..., q_n^*)$, понимаемое как статическое, существует и единственно. Равновесие динамики (4)–(6) является статическим равновесием q^*, но не всегда достижимо. Условия сходимости относятся к параметрам γ_i^{t+1}, числу агентов и начальным приближениям $q^0 = (q_1^0, ..., q_i^0, ..., q_n^0)$. Полагаем также, что $q^0 > 0$ и агенты конкурентоспособны в равновесии, т. е. $q_i^* > 0 \ \ \forall i \in N$.

Функции-индикаторы агентов

Функцию $\alpha_i^t(q)$ называют функцией-индикатором i-го агента, если при $q_i^t < x_i(q_{-i}^t)$ имеет место $\alpha_i^t(q) > 0$, а при $q_i^t > x_i(q_{-i}^t)$ — $\alpha_i^t(q) < 0$ [7]. Функция-индикатор указывает агенту, в какую сторону ему следует изменять собственный выпуск, чтобы достичь оптимума при существующих выпусках конкурентов.

Введем функции-индикаторы [10] $\alpha_i^t = 2(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t)$, характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов для агентов с реакцией по Курно ($i \in N_c$) и $\alpha_i^t = \dfrac{1+n}{n}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t)$ для лидеров ($i \in N_s$).

В следующей лемме и утверждении приведены условия сходимости процесса, полученные с применением функций-индикаторов [10].

Лемма 1. *Вектор действий агентов $q^t = (q_1^t, ..., q_i^t, ..., q_n^t)$ является статичным равновесием $q^* = (q_1^*, ..., q_i^*, ..., q_n^*)$ модели олигополии (1)–(3) тогда и только тогда, когда $\quad = \ \forall i \in N$.*

Лемма показывает, что α_i^t можно рассматривать также в качестве оценки «удаленности» агентов от положения равновесия.

Утверждение 1. *В олигополии (1)–(3) процесс (4)–(6) сходится к равновесию при любых начальных выпусках агентов $\left\{q_i^0, i \in N = \{1, ..., n\}, n \geq 2\right\}$, если начиная с некоторого момента времени t_0 при $t > t_0$*

$$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n_+^t}\right] (i \in N_c \cap N_+^t), \ \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n_-^t}\right] (i \in N_c \cap N_-^t), \tag{7}$$

$$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1+n}{1+nn_+^t}\right] (i \in N_s \cap N_+^t), \ \gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{1+n}{1+nn_-^t}\right] (i \in N_s \cap N_-^t). \tag{8}$$

Здесь $N_+^t (N_-^t)$ — множество положительных (отрицательных) членов в последовательности $\{\alpha_i^t\}$, $n_+^t (n_-^t)$ — число положительных (отрицательных) членов в последовательности $\{\alpha_i^t\}$.

Нормы матриц перехода

Для определенности полагаем, что первые n_s агентов действуют по Штакельбергу, остальные — по Курно и $q^t = (q_1^t, ..., q_{n_s}^t, q_{n_s+1}^t, ..., q_n^t)$.

В дальнейшем более удобной будет замена параметров

$$\lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}, \ i \in N_c; \ \lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n}, i \in N_s. \tag{9}$$

Для итерационного процесса (4)–(6) погрешность $\partial^t = (\partial_1^t, \partial_2^t, ..., q_n^t)' = (q_1^t - q_1^*, q_2^t - q_2^*, ..., q_n^t - q_n^*)'$ (q' — вектор-строка, транспонированная к q) удовлетворяет однородному уравнению $\partial^{t+1} = B^t \partial^t$ ($t = 0, 1, 2, ...$) [11], где B^t — матрица перехода от от t-го к (t +1)-му моменту времени клеточного вида

$$B^t = \begin{pmatrix} B_s^t & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & B_c^t \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$B_s^t = \begin{pmatrix} 1-(1+n)\lambda_1^{t+1}/n - \lambda_1^{t+1} & \ldots & -\lambda_1^{t+1} \\ -\lambda_2^{t+1} \quad 1-(1+n)\lambda_2^{t+1}/n & \ldots & -\lambda_2^{t+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ -\lambda_{n_s}^{t+1} \quad -\lambda_{n_s}^{t+1} & \ldots & 1-(1+n)\lambda_{n_s}^{t+1}/n \end{pmatrix}, \ B_c^t = \begin{pmatrix} 1-2\lambda_{n_s+1}^{t+1} & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} & \ldots & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} \\ -\lambda_{n_s+2}^{t+1} & 1-2\lambda_{n_s+2}^{t+1} & \ldots & -\lambda_{n_s+2}^{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_n^{t+1} & -\lambda_n^{t+1} & \ldots & 1-2\lambda_n^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Норма вещественной матрицы B, имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $\|B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$. Евклидова норма вектора x определяется как $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$. Тогда

$$\left\|B^t(\lambda^{t+1})\right\| = \max_{\left\|x^t\right\|=1} \sqrt{\sum_{i\in N_s}\left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_s}\left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]^2}, \quad (11)$$

где x^t — произвольный единичный вектор, $\lambda^{t+1} = (\lambda_1^{t+1},...,\lambda_i^{t+1},...,\lambda_n^{t+1})$.

Требование неотрицательности текущих выпусков агентов, естественное с точки зрения экономических ограничений, может быть учтено в процессе вида

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \quad (12)$$

В терминах нормы матрицы перехода B^t приведем следующий важный результат о сходимости итерационных процессов [11].

Утверждение 2. *Если начиная с некоторого момента t_0 $\left\|B^t(\lambda^{t+1})\right\| < 1$, то процесс (4)–(6) и процесс (12), (5)–(6) сходятся при любом начальном приближении q^0.*

По этому утверждению, если для процесса (4)–(6) норма матрицы перехода меньше единицы, то будет сходиться также и процесс, в котором не допускаются отрицательные текущие выпуски. При этом подход дает простой критерий сходимости по норме: норма матрицы перехода должна быть меньше единицы, начиная с некоторого момента времени [11].

Для линейной модели олигополии с произвольным числом рациональных агентов, независимо выбирающих шаги $\gamma_i^{t+1} \in [0;\ 1]$, критерий по норме не всегда может быть выполнен.

Сравнительный анализ подходов

Вначале особенности подходов рассмотрим применительно его частному случаю — дуополии.

На основе функций-индикаторов выведено следующее следствие из утверждения 1 [11].

Следствие 1. *В дуополии (1)–(3) процесс (4)–(6) и процесс (12), (5)–(6) сходятся к положению равновесия при $\gamma_i^{t+1} \in (0;\ 1] (i \in N,\ t = 0,\ 1,\ 2,...)$ и любых начальных условиях $q^0 > 0$, независимо от того, агент рефлексирует по Курно или по Штакельбергу.*

Для линейной модели дуополии имеет место следующее утверждение, полученное с применением норм матриц перехода [11].

Утверждение 3. *Если в дуополии Курно агенты, начиная с некоторого момента времени t_0, выбирают шаги в диапазоне $\lambda_1^{t+1},\ \lambda_2^{t+1} \in [0{,}068;\ 0.5]$ (или $\gamma_1^{t+1},\ \gamma_2^{t+1} \in [0{,}136;\ 1]$), то $\left\|B^t\right\| < 1$. Поэтому процесс (4)–(6) и процесс (12), (5)–(6) сходятся.*

Ограничение диапазона шагов в утверждении 3 обусловлено тем обстоятельством, что если один агент выбирает параметр λ, равным или близкими к нулю, а другой — ближе к верхней границе диапазона, то заведомо $\left\|B^t\right\| > 1$, т. е. не выполняется критерий по норме. Поясним на следующем примере. Пусть $n = 2$ и $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Тогда, полагая $x_1^t = 1,\ x_2^t = 0$, по (11) имеем

$$\left\|B^t\right\| = \max_{\left\|x^t\right\|=1} \sqrt{(x_1^t)^2 + [x_2^t - \lambda_2(x_2^t + x_1^t + x_2^t)]^2} = \sqrt{1 + (\lambda_2)^2} > 1.$$

Для модели олигополии с числом агентов больше двух такого рода ограничения проявляются в большей мере.

В более общем случае рынка функции-индикаторы с учетом (4)–(6), (9) вычисляются из соотношений

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \lambda_i^{t+1}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t,\ i \in N_c,\quad \alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\lambda_i^{t+1}}{n}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N} \lambda_j^{t+1}\alpha_j^t,\ i \in N_s.$$

Пока отсутствует универсальный аппарат вычисления норм матриц по (11), но, как показано в [11], выполнимость условия может быть установлена универсальными вычислительными методами проверки на положительную определенность матриц.

Пример. В таблице приведен фрагмент числового примера процесса (4)–(6) с расчетом функций-индикаторов агентов и норм матриц перехода. На рынке четыре агента, из которых первые два агента являются лидерами по Штакельбергу, другие два — ведомыми по Курно.

В расчетах значения параметров λ полагаются равными верхним границам диапазонов сходимости процесса, которые приведены в (7) и (8) для утверждения 1. Смена значений λ обусловлена изменением знаков членов в последовательностях $\left\{\alpha_i^t\right\}$. Так, на пятой итерации знак α_4^5 изменился с «–» на «+», а на седьмой, наоборот, с «+»на «–», что вызвало перерасчет λ_i^6 и λ_i^8 соответственно. Также смена знаков некоторых функций-индикаторов произошла на девятнадцатой и двадцать первой итерациях. На сходимость процесса указывает то, что $\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при возрастании t.

Здесь нормы матриц перехода вычисляются по тем же значениям параметров λ, что и функции-индикаторы. Приведем расчет нормы на первой итерации. Имеем

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = 0{,}4,\ \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 0{,}33.$$

Пусть $f(\lambda^{t+1})$ подкоренное выражение в (11). Тогда

$$f(\lambda^1) = [x_1^0 - 0,4(0,25x_1^0 + x_1^0 + x_2^0)]^2 + [x_2^0 - 0,4(0,25x_2^0 + x_1^0 + x_2^0)]^2 + \\ +[x_3^0 - 0,33(x_3^0 + x_3^0 + x_4^0)]^2 + [x_4^0 - 0,33(x_4^0 + x_3^0 + x_4^0)]^2.$$

Далее получаем, что

$$f(\lambda^1) = 0,41\left[(x_1^0)^2 + x_2^0)^2\right] - 0,8x_1^0x_2^0 + 0.22\left[(x_3^0)^2 + x_4^0)^2\right] - 0,44x_3^0x_4^0.$$

С учетом условия $\left\|x^0\right\|^2 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 + (x_4^0)^2 = 1$ имеем, что максимум квадратичной формы *f* равен 0,41. Таким образом, $\left\|B^1\right\| = 0,64$. Критерий сходимости выполнен.

Фрагмент процесса с расчетом функций-индикаторов и норм матриц перехода

Итерации	Параметры шагов								Значения функций-индикаторов				$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$	$\left\|B\right\|$
t	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	α_1	α_2	α_3	α_4		
0									20	-50	30	-18	80,00	
1	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	24	-32	28	-4	60,00	0,64
2	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	14,4	-30,4	13,9	-7,47	44,27	0,64
3	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	15,8	-20,1	13,5	-0,71	33,56	0,64
4	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	10,1	-18,6	6,45	-3,03	25,05	0,64
5	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	10,3	-12,6	6,57	0,25	22,94	0,64
6	0,29	0,67	0,25	0,33	0,36	0,83	0,50	0,67	12,6	-4,68	8,66	3,89	17,26	0,92
7	0,29	0,67	0,25	0,33	0,36	0,83	0,50	0,67	6,85	-7,06	2,56	-1,34	13,90	0,92
8	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	5,16	-5,97	1,38	-1,21	11,12	0,64
9	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	4,39	-4,5	1,19	-0,54	8,90	0,64
10	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	3,34	-3,77	0,62	-0,53	7,12	0,64
11	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	2,82	-2,88	0,56	-0,21	5,69	0,64
12	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	2,16	-2,39	0,28	-0,23	4,56	0,64
13	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	1,81	-1,84	0,26	-0,08	3,64	0,64
14	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	1,4	-1,52	0,13	-0,1	2,92	0,64
15	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	1,16	-1,17	0,13	-0,03	2,33	0,64
16	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	0,9	-0,97	0,06	-0,04	1,87	0,64
17	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	0,74	-0,75	0,06	-0,01	1,49	0,64
18	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	0,58	-0,61	0,03	-0,02	1,19	0,64
19	0,4	0,4	0,33	0,33	0,50	0,50	0,67	0,67	0,48	-0,48	0,03	-0	0,96	0,64
20	0,29	0,67	0,25	0,33	0,36	0,83	0,50	0,67	0,58	-0,14	0,2	0,18	0,73	0,92
21	0,29	0,67	0,25	0,33	0,36	0,83	0,50	0,67	0,32	-0,28	-0	-0,06	0,60	0,92
22	0,33	0,29	0,25	0,25	0,42	0,36	0,50	0,50	0,26	-0,24	-0	-0,05	0,50	0,86
23	0,33	0,29	0,25	0,25	0,42	0,36	0,50	0,50	0,22	-0,21	-0	-0,04	0,43	0,86
24	0,33	0,29	0,25	0,25	0,42	0,36	0,50	0,50	0,18	-0,18	-0	-0,03	0,36	0,86
25	0,33	0,29	0,25	0,25	0,42	0,36	0,50	0,50	0,15	-0,15	-0	-0,02	0,30	0,86

Заключение

На сегодняшний день не существует универсального аппарата аналитических решений для широкого круга задач коллективного поведения агентов на конкурентных рынках. Особенно важным представляется развитие экспериментальных исследований, поиска рациональных решений и общих закономерностей на основе анализа результатов вычислительных экспериментов. Рассматриваются два из возможных подходов к исследованию моделей рефлексивного коллективного поведения. Один основан на использовании агентами функций-индикаторов, другой — норм матриц перехода от *t*-го к (*t*+1)-му моменту времени в вычислительном процессе. Представлены результаты сравнительного анализа подходов по условиям сходимости процессов, критериям сходимости, вычислениям функций-индикаторов и норм матриц перехода. Результаты могут иметь теоретическое и прикладное значение для понимания, оперативного реагирования и регулирования группового поведения на современных конкурентных рынках.

Библиографический список

1. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden, 2014.

2. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами: М., 2020. Вып. 85.

3. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 362. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.049.124535.

4. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. Princeton: Princeton University Press, 1995.

5. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М., 1977.

6. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. № 54.

7. Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. М., 1998.

8. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London, 1960. (Original 1838).

9. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium New York, 2011. (Original 1934).

10. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. № 21 (2). DOI:10.15622/ia.21.2.5.

11. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Automation and Remote Control. 2022 Vol. 83 (3).