УДК 539.31

Модуль упругости как функция процесса в наследственной механике

П.П. Рымкевич, О.В. Рымкевич

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург, Россия)

Modulus of Elasticity as a Function of a Process in Hereditary Mechanics

P.P. Rymkevich, O.V. Rymkevich

Mozhaisky Military Space Academy (Saint-Petersburg, Russia)

Рассмотрена проблема определения модуля упругости для полимерных материалов. Отмечено: сложность измерения связана с тем, что данные материалы подчиняются законам вязкоупругости. Применен метод Больцмана — Вольтерра к рассмотрению поведения наследственно-упругого тела, а именно к синтетическим нитям. Показано, что модуль упругости для полимерных материалов не является постоянной величиной. В частности, он зависит от частоты воздействия при деформации материала. Особо отмечено, что модуль упругости является не функцией состояния, а функцией процесса. В связи с этим необходимо рассматривать различные режимы деформации, а именно статический, акустический и динамический. Введены и даны физические объяснения понятиям статического, динамического, акустического модуля упругости с точки зрения принципа наследственности Больцмана. Указаны границы применимости принципа наследственности Больцмана. Произведен анализ применимости уравнения Больцмана к динамическим механическим процессам методом иерархии времен релаксации и методом линеаризации. Введено понятие ядра взаимодействия статической и динамической частей деформации. Уравнение наследственности Больцмана представлено в новом виде.

Ключевые слова: модуль упругости, вязкоупругость, динамический и статический режимы, метод линеаризации динамической задачи, метод иерархии времен релаксации, принцип наследственности Больцмана.

The article considers the problem of determining the modulus of elasticity for polymer materials. The measurement process of these materials is considerably complex, mainly due to the fact that they comply with the laws of viscoelasticity. The Boltzmann — Volterra method is applied to the consideration of the behavior of a hereditarily elastic body, namely, to synthetic threads. We revealed that the elastic modulus for polymer materials is not a constant value and depends on the frequency of exposure during the deformation of the material. It is particularly noted that the modulus of elasticity is not a function of the state, but a function of the process. In this regard, it is necessary to consider various modes of deformation, namely static, acoustic, and dynamic modes. The Boltzmann heredity principle is utilized to provide a clear understanding of the concepts of static, dynamic, and acoustic modulus of elasticity. Furthermore, the applicability of the Boltzmann equation to dynamic mechanical processes is analyzed using two methods — the hierarchy of relaxation times and the method of linearization. In addition, the concept of the interaction core of static and dynamic parts of deformation is introduced. This concept helps to explain the relationship between the static and dynamic moduli of elasticity and their impact on material properties.

Key words: modulus of elasticity, viscoelasticity, dynamic and static modes, method of linearization of a dynamic problem, the method of hierarchy of relaxation times, Boltzmann heredity principle.

DOI: 10.14258/izvasu(2023)1-07

Введение

При описании механических свойств большинства твердых тел основными характеристиками являются: модуль упругости E, модуль сдвига G, вязкость η, твердость материалов по Бринеллю $H_б$ и ряд других, таких как предел прочности, предел текучести и др. С физической точки зрения все они являются функциями состояния твердого тела. В линейной теории упругости модули упругости и сдвига определяются через постоянную Ламе. В нелинейной механике деформируемых твердых тел рассматриваются аналогичные характеристики [1]. Однако использование подобных понятий для полимерных материалов является проблематичным. Это обусловлено характерным отличием полимерных структур от низкомолекулярных материалов, которое заключается в том, что поведение полимерных материалов подчиняется законам вязкоупругости. Покажем это на примере синтетических нитей, имеющих широчайшее применение в технике.

Наиболее общим методом описания вязкоупругих свойств синтетических нитей является метод, основанный на решении уравнения наследственности Больцмана — Вольтерра [2–3]. Применим этот метод к рассмотрению поведения наследственно-упругого тела, к которому относятся и синтетические нити, под действием периодического возмущения, например, периодического деформирования.

Методы исследования

Принцип наследственности Больцмана и пределы его применимости

Определяющее уравнение нелинейной вязкоупругости наиболее часто записывается в симметричном виде Персо с нормированным ядром релаксации и ползучести [4]. Например,

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) - (E_0 - E_\infty)\int_0^t r_{\text{Н}}(\varepsilon, t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta, \quad (1)$$

где $r_{\text{Н}}(\varepsilon, t)$ — в общем случае нелинейное нормированное наследственное ядро релаксации (для соблюдения общей нормировки ниже индекс «Н» у ядра будет означать нормировку на ту или иную часть спектра); E_0 — отдельно выделенная сингулярная часть ядра — модуль упругости; E_∞ — модуль вязкоупругости. Часть материалов имеет свойство затухающей памяти, которое описывается, согласно принципу Больцмана, с помощью интегральных уравнений типа Вольтерра. Поэтому ядро в данном интегральном уравнении носит название ядра релаксации, если описывает процесс релаксации механического напряжения, или ядром ползучести, если описывает ползучесть материалов.

В силу нормировки очевидно, что

$$\int_0^\infty r_{\text{Н}}(\varepsilon, \Theta)d\Theta = 1. \quad (2)$$

Обычно в нелинейной теории вязкоупругости величины E_0 и E_∞ считаются константами для различных материалов, зависящими от температуры и других внешних условий, например, влажности. Другими словами, функциями состояния. Однако последние исследования в этой области показали, что это не так [5–8]: значения E_0 и E_∞ не являются постоянными величинами.

Полимерные материалы, используемые в различных отраслях промышленности, подвергаются не только статическим нагрузкам, но и динамическим, в том числе периодическим воздействиям. В работе [9] установлено, что у ряда высокоориентированных полимерных нитей в режиме периодических динамических воздействий наблюдаются амплитудные модуляции, которые позволили выявить различающиеся механизмы вязкоупругости исследованных полимерных изделий. Выявленные механизмы вязкоупругости подробно рассмотрены в исследованиях [10–11]. На основании изучения выявленного эффекта амплитудных модуляций было предложено новое определяющее уравнение вязкоупругого поведения ориентированных полимеров [12] и нелинейные реологические модели [13].

В работах [14–15] для описания поведения ориентированных полимеров введено понятие кванта деформации и рассмотрена кинетика переходов структурных групп макромолекул через потенциальный барьер.

В работе [16] предложен метод усреднения физических величин на основе закона нормального распределения. Предложенный метод усреднения позволяет ввести новое коммутативное кольцо, обладающее ценным свойством [17]. Например, среднее от произведения представляет собой произведение средних величин.

Рассмотренные выше исследования и полученные в них экспериментальные и теоретические результаты позволили создать основу для дальнейшего развития методов прогнозирования деформационных свойств ориентированных полимеров, а также описания эффектов, наблюдаемых при их деформировании. Особенность этих результатов: модули E_0 и E_∞ переменные величины, являющиеся функциями частоты воздействия, т.е. функциями процесса. Ниже приведено физическое объяснение полученным результатам.

Чаще всего ядра релаксации исследуют с помощью обобщенной модели Максвелла. Обобщенная модель Максвелла представляет собой бесконечное параллельное соединение элементов Максвелла, каждый из которых состоит из последовательно соединенных поршня и пружины, изображенных на рисунке 1.

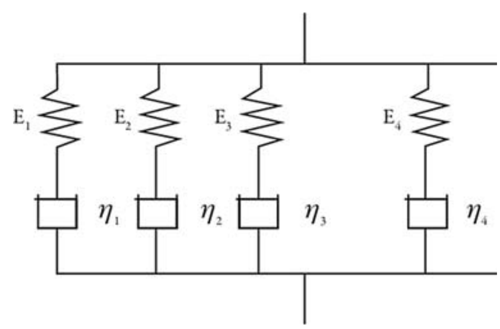

Рис. 1. Обобщенная модель Максвелла

Рассмотрим элемент, стоящий на i-ом месте. Если жесткость пружины обозначить через E_i, а вязкость через η_i, то время релаксации i-го элемента находится как $\tau_i = \dfrac{\eta_i}{E_i}$ и является мерой времени, необходимой для релаксации напряжения. Любое число элементов Максвелла обладает свойствами самого элемента, однако имеет значительно более сложные свойства. Этот факт и приводит к дискретному спектру релаксации τ.

При использовании обобщенной модели Максвелла можно ввести понятие о спектре времен релаксации. Таким образом, ядро релаксации имеет вид

$$r_{\text{Н}}(t) = \sum_k H(\tau_k) e^{-\frac{t}{\tau_k}} \qquad (3)$$

где $H(\tau_k)$ — спектральная плотность времен ползучести или релаксации;

τ_k — времена релаксации;

$e^{-\frac{t}{\tau_k}}$ — экспоненциальный множитель.

В случае непрерывного спектра в виде

$$r_{\text{Н}}(t) = \int_0^\infty H(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \qquad (4)$$

в данной работе будем рассматривать дискретный спектр времен релаксации.

Для анализа применимости уравнения Больцмана к динамическим механическим процессам воспользуемся двумя известными физическими приемами: 1) метод иерархии времен релаксации, 2) метод линеаризации.

Метод иерархии времен релаксации

Все процессы, связанные с механическим деформированием, можно условно разбить на три группы:

1) акустические с характерным временем $\tau_a \sim 10^{-6} \div 0^{-3}\, c$;

2) динамические с $\tau_{\text{д}} \sim 10^{-3} \sim 1\, c$;

3) статические с $\tau_{\text{ст}} > 1\, c$.

Соответствующую сумму в формуле (3) можно также разбить на три суммы, установив иерархию времен релаксации, т.е.

$$r_{\text{Н}}(t) = \sum_{(\tau_a)} H(\tau_k) e^{-\frac{t}{\tau_k}} + \sum_{(\tau_{\text{д}})} H(\tau_k) e^{-\frac{t}{\tau_k}} + \sum_{(\tau_{\text{ст}})} H(\tau_k) e^{-\frac{t}{\tau_k}} = r_a(t) + r_{\text{д}}(t) + r_{\text{ст}}(t)$$

При этом под E_0 будем подразумевать E_{0a} — акустический модуль.

Акустический режим

При фиксированной (установившейся) статической деформации $\varepsilon_{\text{ст}} = \varepsilon_0$. Усреднение по частям ядра с большими временами релаксации дает ноль, т.е.

$$\sigma_a(t) = E_{0a}\varepsilon_a(t) - (E_{0a} - E_\infty)\int_0^t r_a(\varepsilon_a, t-\tau)\varepsilon_a(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Уравнение типа (5) описывает затухание и дисперсию звуковых волн. Заметим, что изучение чисто акустических процессов не может дать информации о динамической и статической частях спектра времен релаксации.

Статический режим

При изучении статических процессов следует отметить, что в соответствии с иерархией времен релаксации все сопутствующие динамические и акустические процессы уже закончились, поэтому в силу нормировки условие статичности можно записать так

$$\int_0^t r_a(t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta = \varepsilon(t)\int_0^\infty r_a(\Theta)\mathrm{d}\Theta = \Delta R_a(\varepsilon)\varepsilon(t), \quad (6)$$

где $\Delta R_a(\varepsilon) = \int_0^\infty r_a(\Theta)d\Theta$ в общем случае может зависеть от уровня деформации в данный момент времени *t*.

Аналогично

$$\int_0^t r_{\text{д}}(t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta = \varepsilon(t)\int_0^\infty r_{\text{д}}(\Theta)\mathrm{d}\Theta = \Delta R_{\text{д}}(\varepsilon)\varepsilon(t). \quad (7)$$

Таким образом, для изучения статических механических процессов в вязкоупругих нитях необходимо воспользоваться уравнением Больцмана в виде:

$$\sigma(t) = E_{0\text{ст}}\varepsilon(t) - (E_{0a} - E_\infty)\int_0^t r_{\text{ст}}(\varepsilon, t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta. \quad (8)$$

Выражение вида

$$E_{0\text{ст}} = E_{0a} - (\Delta R_a + \Delta R_{\text{д}})(E_{0a} - E_\infty) \qquad (9)$$

будем называть статическим модулем упругости и введем нормированное статическое ядро релаксации в виде

$$r_{\text{н.ст}} = \frac{1}{1 - \Delta R_a + \Delta R_{\text{д}}} r_{\text{ст}}(t), \qquad (10)$$

т.е. произведем перенормировку ядра, причем

$$(1 - \Delta R_a + \Delta R_{\text{д}})(E_{0a} - E_\infty) = E_{0\text{ст}} - E_\infty. \qquad (11)$$

Тогда уравнение статических механических процессов запишется в обычном виде [18]:

$$\sigma(t) = E_{0\text{ст}}\varepsilon(t) - (E_{0\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t r_{\text{н.ст}}(\varepsilon, t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta. \quad (12)$$

Статическое наследственное ядро релаксации $r_{\text{н.ст}}(t)$ достаточно подробно изучено в работе [19].

Подчеркнем, что статическое ядро не содержит информации об акустической и динамической частях спектра.

Динамический режим

Рассмотрим динамический квазипериодический режим деформирования. Будем считать, что все сопутствующие акустические процессы уже закончились, поэтому в соответствии с иерархией времен релаксации будет выполняться условие (6). Усреднение по статической части ядра, как и в акустическом режиме, дает ноль, поэтому:

$$\sigma(t) = E_{0\text{д}}\varepsilon(t) - (E_{0\text{д}} - E_\infty)\int_0^t r_\text{д}(\varepsilon, t-\Theta)\varepsilon(\Theta)d\Theta . \quad (13)$$

Выражение вида

$$E_{0\text{д}} = E_{0\text{д}} - \Delta R_a(E_{0\text{д}} - E_\infty) \quad (14)$$

назовем динамическим модулем упругости.

Нетрудно видеть, что статический, динамический и акустический модули упругости связаны между собой:

$$E_{0\text{ст}} < E_{0\text{д}} < E_{0a} . \quad (15)$$

В некоторых случаях для удобства будем пользоваться нормированным динамическим ядром в виде

$$r_{\text{н.д}}(\varepsilon,t) = \frac{1}{1-\Delta R_a - \Delta R_\text{ст}} r_\text{д}(\varepsilon,t) . \quad (16)$$

Заметим, что квазипериодические динамические процессы содержат информацию только о динамической части спектра времен релаксации. В дальнейшем удобнее пользоваться ненормированным динамическим ядром

$$r_\text{д}(t) = \sum_{(\tau_\text{д})} H(\tau_k)(E_{0a} - E_\infty)e^{-\frac{t}{\tau_k}} = \sum_{(\tau_g)} E_k e^{-\frac{t}{\tau_k}} , \quad (17)$$

где E_k — спектральная сила ненормированного дискретного спектра времен релаксации.

Метод линеаризации

Рассмотрим достаточно сложный режим деформирования, при котором полная деформация может быть представлена в виде:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\text{ст}(t) + \varepsilon_\text{д}(t), \quad (18)$$

где $\varepsilon_\text{ст}(t)$ — достаточно медленно меняющаяся статическая часть деформации; $(\varepsilon_\text{ст}(t) << 1)$ и $\varepsilon_\text{д}(t)$ — квазипериодическая динамическая часть деформации. Ограничимся условием

$$\varepsilon_\text{д}(t) << \varepsilon_\text{ст}(t) \quad (19)$$

В соответствии с (17) механическое напряжение будет выглядеть так:

$$\sigma(t) = E_{0\text{д}}\varepsilon_\text{ст}(t) + E_{0\text{д}}\varepsilon_\text{д} - \int_0^t r_\text{д}(t-\Theta)\varepsilon_\text{ст}(\Theta)d\Theta - \int_0^t r_\text{д}(t-\Theta)\varepsilon_\text{ст}(\Theta)d\Theta -$$
$$-(E_{0\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t r_\text{н.ст.}(\varepsilon_\text{ст} + \varepsilon_\text{д}, t-\Theta)\varepsilon_\text{ст}(\Theta)d\Theta - (E_{0,\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t r_\text{н.ст.}(\varepsilon_\text{ст} + \varepsilon_\text{д}, t-\Theta)\varepsilon_\text{д}(\Theta)d\Theta. \quad (20)$$

Здесь принято, что $r_\text{д}(\varepsilon_\text{ст} + \varepsilon_\text{д}, t) \cong r_\text{д}(\varepsilon_\text{ст}, t)$, поскольку динамическая часть ядра релаксации слабо зависит от уровня деформирования. С учетом соотношения (7), пренебрегая членами с $\varepsilon_\text{д}^2$, получим

$$\sigma_\text{ст}(t) + \sigma_\text{д}(t) = E_{0\text{ст}}\varepsilon_\text{ст}(t) + E_{0\text{д}}\varepsilon_\text{д} - \int_0^t r_\text{д}(\varepsilon_\text{ст}, t-\Theta)\varepsilon_\text{д}(\Theta)d\Theta -$$
$$-(E_{0\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t r_\text{н.ст.}(\varepsilon_\text{ст}, t-\Theta)\varepsilon_\text{ст}(\Theta)d\Theta - (E_{0\text{ст}} - E_\infty)\cdot\int_0^t \frac{\partial r_\text{ст}(\varepsilon_\text{ст}, t-\Theta)}{\partial\varepsilon_\text{ст}}\varepsilon_\text{ст}(\Theta)\varepsilon_\text{д}(t-\Theta)d\Theta. \quad (21)$$

Разделив статическую и динамическую части уравнений и произведя усреднение по периоду динамической части, получим:

$$\sigma_\text{ст}(t) = E_{0\text{ст}}\varepsilon_\text{ст}(t) - (E_{0\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t r_\text{н.ст.}(\varepsilon_\text{ст}, t-\Theta)\varepsilon_\text{ст}(\Theta)d\Theta -$$
$$-(E_{0\text{ст}} - E_\infty)\int_0^t \frac{\partial r_\text{ст}(\varepsilon_\text{ст}, \Theta)}{\partial\varepsilon_\text{ст}(\Theta)}\varepsilon_\text{д}(\Theta)\varepsilon_\text{ст}(t-\Theta)d\Theta. \quad (22)$$

Из-за сильной нелинейности статического ядра $r_{\text{ст}}(\varepsilon_{\text{ст}},\ t)\ \dfrac{\partial r_{\text{ст}}(\varepsilon_{\text{ст}},t)}{\partial \varepsilon_{\text{ст}}(t)}\varepsilon_{\text{д}}(t)$ — среднее по динамической составляющей в общем случае отлично от нуля; будем называть эту величину ядром взаимодействия статической и динамической частей деформации, т.е.

$$r_{\text{вз}}(\varepsilon_{\text{ст}},\Theta)\frac{\partial r_{\text{ст}}(\varepsilon_{\text{ст}},t)}{\partial \varepsilon_{\text{ст}}(t)}\varepsilon_{\text{д}}(t). \tag{23}$$

Поскольку спектр времен релаксаций содержит времена релаксаций совершенно разных порядков, то для процессов с малой длительностью большие времена релаксации не успеют оказать воздействие. Система их «не заметит». И, наоборот, для длительных процессов малые времена релаксации можно заменить дельта-функцией Дирака и внести в упругую деформацию.

Таким образом, статическая часть напряжения окончательно примет вид:

$$\sigma_{\text{ст}}(t) = E_{0\text{ст}}\varepsilon_{\text{ст}}(t) - (E_{0\text{ст}} - E_{\infty})\cdot \int_0^t [r_{\text{н.ст}}(\varepsilon_{\text{ст}},t-\Theta) + r_{\text{вз}}(\varepsilon,t-\Theta)]\varepsilon(\Theta)d\Theta. \tag{24}$$

Отдельно выражение для динамической части напряжения будет выглядеть так:

$$\sigma_{\text{д}}(t) = E_{0\text{д}}\varepsilon_{\text{д}}(t) - \int_0^t r_{\text{д}}(\varepsilon_{\text{д}},t-\Theta)\varepsilon_{\text{д}}\Theta)d\Theta. \tag{25}$$

Уравнение (24) представляет собой линейное интегральное уравнение. Таким образом, в рамках использования разделения полного наследственного релаксационного ядра предлагается линеаризация динамической задачи.

Вывод

В результате проведенных исследований можно сделать вывод, что в отличие от низкомолекулярных материалов модуль упругости для полимерных материалов представляет не функцию состояния, а функцию процесса. Поэтому для полной информации о молекулярной структуре высокомолекулярных соединений все физические испытания нужно проводить в комплексе: при статических, динамических и акустических нагрузках. С учетом взаимодействия статической и динамической частей ядра релаксации уравнение наследственности представлено в новом виде.

Библиографический список

1. Пальмов В.А**.** Нелинейная механика деформируемых тел : учеб. пособие. СПб., 2014.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
3. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М., 1973.
4. Екельчик В.С., Рябов В.М. Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Мех. композиц. материалов. 1981. № 3.
5. Persoz B. Le Principe de Superposition de Boltzmann // ln col.: Cahier Groupe Franc. Etudees Rheol. 1957. Vol. 2.
6. Макаров А.Г. Прогнозирование деформационных процессов в текстильных материалах : монография. СПб., 2002.
7. Сталевич А.М. Уравнение нелинейной вязкоупругости высоокоориентированных полимеров // Проблемы прочности. 1981. № 12.
8. Переборова Н.В., Вагнер В.И. Прогнозирование деформационных процессов полимерных текстильных материалов с позиции математического моделирования и системного анализа их вязкоупругости // Дизайн. Материалы. Технология. 2021. № 2 (62).
9. Кузуб Л.И., Иржак В.И. Эффективное время релаксации как метод характеристики релаксационных спектров полимеров // Высокомолекулярные соединения. Серия А. 2004. Т. 46. № 2.
10. Romanova A.A., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S., Stalevich A.M. Dynamic relaxation of synthetic fibres // Fibre Chemistry. 2005. Т. 37. № 4.
11. Romanova A.A., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S., Stalevich A.M., Ginzburg B.M. A new phenomenon-amplitude-modulated free oscillations (beatings) in loaded, highly oriented fibers from semicrystalline polymers // Journal of Macromolecular Science. Part B. Physics. 2007. Т. 46 В. № 3.
12. Rymkevich P.P., Romanova A.A., Gorshkov A.S., Makarov A.G. Main constitutive equation of the viscoelastic behavior of unixially co-oriented polymers // Fibre Chemistry. 2004. Т. 46. № 1.
13. Скульский О.И., Кузнецова Ю.Л. Реологические модели растворов полимеров// Математическое моделирование систем и процессов. 2006. № 14.

14. Рымкевич П.П., Головина В.В., Макаров А.Г., Романова А.А., Рымкевич О.В. Прогнозирование деформационно-релаксационных процессов в гибко и жесткоцепных полимерных текстильных материалах на основе диаграмм растяжения // Известия вузов. Технология легкой промышленности. 2018. Т. 38. № 1.

15. Головина В.В., Макаров А.Г., Романова А.А., Рымкевич О.В. Моделирование и прогнозирование ползучести полимерных текстильных материалов методом барьерной теории // Известия вузов. Технология легкой промышленности. 2018. Т. 41. № 3.

16. Рымкевич П.П., Макаров А.Г., Горшков А.С. Описание физических законов на основе нового метода усреднения физических величин // Вестник СПб. гос. ун-та технологии и дизайна. Серия 1: Естественные и технические науки. 2015. № 4.

17. Рымкевич П.П., Горшков А. С. Теория переноса. СПб., 2015.

18. Сталевич А.М. Свойства релаксационного ядра, используемого для расчета сложных режимов деформирования синтетических нитей // Известия вузов. ТТП. 1982. № 1.

19. Сталевич А.М. Расчетное прогнозирование нагруженных состояний синтетических нитей // Известия вузов Сер.: Технол. легк. пром. 1989. № 1.